

307.801

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

VIII. ÉVFOLYAM A. SOROZAT, 1—2. FÜZET

1963

*

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ
ТОМ VIII, СЕРИЯ А, ВЫПУСК 1—2.
1963

*

PUBLICATIONS
OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
VOLUME VIII, SERIES A, FASC. 1—2.

1963



1963

INDEX

СОДЕРЖАНИЕ

DAVENPORT, H.—ERDŐS, P.: A theorem on uniform distribution.....	3
FÉNYES, T.: Über restriktive lineare partielle Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten	13
CSÁKI, P.—FISCHER, J.: On the general notion of maximal correlation.....	27
FEJES TÓTH, L.: On the isoperimetric property of the regular hyperbolic tetrahedra	53
BÉKÉSSY, A.: On classical occupancy problems I.	59
RÉVÉSZ, P.: On sequences of quasi-equivalent events I.	73
CSISZÁR, I.: Eine informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizität von Markoffischen Ketten	85
MAKAI, E.: On the fundamental frequencies of two and three dimensional membranes	109
BÁRTFAI, P.: Irrfahrtsprobleme mit einer spiegelnden Wand.....	125
GALLAI, T.: Neuer Beweis eines Tutte'schen Satzes.....	135
ALPÁR, L.: Sur une forme symétrique des équations de Beltrami	141
LEINDLER, L.: О безусловной сходимости тригонометрических рядов.....	151
MAKAI, E.—TURÁN, P.: Hermite expansion and distribution of zeros of polynomials	157
GALLAI, T.: Kritische Graphen I.	165
GRÄTZER, G.: Free algebras over first order axiom systems	193
BOGNÁR, J.: О некоторых соотношениях неотрицательности операторов в про- странствах с индефинитной метрикой	201
PÉTER, R.: Über die Rekursivität der Begriffe der mathematischen Grammatiken	213
ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On two problems of information theory	229
Bibliography. List of recent papers and books written by members of the institute, published or in print elsewhere in foreign languages.....	245

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

VIII. ÉVFOLYAM A. SOROZAT, 1—2. FÜZET

1963

*

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ
ТОМ VIII, СЕРИЯ А, ВЫПУСК 1—2.

1963

*

PUBLICATIONS
OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
VOLUME VIII, SERIES A, FASC. 1—2.

1963



1963

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ: RÉNYI ALFRÉD

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG: FREUD GÉZA, GALLAI TIBOR, GRÄTZER GYÖRGY, HEPPES ALADÁR,
MAKAI ENDRE, MEDGYESSY PÁL

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, CSISZÁR IMRE

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azokról különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEINEK előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hirlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

РЕДКОЛЛЕГИЯ: GÉZA FREUD, TIBOR GALLAI, GYÖRGY GRÄTZER, ALADÁR HEPPES,
ENDRE MAKAI, PÁL MEDGYESSY

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, IMRE CSISZÁR

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15. ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюме на языках отличающихся от языка статьи.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Күльтүра, Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR IN CHIEF: ALFRÉD RÉNYI

EDITORIAL BOARD: GÉZA FREUD, TIBOR GALLAI, GYÖRGY GRÄTZER, ALADÁR HEPPES,
ENDRE MAKAI, PÁL MEDGYESSY

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, IMRE CSISZÁR

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematic. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciuli of series A and one fasciulus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 type-written copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 7.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kүltүra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15. Hungary).

A THEOREM ON UNIFORM DISTRIBUTION

by

H. DAVENPORT and P. ERDŐS

1. It is well known that if α is any positive irrational number, the sequence

$$(1) \quad \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$$

is uniformly distributed modulo 1. A more general concept of uniform distribution was introduced by LEVEQUE¹. Let

$$z_1 < z_2 < \dots$$

be a sequence of positive real numbers, such that $z_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$. For given λ , with $0 < \lambda < 1$, let $F(N)$ denote the number of positive integers $k \leq N$ for which $k\alpha$ falls in one of the intervals

$$(2) \quad (z_j, z_j + \lambda(z_{j+1} - z_j)).$$

If $F(N)/N \rightarrow \lambda$ as $N \rightarrow \infty$, for each λ , we say that the sequence (1) is uniformly distributed relative to the sequence z_j . If $z_j = j$ we get the usual definition of uniform distribution modulo 1. The definition applies, of course, to sequences other than (1), but in the present paper we limit ourselves to this case. We shall suppose that

$$(3) \quad z_{j+1}/z_j \rightarrow 1$$

as $j \rightarrow \infty$, since otherwise (as is easily seen) the sequence (1) cannot be uniformly distributed relative to $\{z_j\}$ for any α .

It follows from the work of LEVEQUE, supplemented by that of DAVENPORT and LEVEQUE² that *provided $z_{j+1} - z_j$ is monotonic (in the wide sense), the sequence (1) is uniformly distributed relative to $\{z_j\}$ for almost all $\alpha > 0$, i.e. for almost all α in any interval (α_1, α_2) , where $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$.*

We conjecture that this remains true without the requirement that $z_{j+1} - z_j$ should be monotonic. We are unable to prove this, but we shall prove that the requirement can be omitted provided that the numbers z_j are not very dense.

¹ LEVEQUE, W. J., "On uniform distribution modulo a subdivision", *Pacific J. of Math.*, **3** (1953), 757—771.

² DAVENPORT, H.—LEVEQUE, W. J., "Uniform distribution relative to a fixed sequence", *Michigan Math. J.* **10** (1963), 315—319.

It is convenient to consider a somewhat more general situation. Let

$$(4) \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$$

be a sequence of non-overlapping intervals, arranged in increasing order, such that $x_j \rightarrow \infty$ as $j \rightarrow \infty$, and let $I(Z)$ denote the measure of the part of the interval $(0, Z)$ which is contained in these intervals. Thus

$$(5) \quad \begin{cases} I(Z) = (y_1 - x_1) + \dots + (y_j - x_j) & \text{if } y_j \leq Z \leq x_{j+1}, \\ I(Z) = (y_1 - x_1) + \dots + (y_{j-1} - x_{j-1}) + (Z - x_j) & \text{if } x_j \leq Z \leq y_j. \end{cases}$$

Let $F_\alpha(N)$ denote the number of positive integers $k \leq N$ for which ka falls in one of the intervals (4). Then we may expect that, under suitable conditions, $F_\alpha(N)$ will be approximated by $\alpha^{-1}I(N\alpha)$ for almost all α . We prove the following

Theorem. *Suppose that*³

$$(6) \quad I(Z) \gg Z.$$

Let $X(N)$ denote the number of j for which $x_j \leq N$, and suppose that

$$(7) \quad X(N) \ll N^{2-\delta}$$

for some fixed $\delta > 0$. Then

$$(8) \quad \alpha F_\alpha(N)/I(N\alpha) \rightarrow 1 \text{ as } N \rightarrow \infty$$

for almost all $\alpha > 0$.

If we take

$$(9) \quad x_j = z_j, \quad y_j = z_j + \lambda(z_{j+1} - z_j),$$

where $0 < \lambda < 1$, then it follows from (3) that $I(Z)/Z \rightarrow \lambda$, and we deduce that the sequence (1) is uniformly distributed relative to $\{z_j\}$ for almost all α , provided that the number of $z_j < N$ is $\ll N^{2-\delta}$.

We conjecture that the theorem stated above holds without the condition (7). How far the condition (6) can be relaxed is doubtful⁴; we have not been able to disprove the possibility that the result may hold merely if $I(Z) \rightarrow \infty$ as $Z \rightarrow \infty$.

We take the opportunity of drawing attention to a problem connected with uniform distribution which was proposed by Khintchine⁵ and seems to be still unsolved. Let S be a set in $(0, 1)$ which is measurable in the sense of Lebesgue, with measure $m(S)$. Let $F_\alpha(N, S)$ denote the number of positive integers $k \leq N$ for which the fractional part of ka falls in S . Is it true that

$$(10) \quad F_\alpha(N, S)/N \rightarrow m(S) \text{ as } N \rightarrow \infty$$

for almost all α in $(0, 1)$?

³ We use VINOGRADOV's symbols \gg and \ll to indicate an inequality containing an unspecified positive constant factor.

⁴ In the theorem as it stands, the condition (6) can be relaxed to some extent if (7) is correspondingly strengthened.

⁵ KHINTCHINE, A., "Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen", *Math. Zeitschrift*, **18** (1923), 289—306 (303—306).

A more general conjecture would be the following. Let $f(x)$ be a bounded, measurable, and non-negative function, and put

$$I(Z) = \int_0^Z f(x) dx.$$

Suppose that $I(Z) \rightarrow \infty$ as $Z \rightarrow \infty$. Is it true that, for almost all $\alpha > 0$,

$$\left\{ \sum_{k=1}^N f(k\alpha) \right\} / I(N\alpha) \rightarrow \alpha^{-1}$$

as $N \rightarrow \infty$? This would include (10) on taking $f(x)$ to be the characteristic function of S in $(0, 1)$ and periodic with period 1. It would also include the conjecture stated above that the conclusion of our theorem may hold merely if $I(Z) \rightarrow \infty$. We can make no contribution to the proof or disproof of these conjectures: it seems⁶ that the condition of boundedness of $f(x)$ in the above cannot be much relaxed even if $f(x)$ is assumed to be periodic.

2. We first prove that the conclusion of the theorem will follow if we establish the inequality

$$(11) \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (F_\alpha(N) - \alpha^{-1} I(N\alpha))^2 d\alpha \ll N^{2-\delta}.$$

The argument is on well known lines.

We can choose an increasing sequence N_1, N_2, \dots of positive integers so that

$$(12) \quad N_{r+1}/N_r \rightarrow 1$$

and

$$\sum_r N_r^{-2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (F_\alpha(N_r) - \alpha^{-1} I(N_r\alpha))^2 d\alpha \text{ converges;}$$

for instance, we can take $N_r = [r^\gamma]$ with any fixed $\gamma > \delta^{-1}$. It follows from a well known general theorem⁷ that

$$\sum_r N_r^{-2} (F_\alpha(N_r) - \alpha^{-1} I(N_r\alpha))^2$$

converges for almost all α in (α_1, α_2) , and in particular that

$$(13) \quad N_r^{-1} |F_\alpha(N_r) - \alpha^{-1} I(N_r\alpha)| \rightarrow 0$$

as $r \rightarrow \infty$, for almost all α in (α_1, α_2) .

If $N_r \leq N < N_{r+1}$, we have

$$F_\alpha(N_r) \leq F_\alpha(N) \leq F_\alpha(N_r) + (N - N_r),$$

$$I(N_r\alpha) \leq I(N\alpha) \leq I(N_r\alpha) + \alpha(N - N_r),$$

⁶ Compare ERDŐS, P., "On the strong law of large numbers", *Trans. American Math. Soc.*, **67** (1949), 51—56.

⁷ See WEYL, H., "Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins", *Math. Annalen*, **77** (1916), 313—352, § 7.

whence

$$|F_\alpha(N) - \alpha^{-1} I(N\alpha)| \leq |F_\alpha(N_r) - \alpha^{-1} I(N_r\alpha)| + (N - N_r).$$

In view of (12), it follows from (13) that

$$N^{-1} |F_\alpha(N) - \alpha^{-1} I(N\alpha)| \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty$$

for almost all α , and in view of (6), this in turn implies (8). Thus (8) holds for almost all α .

3. Define the function $\psi(t)$ of a real variable t by

$$(14) \quad \psi(t) = \begin{cases} t - [t] - \frac{1}{2} & \text{if } t \text{ is not an integer,} \\ 0 & \text{if } t \text{ is an integer.} \end{cases}$$

For given N and α , define $J = J(\alpha)$ by

$$(15) \quad x_J \leq N\alpha < x_{J+1},$$

and write

$$(16) \quad G_\alpha(N) = \sum_{j=1}^{J(\alpha)} (\psi(x_j/\alpha) - \psi(y_j/\alpha)).$$

We shall prove that (11) will follow from the inequality

$$(17) \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (G_\alpha(N))^2 d\alpha \ll N^{2-\delta}.$$

For any particular j , the number of values of k for which

$$x_j < k\alpha < y_j$$

is

$$\left[\frac{y_j}{\alpha} \right] - \left[\frac{x_j}{\alpha} \right] = \frac{y_j - x_j}{\alpha} + \psi\left(\frac{x_j}{\alpha}\right) - \psi\left(\frac{y_j}{\alpha}\right),$$

provided neither x_j/α nor y_j/α is an integer. A similar expression holds, with y_j/α replaced by N , for the number of values of k satisfying $x_j < k\alpha < N\alpha$. It follows, on recalling the definition of $I(N\alpha)$ in (5), that

$$F_\alpha(N) = \alpha^{-1} I(N\alpha) + G_\alpha(N) + O(1) + O(v(\alpha, N)),$$

where $v(\alpha, N)$ denotes the number of $k \leq N$ for which $k\alpha$ coincides with one of the numbers x_j or y_j . Since $v(\alpha, N) = 0$ for all but a finite number of values of α , it follows from the above relation that (17) implies (11).

4. To simplify writing, we shall now take $\alpha_1 = 1$ and $\alpha_2 = 2$. We recall that $\psi(t)$, defined in (14), has the expansion

$$(18) \quad \psi(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin 2\pi mt.$$

Hence

$$\pi G_\alpha(N) = G'_\alpha(N) + G''_\alpha(N),$$

where

$$(19) \quad G'_a(N) = \sum_{j=1}^{J(a)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} \left(\sin 2\pi m y_j / \alpha - \sin 2\pi m x_j / \alpha \right),$$

$$(20) \quad G''_a(N) = \sum_{j=1}^{J(a)} \sum_{m>M} \frac{1}{m} \left(\sin 2\pi m y_j / \alpha - \sin 2\pi m x_j / \alpha \right).$$

Thus

$$(21) \quad \int_1^2 (G_a(N))^2 d\alpha \leq \int_1^2 (G'_a(N))^2 d\alpha + \int_1^2 (G''_a(N))^2 d\alpha.$$

We now estimate, in a very simple manner, the second of the two integrals on the right. By partial summation, we have

$$\left| \sum_{m>M} \frac{1}{m} \sin 2\pi m t \right| \leq \min \left(1, \frac{1}{M \|t\|} \right),$$

where $\|t\|$ denotes the distance of t from the nearest integer. Hence

$$|G''_a(N)| \leq \sum_{j=1}^{J(a)} \min \left(1, \frac{1}{M \|x_j / \alpha\|} \right) + \sum_{j=1}^{J(a)} \min \left(1, \frac{1}{M \|y_j / \alpha\|} \right).$$

It will suffice to treat the first of these sums. By Cauchy's inequality,

$$\left\{ \sum_{j=1}^{J(a)} \min \left(1, \frac{1}{M \|x_j / \alpha\|} \right) \right\}^2 \leq J(a) \sum_{j=1}^{J(a)} \min \left(1, \frac{1}{M^2 \|x_j / \alpha\|^2} \right).$$

By (15), we have $J(a) \leq X(N\alpha) \leq X(2N)$. For each j ,

$$\int_1^2 \min \left(1, \frac{1}{M^2 \|x_j / \alpha\|^2} \right) d\alpha = x_j \int_{x_j/2}^{x_j} \min \left(1, \frac{1}{M^2 \|\beta\|^2} \right) \frac{d\beta}{\beta^2},$$

on putting $\alpha = x_j / \beta$; and since

$$\int_v^{v+1} \min \left(1, \frac{1}{M^2 \|\beta\|^2} \right) \frac{d\beta}{\beta^2} \leq \frac{1}{M v^2}$$

for any positive integer v , it follows that

$$\int_1^2 \min \left(1, \frac{1}{M^2 \|x_j / \alpha\|^2} \right) d\alpha \leq \frac{x_j}{M} \sum_{v>x_j/2} \frac{1}{v^2} \leq \frac{1}{M}.$$

Hence

$$(22) \quad \int_1^2 (G''_a(N))^2 d\alpha \leq M^{-1} (X(2N))^2.$$

5. It remains to estimate the analogous integral with $G'_a(N)$. By (19), this is

$$\int_1^2 \left\{ \sum_{j=1}^{J(\alpha)} \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} (\sin 2\pi m y_j / \alpha - \sin 2\pi m x_j / \alpha) \right\}^2 d\alpha.$$

We write the square of the sum as a double sum, over j, k going from 1 to $J(\alpha)$ and over m, n going from 1 to M , and interchange summation and integration. The maximum value of $J(\alpha)$ is $X(2N)$, and for given j, k the conditions $j \leq J(\alpha)$, $k \leq J(\alpha)$ are equivalent to

$$\alpha \geq \max(x_j/N, x_k/N).$$

Hence the integral in question is

$$\sum_{j=1}^{X(2N)} \sum_{k=1}^{X(2N)} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \frac{1}{mn} \int_{\alpha_{jk}}^2 S(j, m) S(k, n) d\alpha,$$

where

$$\alpha_{jk} = \max(1, x_j/N, x_k/N)$$

and

$$S(j, m) = \sin 2\pi m y_j / \alpha - \sin 2\pi m x_j / \alpha,$$

$$S(k, n) = \sin 2\pi n y_k / \alpha - \sin 2\pi n x_k / \alpha.$$

Putting $\alpha = 1/\beta$, the expression becomes

$$(23) \quad \sum_{j=1}^{X(2N)} \sum_{k=1}^{X(2N)} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \frac{1}{mn} \int_{\frac{1}{2}}^{\beta_{jk}} S(j, m) S(k, n) \beta^{-2} d\beta,$$

where

$$\beta_{jk} = \min(1, N/x_j, N/x_k)$$

and $S(j, m)$, $S(k, n)$ are defined as above with $1/\alpha$ replaced by β . We have

$$\begin{aligned} 2S(j, m) S(k, n) &= \cos 2\pi(m y_j - n y_k) \beta - \cos 2\pi(m y_j + n y_k) \beta \\ &\quad - \cos 2\pi(m x_j - n y_k) \beta + \cos 2\pi(m x_j + n y_k) \beta \\ &\quad - \cos 2\pi(m y_j - n x_k) \beta + \cos 2\pi(m y_j + n x_k) \beta \\ &\quad + \cos 2\pi(m x_j - n x_k) \beta - \cos 2\pi(m x_j + n x_k) \beta. \end{aligned}$$

We arrange this as a sum of pairs, such as

$$\cos 2\pi(m y_j - n y_k) \beta - \cos 2\pi(m x_j - n y_k) \beta.$$

It will suffice to consider this pair, the treatment of the other pairs being similar. Thus we have to estimate the expression

$$(24) \quad \sum_{j=1}^{X(2N)} \sum_{k=1}^{X(2N)} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \frac{1}{mn} \int_{\frac{1}{2}}^{\beta_{jk}} \{ \cos 2\pi\beta(m y_j - n y_k) - \cos 2\pi\beta(m x_j - n y_k) \} \beta^{-2} d\beta.$$

We use two inequalities. The first is the obvious one:

$$(25) \quad \left| \int_{\frac{1}{2}}^{\beta_{jk}} (\cos 2\pi\beta A) \beta^{-2} d\alpha \right| \ll \min(1, |A|^{-1}),$$

where A is any real number and $\frac{1}{2} \leq \beta_{jk} \leq 1$. The second is

$$(26) \quad \left| \int_{\frac{1}{2}}^{\beta_{jk}} (\cos 2\pi\beta A - \cos 2\pi\beta B) \beta^{-2} d\beta \right| \ll |A - B| \min(1, |A + B|^{-1}),$$

valid provided $|A - B| \ll 1$. This follows from the fact that the integral on the left is

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\frac{1}{2}}^{\beta_{jk}} \sin \pi\beta(B - A) \sin \pi\beta(B + A) \beta^{-2} d\beta = \\ & = 2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)!} \pi^{2r+1} (B - A)^{2r+1} \int_{\frac{1}{2}}^{\beta_{jk}} \beta^{2r-1} \sin \pi\beta(A + B) d\beta, \end{aligned}$$

together with the fact that

$$\left| \int_{\frac{1}{2}}^{\beta_{jk}} \beta^{2r-1} \sin \pi\beta(A + B) d\beta \right| < C \min(1, |A + B|^{-1}),$$

where C is independent of r .

We divide the sum (24) into two parts. For the terms with $m(y_j - x_j) \geq 1$, the absolute value of the integral, by (25), is

$$\ll \min(1, |my_j - ny_k|^{-1}) + \min(1, |mx_j - ny_k|^{-1}).$$

For the terms with $m(y_j - x_j) < 1$, the absolute value of the integral, by (26), is

$$\ll m(y_j - x_j) \min(1, |mx'_j - ny_k|^{-1}),$$

where $x'_j = \frac{1}{2}(x_j + y_j)$. But here we can replace x'_j by x_j , since the term $|mx'_j - ny_k|^{-1}$ is significant only if $|mx'_j - ny_k| > 1$, and we have $m|x'_j - x_j| < \frac{1}{2}$.

Thus we can put the two parts of the sum together again as

$$(27) \quad \sum_{j=1}^{X(2N)} \sum_{k=1}^{X(2N)} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \frac{1}{mn} P(m, j) Q(m, n, j, k),$$

where

$$P(m, j) = \min(1, m(y_j - x_j)),$$

$$Q(m, n, j, k) = \min(1, |my_j - ny_k|^{-1}) + \min(1, |mx_j - ny_k|^{-1}).$$

It will be sufficient to deal with the first of the two terms in Q , the second being treated similarly.

For given k, m, n , consider first those values of j (if any) for which

$$ny_k - \frac{1}{2} \leq my_j < ny_k + \frac{1}{2}.$$

Denote these by $j_1 \leq j \leq j_2$. We have

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} P(m, j) \leq 1 + \sum_{j=j_1+1}^{j_2} m(y_j - x_j).$$

For $j_1 + 1 \leq j \leq j_2$, the intervals (x_j, y_j) are disjoint and satisfy

$$x_j \geq x_{j_1+1} > y_{j_1} \geq \left(ny_k - \frac{1}{2} \right) / m,$$

$$y_j \leq y_{j_2} < \left(ny_k + \frac{1}{2} \right) / m.$$

Hence

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} P(m, j) \ll 1,$$

whence

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} P(m, j) Q(m, n, j, k) \ll 1.$$

Consider next those values of j for which

$$ny_k + v - \frac{1}{2} \leq my_j < ny_k + v + \frac{1}{2},$$

where v is a non-zero integer. Denoting these by $j_1(v) \leq j \leq j_2(v)$ and arguing as before, we obtain

$$\sum_{j=j_1(v)}^{j_2(v)} P(m, j) \ll 1,$$

whence

$$\sum_{j=j_1(v)}^{j_2(v)} P(m, j) Q(m, n, j, k) \ll |v|^{-1}.$$

It follows that the multiple sum (27) has absolute value

$$\ll \sum_{k=1}^{X(2N)} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M \frac{1}{mn} (1 + \sum_v |v|^{-1}).$$

The greatest value of v is $\ll MN$. Hence we obtain

$$(28) \quad \int_1^2 (G'_a(N))^2 d\alpha \ll (\log M)^2 (\log MN) X(2N).$$

6. We now take $M = [X(2N)]$. The hypothesis (7), together with (22), gives

$$\int_1^2 (G''_a(N))^2 d\alpha \ll N^{2-\delta},$$

and (28) gives

$$\int_1^2 (G'_a(N))^2 d\alpha \ll N^{2-\delta/2}.$$

As was shown in §§2 and 3, this suffices for the proof of the Theorem.

(Received June 21, 1963.)

ТЕОРЕМА О РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

H. DAVENPORT и P. ERDŐS

Резюме

Авторы доказывают следующую теорему: Обозначим через $I(Z)$ меру общей части интервала $(0, Z)$ и суммарного множества интервалов $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ не имеющих попарно общих частей $(0 \leq x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots)$. Предположим, что величина $I(z)/z$ ограничена снизу, если $z \geq 1$. Обозначим через $X(N)$ число тех индексов j для которых $x_j \leq N$. Предположим, что величина $X(N)/N^{2-\delta}$ ограничена сверху, где $\delta > 0$, $N = 1, 2, \dots$. Пусть означает $F_\alpha(N)$ число тех чисел вида $\alpha, 2\alpha, \dots, N\alpha$, которые попадают в один из интервалов (x_k, y_k) . Тогда для почти всех значений α имеет место соотношение:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\alpha F_\alpha(N)}{I(\alpha N)} = 1.$$

ÜBER RESTRIKTIVE LINEARE PARTIELLE DIFFERENTIAL- DIFFERENZENGLEICHUNGEN MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

von
TAMÁS FÉNYES

Einleitung

Die auf der Mikusińskischen Operatorenrechnung beruhende Theorie der Differentialgleichungen liefert eine sehr einfache und elegante Methode für die Lösung von linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bei vorgeschriebenen Anfangs- und Randbedingungen.

Laut [1] können wir die Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(1) \quad \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t)}{\partial \lambda^\mu \partial t^\nu} = \varphi(\lambda, t); \quad \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2, 0 \leq t < \infty$$

in der Operatorenform

$$(2) \quad a_m x^{(m)}(\lambda) + a_{m-1} x^{(m-1)}(\lambda) + \dots + a_0 x(\lambda) = f(\lambda)$$

aufschreiben, wo

$$a_\mu = \alpha_{\mu n} s^n + \dots + \alpha_{\mu 0} \quad \mu = 0, 1, \dots, m,$$

und

$$(3) \quad f(\lambda) = \{\varphi(\lambda, t)\} + \sum_{\kappa=0}^{n-1} s^{n-\kappa-1} \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^{\kappa} \alpha_{\mu, n-\kappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^\mu \partial t^\nu}$$

ist.

Die allgemeine Lösung der Operatordifferentialgleichung (2) kann als Summe einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung geschrieben werden. Die Anzahl der willkürlichen Konstanten die letztere allgemeine Lösung enthält ist gleich der Anzahl der logarithmischen Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (2). (Siehe [1]). Insofern die Anzahl dieser positiv, gleich N ist, müssen wir für das Gewährleisten der Eindeutigkeit der Lösung für (1) N Randbedingungen vorschreiben; dadurch können wir die Werte der Konstanten bestimmen. In diesem Artikel werden wir uns mit den Anfangsbedingungen im Einzelnen beschäftigen. Aus (3) ist es zu ersehen, dass die Anfangsbedingungen von (1) in die Differentialgleichung (2) eintreten und allgemein in der Form

$$(4) \quad \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^{\kappa} \alpha_{\mu, n-\kappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^\mu \partial t^\nu} = g_\kappa(\lambda), \quad \kappa = 0, 1, \dots, n-1,$$

vorzuschreiben sind. (Das bedeutet, dass wir die Funktionen $g_{\kappa}(\lambda)$ als Anfangsbedingungen vorschreiben müssen.) In speziellen Fällen ist die Angabe der Funktionen $g_{\kappa}(\lambda)$ äquivalent dem Vorschreiben der Anfangsbedingungen in der sogenannten Cauchy'schen Gestalt

$$(5) \quad \frac{\partial^{\kappa} x(\lambda, 0)}{\partial t^{\kappa}} = h^{\kappa}(\lambda); \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

In diesen Fällen bezeichnen wir die Differentialgleichung (1) als „nicht restriktiv“. Im entgegengesetzten Falle ist (1) „restriktiv“. Mikusiński hat diesbezüglich folgendes Kriterium bewiesen [1]:

Die Gleichung (1) ist dann und nur dann nicht restriktiv, wenn in ihr keine Ableitung höchster Ordnung nach t vorkommt, die eine gemischte Ableitung ist.

WŁOKA hat in seinem grundlegenden Artikel [2] bewiesen, dass man die Mikusińskie Theorie der Differentialgleichungen auch auf die partielle Differential-Differenzengleichungen vom Typ

$$(6) \quad \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} + \sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{n_1} \beta_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t-\tau)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = \varphi(\lambda, t),$$

$$\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2, \quad 0 \leq t < \infty, \quad \tau > 0, \quad \text{und } x(\lambda, t) = 0, \text{ wenn } t < 0,$$

erweitern kann, ja sogar man kann sie durch die Operatorenmethode ähnlich wie die Gleichung (1) lösen.

WŁOKA hat gezeigt, dass die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (6) von der Form

$$v = \sum_{i=-q}^{\infty} a_i(s) h^{\frac{\tau}{p} i}$$

sind, wobei $a_i(s)$ eine algebraische Funktion des Differentialoperators s (siehe [2]), und h der Verschiebungsoperator ist. Enthält diese Entwicklung von v eine Potenz von h mit einem negativen Exponenten, so ist sie kein Logarithmus, enthält sie keine, so ist sie ein Logarithmus, oder kein Logarithmus, je nachdem $a_0(s)$ ein Logarithmus ist, oder nicht. Betreffs weiterer Einzelheiten weisen wir auf die Arbeit [2] von WŁOKA hin, bemerken wir jedoch, dass bei der Auflösung von (6) die Anfangsbedingungen, analog den Bedingungen (4) in der allgemeinen Form

$$(7) \quad \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\mu, n-\kappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = g_{\kappa}^1(\lambda), \quad \kappa = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\mu, n_1-\kappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = g_{\kappa}^2(\lambda), \quad \kappa = 0, 1, \dots, n_1-1$$

vorgeschrieben werden müssen. WŁOKA hat zahlreiche numerische Beispiele ausgearbeitet, die sich jedoch ausnahmslos auf solche Gleichungen beziehen, für welche die allgemeinen Anfangsbedingungen (7) durch die einfacheren

$$(8) \quad \frac{\partial^{\kappa} x(\lambda, 0)}{\partial t^{\kappa}} = h_{\kappa}(\lambda), \quad \kappa = 0, 1, \dots, \max(n, n_1) - 1.$$

Cauchy'schen Bedingungen ersetzbar waren. Es entsteht die Frage, wann kann man im Falle der Differential-Differenzengleichungen vom Typ (6) die allgemeinen Bedingungen (7) durch die Cauchyschen Anfangsbedingungen (8) ersetzen, ja sogar es fragt sich, was bedeuteten eigentlich die Bedingungen (7), falls ein solches Ersetzen unmöglich sein sollte? Es ist nämlich offenbar, dass die Funktionen $g_{\alpha}^1(\lambda)$ und $g_{\alpha}^2(\lambda)$ im allgemeinen nicht voneinander unabhängig vorgeschrieben werden können (zum Beispiel so, dass die beiden Gleichungssysteme (7) einander widersprechen), doch ist es auch Tatsache, dass die Funktionen $g_{\alpha}^1(\lambda)$ im allgemeinen die Funktionen $g_{\alpha}^2(\lambda)$ nicht eindeutig bestimmen und umgekehrt. Im Weiteren werden wir folgende Definition nötig haben:

Definition. Unter dem Hauptteil von (6) verstehen wir die Gleichung

$$\sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = 0$$

(siehe WLOKA [2]), und unter dem retardierten Teil die Gleichung

$$\sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{n_1} \beta_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = 0.$$

Wir werden uns im Folgenden mit der Frage beschäftigen, was wir eigentlich unter der Lösung der Gleichung (6) mit den Anfangsbedingungen von der Form (7) verstehen. Wir werden definieren, wann (6) restriktiv ist und werden Sätze in Bezug darauf angeben, wann die Bedingungen (7) durch die Cauchyschen Anfangsbedingungen ersetzbar sind. Aus diesem Gesichtspunkt betrachtet haben nämlich die Funktionaldifferentialgleichungen Eigenschaften, die von den von (1) stark abweichen. Wir werden sehen, dass es vorkommen kann, dass sowohl der Hauptteil, als auch der retardierte Teil von (6) restriktiv sind und trotzdem die Anfangsbedingungen ihrer Lösung in der einfachen Cauchyschen Gestalt vorgeschrieben werden können. Oder, es kann auch vorkommen, dass wir Anfangsbedingungen, deren Anzahl $\min(n, n_1)$ ist, in der Cauchyschen Gestalt, die übrigen $\max(n, n_1) - \min(n, n_1)$ Anfangsbedingungen in der allgemeinen Gestalt vorschreiben müssen. Endlich werden wir unsere erhaltenen Resultate durch zwei Beispiele erläutern.

§ 1. Die Kriterien der Restriktivität der partiellen Differential-Differenzengleichungen

Definition. Die Differential-Differenzengleichung (6) ist nicht restriktiv, wenn sämtliche Anfangsbedingungen ihrer Lösungen in der Cauchyschen Gestalt

$$\frac{\partial^{\alpha} x(\lambda, 0)}{\partial t^{\alpha}} = h_{\alpha}(\lambda), \quad \alpha = 0, 1, \dots, \max(n, n_1) - 1$$

geschrieben werden können. Im entgegengesetzten Falle ist die Gleichung (6) restriktiv.

Satz 1. *Es sei $n \neq n_1$ und derjenige Teil von (6) der nach t von höherer Ordnung ist, sei nach Mikusiński nicht restriktiv.¹*

Dann ist (6) nicht restriktiv. Es sei $n = n_1$ und von den beiden Teilen (Hauptteil und retardierten Teil) sei wenigstens der eine nach Mikusiński nicht restriktiv. Dann ist (6) nicht restriktiv.

Beweis. Bei dem Beweise des ersten Teiles des Satzes können wir annehmen, dass $n > n_1$, da im Falle $n < n_1$ der Beweis vollkommen analog ist. Schreiben wir wieder die Beziehungen (7) auf.

$$\sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{\mu, n-\kappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = g_{\kappa}^1(\lambda), \quad \kappa = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_{\mu, n_1-\kappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = g_{\kappa}^2(\lambda), \quad \kappa = 0, 1, \dots, n_1-1.$$

Haben wir die Funktionen $g_{\kappa}^1(\lambda)$ vorgeschrieben, dann können wir die Funktionen $h_{\kappa}(\lambda)$ eindeutig bestimmen (siehe MIKUSIŃSKI [1]), und nachher aus diesen, durch Substitution auch die Funktionen $g_{\kappa}^2(\lambda)$. Umgekehrt, sind die Funktionen $h_{\kappa}(\lambda)$ gegeben, so sind diesen die Funktionen $g_{\kappa}^1(\lambda)$ und $g_{\kappa}^2(\lambda)$ eindeutig zugeordnet. Folglich sind das Vorschreiben der Funktionen $g_{\kappa}^1(\lambda)$ und das Vorschreiben der Funktionen $h_{\kappa}(\lambda)$ einander äquivalent und demzufolge können die Anfangsbedingungen tatsächlich in der einfacheren Cauchyschen Gestalt vorgeschrieben werden und die Gleichung (7) ist nicht restriktiv.

Wenn nun $n = n_1 \neq 0$ ist, so können wir die obige Überlegung gleichfalls anwenden. Ist der Hauptteil der Gleichung (6) nicht restriktiv, dann ist das Vorschreiben von $g_{\kappa}^1(\lambda)$, ist der retardierte Teil nicht restriktiv, so ist das Vorschreiben der Funktionen $g_{\kappa}^2(\lambda)$ äquivalent dem Vorschreiben der Funktionen $h_{\kappa}(\lambda)$. Damit ist der Satz 1. bewiesen.

Satz 2. *Es sei $n \neq n_1$ und derjenige Teil von (6), der nach t von höherer Ordnung ist, sei nach Mikusiński restriktiv, der Teil von niedrigerer Ordnung nach t sei nicht restriktiv. Dann ist die Gleichung (6) restriktiv, jedoch können die ersten $\min(n, n_1)$ Anfangsbedingungen (also für die Indices $\kappa = 0, 1, 2, \dots, \min(n, n_1)$) in der Cauchyschen Gestalt vorgeschrieben werden, vorausgesetzt, dass $\min(n, n_1) \neq 0$ ist.*

Beweis. Es ist hier wiederum genügend den Fall $n > n_1$ zu betrachten. Dann kann man, nachdem die Funktionen $g_{\kappa}^2(\lambda)$ vorgeschrieben worden sind, die Funktionen $h_{\kappa}(\lambda)$ für $\kappa = 0, 1, 2, \dots, n_1-1$ eindeutig bestimmen, nachher aus diesen durch Substitution auch die Funktionen $g_{\kappa}^1(\lambda)$ für die Indizes $0, 1, 2, \dots, n_1-1$. Folglich können n_1 Anfangsbedingungen tatsächlich in der Cauchyschen Gestalt

$$(9) \quad \frac{\partial^{\kappa} x(\lambda, 0)}{\partial t^{\kappa}} = h_{\kappa}(\lambda); \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, n_1-1$$

¹ Natürlich, können wir den Fall $\min(n, n_1) = 0$ nicht ausschliessen. Wir wollen uns in dem Wortgebrauch übereinkommen, dass wenn ein Teil von (6) kein Ableitung nach t enthält, wir diesen Teil als nicht restriktiv betrachten. Dann kommt natürlich von den Gleichungssystemen (7) nur das eine vor. Im Weiteren werden wir dies nicht immer besonders unterstreichen. Übrigens, natürlich, kann noch der Fall auch vorkommen, dass der eine Teil von (6) überhaupt keine Ableitungen enthält. Der erwähnte Wortgebrauch bezieht sich auch auf diesen Fall.

vorgeschrieben werden. Da der Hauptteil von (6) nach Mikusiński restriktiv ist, so müssen wir die übrigen Anfangsbedingungen in der allgemeinen Gestalt

$$(10) \quad \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^{\kappa} \alpha_{\mu, n-\kappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = g_{\kappa}^1(\lambda); \quad \kappa = n_1, n_1 + 1, \dots, n - 1$$

vorschreiben.

Offensichtlich stehen wir hier einem solchen Falle gegenüber, der bei der Untersuchung der Gleichungen von der Form (1) überhaupt nicht auftreten kann. Dort müssen wir nämlich sämtliche Anfangsbedingungen entweder in der Cauchyschen Gestalt, oder in der allgemeinen Gestalt vorschreiben, während wir bei dem eben untersuchten Typ der Differential-Differenzengleichungen Anfangsbedingungen von der Anzahl $\min(n, n_1)$ in der Cauchyschen Gestalt, doch die übrigen $\max(n, n_1) - \min(n, n_1)$ Anfangsbedingungen in der allgemeinen Gestalt angeben.

Bemerkung 1. Aus dem soeben bewiesenen Satze folgt einfach, dass im Falle $\min(n, n_1) = 0$ Anfangsbedingungen von der Cauchyschen Gestalt überhaupt nicht vorkommen können. (Siehe die Fussnote 1.)

Bemerkung 2. In dem Satze 2. kommt, vom Gesichtspunkt der Angabe der Anfangsbedingungen in der allgemeinen Gestalt betrachtet, von den beiden Gleichungssystemen (7) nur das eine in Betracht. Das heisst, hier tritt die Komplikation auf die wir schon in der Einleitung in bezug auf (7) hingewiesen haben, noch nicht auf.

Bisher haben wir uns auf diejenigen Fälle beschränkt, in welchen von den Haupt- bzw. retardierten Teil von (6) wenigstens der eine nicht restriktiv ist. Betrachten wir nun den Fall in welchem sowohl der Hauptteil, als auch der retardierte Teil von (6) nach Mikusiński restriktiv ist.

Satz 3. Es seien der Hauptteil und der retardierte Teil von (6) restriktiv. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für die Lösungen von (6) genau $\min(n, n_1)$ Anfangsbedingungen in der Cauchyschen Gestalt (d. h. die übrigen $\max(n, n_1) - \min(n, n_1)$ Anfangsbedingungen nur in der allgemeinen Gestalt) angebar seien, ist, dass die Polynome

$$P_{\alpha}(s) = \sum_{\mu=0}^m \alpha_{\mu n} s^{\mu}$$

$$P_{\beta}(s) = \sum_{\mu=0}^{m_1} \beta_{\mu n_1} s^{\mu}$$

keinen gemeinsamen Teiler besitzen (Zahlenteiler ausgenommen). Wenn $n \neq n_1$, so ist (6) restriktiv. Ist $n = n_1$ so ist (6) nur dann restriktiv, wenn P_{α} und P_{β} einen gemeinsamen Teiler haben.

Bevor wir diesen Satz beweisen, weisen wir darauf hin, dass die beiden Systeme von Differentialgleichungen

$$(11) \quad \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^{\kappa} \alpha_{\mu, n-\kappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = g_{\kappa}^1(\lambda) \\ \kappa = 0, 1, \dots, \min(n, n_1) - 1$$

$$(12) \quad \sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{\kappa} \beta_{\mu, n_1-\kappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = g_{\kappa}^2(\lambda)$$

nur dann höchstens eine gemeinsame Lösung $\frac{\partial^{\kappa} x(\lambda, 0)}{\partial t^{\kappa}} = h_{\kappa}(\lambda)$, $\kappa = 0, 1, \dots$, $\min(n, n_1) - 1$ besitzen können, wenn die zu (11) und (12) gehörigen entsprechenden homogenen Gleichungssysteme

$$(13) \quad \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^{\kappa} \alpha_{\mu, n-\kappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = 0$$

$$(14) \quad \sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{\nu=0}^{\kappa} \beta_{\mu, n_1-\kappa+\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t^{\nu}} = 0$$

keine von der trivialen Lösung verschiedene gemeinsame Lösung haben. Es genügt daher zu beweisen, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die beiden Systeme (13) und (14) ausser der trivialen keine gemeinsame Lösung besitzen sollen ist, dass die Polynome

$$P_{\alpha}(s) \quad \text{und} \quad P_{\beta}(s)$$

keinen gemeinsamen Teiler haben.

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend. Schreiben wir aus den Systemen (13) und (14) die $\kappa = 0$ entsprechenden Gleichungen auf

$$(15) \quad \sum_{\mu=0}^m \alpha_{\mu n} \frac{\partial^{\mu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu}} = 0; \quad \sum_{\mu=0}^{m_1} \beta_{\mu n_1} \frac{\partial^{\mu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu}} = 0.$$

Haben die Polynome $P_{\alpha}(s)$ und $P_{\beta}(s)$ keinen gemeinsamen Teiler, so besitzen die Fundamentalsysteme der Differentialgleichungen (15) kein gemeinsames Element, mithin können die Gleichungen (15) nur die triviale gemeinsame Lösung

$$(16) \quad [x(\lambda, 0)]_g = 0$$

besitzen.

Für $\kappa = 1$ erhalten wir aus (13) und (14):

$$(17) \quad \sum_{\mu=0}^m \alpha_{\mu, n-1} \frac{\partial^{\mu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu}} + \sum_{\mu=0}^m \alpha_{\mu n} \frac{\partial^{\mu+1} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t} = 0,$$

$$\sum_{\mu=0}^{m_1} \beta_{\mu, n_1-1} \frac{\partial^{\mu} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu}} + \sum_{\mu=0}^{m_1} \beta_{\mu n_1} \frac{\partial^{\mu+1} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^{\mu} \partial t} = 0.$$

Mit Hilfe der Gleichung (16) erhalten wir

$$\left[\frac{\partial x(\lambda, 0)}{\partial t} \right]_g = 0,$$

da, doch für (17) auch nur die identisch verschwindende, die einzig mögliche gemeinsame Lösung ist. Wenn wir diesen Gedankengang für wachsende Werte von x fortgesetzt anwenden, so erhalten wir, dass

$$(18) \quad \left[\frac{\partial^x x(\lambda, 0)}{\partial t^x} \right]_g = 0; \quad x = 0, 1, 2, \dots, \min(n, n_1) - 1.$$

Die angeführte Bedingung ist aber auch notwendig, denn, wenn die Polynome $P_\alpha(s)$ und $P_\beta(s)$ einen gemeinsamen Teiler besitzen, so existiert schon im Falle $x = 0$ eine von der trivialen verschiedene.

$$x(\lambda, 0) \neq 0$$

gemeinsame Lösung, d. h. jedenfalls, wenn $\min(n, n_1) \leq 1$ (wo also nur $x = 0$ möglich ist) die beiden homogenen Differentialgleichungssysteme haben nichttriviale gemeinsame Lösungen. Im speziellen Falle $n = n_1$ können sämtliche Anfangsbedingungen (falls $P_\alpha(s)$ und $P_\beta(s)$ keinen gemeinsamen Teiler haben) in der Cauchyschen Gestalt angegeben werden, mithin ist (6) nicht restriktiv.

Der Satz 3 gibt also ein einfaches Kriterium für das Feststellen der restriktiven, oder nichtrestriktiven Eigenschaft einer linearen partiellen Differential-Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten (siehe die unten angeführten Beispiele)!

Auf Grund unserer Untersuchungen ist also der allgemeinste Fall der in dem sowohl der Hauptteil als auch der retardierte Teil von (6) nach Mikusiński restriktiv sind, und die Polynome $P_\alpha(s)$ und $P_\beta(s)$ einen gemeinsamen Teiler besitzen. In diesem Falle müssen die Anfangsbedingungen in der allgemeinen Gestalt (7) angegeben werden. Untersuchen wir nun diese Frage ausführlicher. Schreiben wir wiederum die Bedingungen (7) auf:

$$(19) \quad \sum_{\mu=0}^m \sum_{v=0}^x \alpha_{\mu, n-x+v} \frac{\partial^{\mu+v} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^\mu \partial t^v} = g_x^1(\lambda), \quad x = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\sum_{\mu=0}^{m_1} \sum_{v=0}^x \beta_{\mu, n_1-x+v} \frac{\partial^{\mu+v} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^\mu \partial t^v} = g_x^2(\lambda), \quad x = 0, 1, \dots, n_1-1.$$

Die Anfangsbedingungen angeben heisst, dass die Funktionen $g_x^1(\lambda)$ und $g_x^2(\lambda)$ angegeben werden müssen. Diese können, natürlich, in Allgemeinen nicht unabhängig voneinander vorgeschrieben werden. Wir verfahren folgendermassen.

Von den beiden Gleichungssystemen (19) wählen wir dasjenige aus, welches mehr Unbekannte enthält (im Falle $n = n_1$ ist es gleichgültig welches wir auswählen). Es sei dies das System

$$(20) \quad \sum_{\mu=0}^m \sum_{v=0}^x \alpha_{\mu, n-x+v} \frac{\partial^{\mu+v} x(\lambda, 0)}{\partial \lambda^\mu \partial t^v} = g_x^1(\lambda); \quad x = 0, 1, \dots, n-1.$$

Die sich auf $\kappa = n_1, n_1 + 1, \dots, n-1$ beziehenden Anfangsbedingungen sind durch das Vorschreiben der entsprechenden $g_\kappa^1(\lambda)$ angegeben. Für die übrigen Werte von κ , d. h. $\kappa = 0, 1, \dots, n_1-1$ bestimmen wir bei den gegebenen entsprechenden $g_\kappa^1(\lambda)$ die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems, welches von (20) nur dadurch unterscheidet, dass in ihm κ von 0 bis n_1-1 läuft. Diese allgemeine Lösung substituieren wir in das zweite System (19). Auf diese Weise bekommen wir die Funktionen $g_\kappa^2(\lambda)$, welche natürlich noch willkürliche Konstanten enthalten können. Um die Eindeutigkeit der Lösungen von (6) zu sichern, müssen wir auch die Werte dieser Konstanten fixieren.

Auf Grund des Satzes 3 und unserer vorhergehenden Überlegungen können wir folgende Aussage machen.

Sind der Hauptteil und der retardierte Teil von (6) restriktiv und haben die Polynome $P_\alpha(s)$ und $P_\beta(s)$ einen gemeinsamen Teiler, so ist das Vorschreiben der Anfangsbedingungen für die Indizes $\kappa = 0, 1, \dots, \min(n, n_1)-1$ äquivalent dem Auflösen eines Systems von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Dies bedeutet eine wesentliche Komplikation verglichen mit der Lösung durch die Operatorenmethode derjenigen restriktiven partiellen Differentialgleichungen, welche gleichzeitig keine Differenzgleichungen sind ($\tau = 0$.)

§ 2. Einige weitere Operatoreigenschaften der linearen partiellen Differential-Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten

In diesem Paragraphen wollen wir uns mit einigen weiteren interessanten Operatoreigenschaften der linearen partiellen Differential-Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschäftigen. Wir werden hierzu folgende Theoreme von MIKUSIŃSKI [1] und WLOKA [2] nötig haben:

- a) *Eine reine Differentialgleichung (1) ist niemals restriktiv.*
- b) *Es sei $m \geq m_1$. Dann ist (6) logarithmisch, gemischt, oder rein, wenn ihr Hauptteil entsprechend diese Eigenschaft besitzt.*
- c) *Es sei $m \geq m_1$ und $n = 0$. Dann ist (6) immer logarithmisch.*
- d) *Es sei $m_1 > m$. Dann ist (6) niemals logarithmisch.*

Im Falle der Differential-Differenzgleichungen ist a) nicht mehr gültig.

Wir beweisen folgende Sätze.

Satz 4. *Der Hauptteil von (6) sei nicht identisch Null. Ist $m = 0$, so ist (6) immer rein.*

Satz 5. *Es sei $m_1 > m$ und der Hauptteil von (6) sei restriktiv. Dann ist (6) immer gemischt.*

Satz 6. *Eine reine Differential-Differenzgleichung (6) kann restriktiv sein. Ist sie restriktiv und ist $m \geq m_1$, so ist $n_1 > n > 0$, jedoch die Anfangsbedingungen*

$$\frac{\partial^\kappa x(\lambda, 0)}{\partial t^\kappa} = h_\kappa(\lambda); \quad x = 0, 1, \dots, n-1$$

können immer in der Cauchyschen Gestalt geschrieben werden. Ist sie restriktiv und $m_1 > m$, so ist $n_1 > n$.

Beweis des Satzes 4. Bei dem Beweise der Behauptung d) ($m_1 > m$) zeigt Wloka, dass wenigstens eine Wurzel der charakteristischen Gleichung von (6) kein Logarithmus ist, da diese in ihrer Entwicklung Potenzen von h mit nega-

tiven Exponenten enthält. Noch allgemeiner, es besteht die Tatsache, dass die charakteristische Gleichung von (6) genau $m_1 - m$ solche Wurzeln besitzt, in deren Reihendarstellung

$$v = \sum_{i=-q}^{\infty} a_i(s) h^{\frac{\tau}{p} i}.$$

Potenzen von h mit einem negativen Exponenten vorkommen. Die charakteristische Gleichung von (6) besitzt nämlich m solche Wurzeln deren Reihenentwicklung keine Potenzen von h mit einem negativen Exponenten enthält, das heisst Wurzeln, die in der Gestalt

$$v = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(s) h^{\frac{\tau}{p} i}$$

darstellbar sind, da die Operatoren $a_0(s)$ eben die Wurzeln der charakteristischen Gleichung m -ten Grades des Hauptteils von (6) sind. Die charakteristische Gleichung von (6) ist vom m_1 -sten Grade, d. h. sie hat m_1 Wurzeln.

Folglich müssen unter diesen $m_1 - m$ solche vorhanden sein, deren Reihenentwicklungen Potenzen von h mit einem negativen Exponenten enthalten. Es sei $m = 0$ und der Hauptteil von (6) sei nicht identisch gleich Null.² Dann können wir auf Grund unserer Überlegungen behaupten, dass die Reihenentwicklungen sämtlicher m_1 Wurzeln Potenzen von h mit einem negativen Exponenten enthalten, mithin sind sie keine Logarithmen. Dies bedeutet zugleich, dass (6) eine reine Gleichung ist.

Beweis des Satzes 5. Laut d) kann die Gleichung (6) nicht logarithmisch sein, mithin braucht nur gezeigt zu werden, dass sie auch nicht rein sein kann. In der Tat, da der Hauptteil restriktiv ist, so ist $m > 0$. Folglich können auf Grund der im Beweise des Satzes 4 angeführten Tatsachen gewisse Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (6) von der Anzahl $m > 0$ in der Gestalt

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i(s) h^{\frac{\tau}{p} i}$$

aufgeschrieben werden. Die Operatoren $a_0(s)$ sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung des Hauptteils von (6); auf Grund von a) ist wenigstens eine von ihnen ein Logarithmus. Jedoch $m_1 - m$ von den Wurzeln der charakteristischen Gleichung von (6) sind gewiss keine Logarithmen, folglich ist die Gleichung (6) in diesem Falle gemischt.

Beweis des Satzes 6. Es sei zunächst $m \geq m_1$. Betrachten wir eine reine Gleichung (6). Aus a), b) und c) folgt, dass ihr Hauptteil nicht restriktiv sein kann und, dass $n > 0$. Haben wir nun (6) so gewählt, dass ihr retardierter Teil nach MIKUSIŃSKI restriktiv ist, dann ist (6) laut der Sätze 1 und 2 zugleich auch restriktiv, vorausgesetzt, dass $n_1 > n$ und die n ersten Anfangsbedingungen

$$\frac{\partial^x x(\lambda, 0)}{\partial t^x} = h^x(\lambda); \quad x = 0, 1, \dots, n - 1$$

können tatsächlich in der Cauchyschen Gestalt vorgeschrieben werden.

² In diesem Falle können wir, natürlich, nicht von einer charakteristischen Gleichung des Hauptteiles von (6) sprechen.

Betrachten wir nun den Fall $m_1 > m$. Wählen wir (6) so aus, dass $m = 0$ und der retardierte Teil nach Mikusiński restriktiv sei. Dann ist die Gleichung (6) auf Grund des Satzes 4 rein und laut der Sätze 1 und 2 auch restriktiv, vorausgesetzt, dass $n_1 > n$.

Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass im Falle $n_1 \leq n$ die reine Gleichung nicht restriktiv sein kann. In der Tat, ist $n_1 \leq n$, so kann die Gleichung (6) nur dann restriktiv sein, wenn ihr Hauptteil restriktiv ist (s. die Sätze 1. und 2.). Dann kann aber auf Grund des Satzes 5 die Gleichung (6) nicht rein sein, da sie doch gewiss gemischt ist, w. z. b. w.

Endlich weisen wir darauf hin, dass WŁOKA [3] bewiesen hat, dass man die Mikusinsische algebraische Theorie der Differentialgleichungen auch auf die Gleichungen von der Gestalt

$$\sum_{k=0}^d \sum_{\mu=0}^{m_k} \sum_{\nu=0}^{n_k} a_{\mu\nu}^k \frac{\partial^{\mu+\nu} x(\lambda, t - \tau_k)}{\partial \lambda^\mu \partial t^\nu} = \varphi(\lambda, t), \quad \tau_0 = 0$$

erweitern kann. Die in den Paragraphen 1. und 2. mitgeteilten Sätze können auch für solche Gleichungen verallgemeinert werden. Im gegenwärtigen Artikel wollen wir auf diese Frage nicht eingehen.

§ 3. Beispiele

Wir wollen eine Lösung der Gleichung

$$(21) \quad \frac{\partial^3 x(\lambda, t)}{\partial t^2 \partial \lambda} + \frac{\partial^2 x(\lambda, t)}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 x(\lambda, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 x(\lambda, t - \pi)}{\partial t^2 \partial \lambda} = \begin{cases} \sin t e^\lambda, & \text{für } 0 \leq t \leq \pi, \\ 0, & \text{für } t > \pi \end{cases}$$

finden. Offensichtlich sind sowohl der Hauptteil als auch der retardierte Teil von (21) nach Mikusiński restriktiv. Laut des Satzes 3 müssen wir die Polynome $P_\alpha(s)$ und $P_\beta(s)$ bilden.

$$(22) \quad P_\alpha(s) = s - 1, \quad P_\beta(s) = -s.$$

Diese Polynome haben keinen gemeinsamen Teiler, weiterhin können die Anfangsbedingungen in der Cauchyschen Gestalt vorgeschrieben werden, da in unserem Falle $n = n_1$, weswegen die Gleichung (21) nicht restriktiv ist.

Die Anfangsbedingungen seien:

$$(23) \quad x(\lambda, 0) = 0, \quad \frac{\partial x(\lambda, 0)}{\partial t} = e^\lambda.$$

Von den Randbedingungen werden wir später sprechen. Schreiben wir die Gleichung (21) in der Operatorenform auf, doch beachten wir dabei die Anfangsbedingungen (23):

$$(24) \quad x''(\lambda) + s^2(1 - h^\pi) x'(\lambda) - s^2 x(\lambda) = e^\lambda \frac{1 - h^\pi s^2}{1 + s^2}.$$

Bestimmen wir zunächst eine partikuläre Lösung von (24). Versuchen wir (24) durch den Ansatz

$$(25) \quad x_0(\lambda) = A e^\lambda$$

zu lösen, wo in dieser Operatorfunktion A ein konstanter Operator ist.

Durch die Substitution von (25) in (24) ergibt sich

$$A = \frac{1}{1 + s^2}$$

und daher

$$x_0(\lambda) = \frac{1}{1 + s^2} e^\lambda.$$

Um die allgemeine Lösung von (24) zu finden schreiben wir ihre charakteristische Gleichung auf

$$v^2 + s^2(1 - h^\pi) v - s^2 = 0.$$

Sie ist einfach zu lösen; ihre Lösung ist:

$$(26) \quad v_{1,2} = \frac{s^2(h^\pi - 1)}{2} \pm \frac{s^2(h^\pi - 1)}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{s^2(h^\pi - 1)^2}}.$$

Wir müssen entscheiden, ob die Wurzeln (26) Logarithmen sind, oder sind sie keine. Zu diesem Zwecke müssen wir diesen Ausdruck umformen. Ziehen wir in Betracht, dass

$$(27) \quad \frac{4}{s^2(1 - h^\pi)^2} = \frac{4}{s^2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) h^{k\pi} = f \in C,$$

(s. MIKUSIŃSKI [1], S. 149), das heisst, das der Operator (27) im Intervalle $0 \leq t < \infty$ eine stetige Funktion ist. Dann folgt

$$(28) \quad \sqrt{1 + \frac{4}{s^2(h^\pi - 1)^2}} = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{4}{s^2}\right)^v \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) h^{k\pi}\right)^v = 1 + g, \quad g \in C.$$

(s. MIKUSIŃSKI [1], S. 157.).

Folglich können die Wurzeln (26) in der Form

$$(29) \quad \begin{aligned} v_1 &= s^2 h^\pi - s^2 + \frac{s^2(h^\pi - 1)}{2} g, \\ v_2 &= \frac{s^2(1 - h^\pi)}{2} g \end{aligned}$$

geschrieben werden. Aus (28) ergibt sich sofort, dass v_2 ein Logarithmus ist. v_1 ist jedoch kein Logarithmus, da $-s^2$ kein Logarithmus ist. Die allgemeine Lösung von (24) ist

$$(30) \quad x(\lambda) = \frac{e^\lambda}{1 + s^2} + C_1 \exp \left[\frac{s^2(1 - h^\pi)}{2} g \lambda \right].$$

Um die Konstante C_1 zu fixieren, müssen wir eine Randbedingung angeben, diese sei

$$x(0, t) = \sin t,$$

oder

$$x(0) = \frac{1}{1 + s^2}.$$

Aus (30) folgt dann:

$$x(0) = \frac{1}{1 + s^2} + C_1 = \frac{1}{1 + s^2},$$

das heisst,

$$C_1 = 0,$$

und

$$x(\lambda, t) = e^\lambda \sin t.$$

Als zweites Beispiel wollen wir die Gleichung

$$(31) \quad \frac{\partial^2 x(\lambda, t)}{\partial \lambda \partial t} + \frac{\partial^2 x(\lambda, t - \pi)}{\partial \lambda \partial t} = \begin{cases} -\sin t \operatorname{sh} \lambda, & \text{für } 0 \leq t \leq \pi, \\ 0 & \text{für } t > \pi \end{cases}$$

aufösen.

Sowohl der Hauptteil, als auch der retardierte Teil sind nach MIKUSIŃSKI restriktiv. Laut des Satzes 3 müssen die Polynome $P_\alpha(s)$ und $P_\beta(s)$ gebildet werden. Wir erhalten:

$$P_\alpha(s) = P_\beta(s) = s,$$

mithin haben die beiden Polynome einen gemeinsamen Teiler und deswegen müssen die Anfangsbedingungen der Aufgabe (31) in der allgemeinen Gestalt angegeben werden.

Die Operatorenform von (31) ist

$$(32) \quad s x'(\lambda) + h^\pi s x'(\lambda) = -\frac{1 + h^\pi}{1 + s^2} \operatorname{sh} \lambda + \frac{\partial x(\lambda, 0)}{\partial \lambda} + h^\pi \frac{\partial x(\lambda, 0)}{\partial \lambda}.$$

Als Anfangsbedingung schreiben wir

$$\frac{\partial x(\lambda, 0)}{\partial \lambda} = \operatorname{sh} \lambda,$$

und als Randbedingung

$$x(0, t) = \cos t$$

vor.

Aus (32) unter Beachtung der Anfangsbedingung erhalten wir

$$(33) \quad x'(\lambda) + h^\pi x'(\lambda) = \operatorname{sh} \lambda \frac{s(1 + h^\pi)}{1 + s^2}.$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$x_0(\lambda) = \frac{s}{1 + s^2} \operatorname{ch} \lambda.$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$v + h^x v = 0,$$

woraus $v = 0$ folgt. Sie ist ein Logarithmus. Die allgemeine Lösung von (33) ist

$$x(\lambda) = \frac{s}{1 + s^2} \operatorname{ch} \lambda + C.$$

Unter Benutzung der Randbedingung erhalten wir:

$$x(0) = \frac{s}{1 + s^2} + C = \frac{s}{1 + s^2},$$

das heisst

$$C = 0$$

und

$$x(\lambda, t) = \cos t \operatorname{ch} \lambda.$$

(Eingegangen: 2 August, 1962.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] MIKUSIŃSKI, J.: *Operatorenrechnung*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.
- [2] WŁOKA, J.: "Über die Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten." *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **202** (1959) Heft 1/2, 107—128.
- [3] WŁOKA, J.: "Über die Anwendung der Operatorenrechnung auf partielle Differential-Differenzengleichungen mit mehreren Differenzen." *Archiv der Mathematik* **11** (1960) 23—28.

О РЕСТРИКТИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ И В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т. FÉNYES

Резюме

Автор исследует проблему рестриктивного свойства линейных уравнений с постоянными коэффициентами являющихся одновременно уравнениями в конечных разностях и в частных производных, что имеет большое значение для решения таких уравнений при помощи операторного исчисления Микусинского. Он дает критерии, на основании которых можно и в частных производных (6) рестриктивным или нет и иллюстрирует полученный результат на простых примерах. Автор приводит несколько дальнейших теорем, относящихся к некоторым другим операторным свойствами уравнения (6). Они тесно связаны со статьей Влока [2].



ON THE GENERAL NOTION OF MAXIMAL CORRELATION

by

PÉTER CSÁKI and JÁNOS FISCHER

Introduction

In their recent papers [3], [4] the authors discussed some properties of the maximal correlation of two random variables as introduced by H. GEBELEIN [5]. The natural idea of the straightforward generalization of this measure of connection for random vectors, for stochastic processes and even for σ -algebras has been already realized in [8] and [9]. The present paper aims at adding some further properties to those described in the alluded works.

In § 1 a notion involving the maximal correlation is considered in the general Hilbert space. § 2 deals with topological and metrical problems. § 3 is to show how the maximal correlation may be defined in the non-commutative probability theory developed in [11]. § 4 is about some properties of the maximal correlation between σ -algebras. In § 5 the intuitive background of the postulates given in § 1 is revealed. Finally, § 6 contains some particular cases and examples.

§ 1. General notions

To commence with, the notions and facts from the Hilbert space theory needed and the symbols used in this paper are explained.

1.1. Let H_1 and H_2 be two real Hilbert spaces with scalar products $(x_1, x_2)_1$ ($x_1 \in H_1, x_2 \in H_1$) and $(y_1, y_2)_2$ ($y_1 \in H_2, y_2 \in H_2$), the respective norms denoted by $\|x\|_1$ ($x \in H_1$) and $\|y\|_2$ ($y \in H_2$).

Let T be a linear bounded operator whose domain is the space H_1 and which takes on its values in the space H_2 . It is known that there exists a uniquely determined linear bounded operator T^* whose domain is the space H_2 and it takes on its values in the space H_1 , furthermore

$$(1.1) \quad (Tx, y)_2 = (x, T^*y)_1$$

holds for all $x \in H_1$ and $y \in H_2$. The operator T^* will be called the adjoint of the operator T . The equality $\|T\| = \|T^*\|$ is valid.

The real number λ is called an eigenvalue of the pair of operators T, T^* and the pair of elements $x \in H_1, y \in H_2$ is said to be a pair of eigenelements (of T, T^*) belonging to λ if

$$(1.2) \quad \begin{aligned} Tx &= \lambda y \\ T^*y &= \lambda x \end{aligned}$$

excluding the case when both x and y are equal to the zero element.

As it is known, the operator T being completely continuous, the members of the pairs of eigenelements form complete orthogonal systems in the respective spaces and $\|T\|$ is the greatest eigenvalue.

The square root of the quantity

$$(1.3) \quad \|T\|^2 = \|T^*\|^2 = \sum_{i,k} (Tx_i, y_k)_2$$

is called the double norm of the operators T and T^* , where $\{x_i\}$ and $\{y_k\}$ are complete orthonormal systems in the spaces H_1 and H_2 , respectively. It is known that $\{\lambda_i\}$ being the sequence of eigenvalues —

$$(1.4) \quad \|T\|^2 = \sum_i \lambda_i^2$$

is equivalent to the statement that the members of pairs of eigenelements furnish complete orthogonal systems in the respective spaces. If even $\|T\| < \infty$ then the operator T is completely continuous.

1.2. Henceforth, let us treat the Hilbert spaces as subspaces of the same given H in which the scalar product will be denoted by (x, y) and the norm by $\|x\|$. Let \mathcal{H} denote the set of all subspaces of H except the subspace containing the single element zero. Let P_{H_0} denote the operator of the orthogonal projection on the subspace $H_0 \in \mathcal{H}$ i.e. the linear bounded operator, which has the following properties:

1. Having $x \in H$,

$$(1.5) \quad (x, y) = (x_0, y)$$

for some $x_0 \in H_0$ and for all $y \in H_0$ if and only if $x_0 = P_{H_0}x$.

2. Having $x \in H$,

$$(1.6) \quad \min_{y \in H_0} \|x - y\| = \|x - x_0\|$$

for some $x_0 \in H_0$ if and only if $x_0 = P_{H_0}x$.

Further, it is known that $P_{H_0}^2 = P_{H_0}^* = P_{H_0}$.

As to the relative position of two subspaces $H_1 \in \mathcal{H}$ and $H_2 \in \mathcal{H}$ the quantity

$$(1.7) \quad \delta(H_1, H_2) = \inf_{\substack{x \in H_1 \\ \|x\|=1}} \|x - P_{H_2}x\|$$

may be esteemed characteristic, though this quantity does not represent a distance in the metrical sense as this will be shown in § 2. However, the basis of the postulates given in Section 1.3 will be the quantity (1.7) because certain intuitive meaning can be attributed to it for the probability theory in some particular cases (see § 5.).

Now, some simple properties of the quantity (1.7) are listed.

Theorem 1.1. For any subspaces $H_1 \in \mathcal{H}$ and $H_2 \in \mathcal{H}$

$$1^\circ \quad 0 \leq \delta(H_1, H_2) \leq 1;$$

$$2^\circ \quad \delta(H_1, H_2) = \delta(H_2, H_1);$$

3° $\delta(H_1, H_2) = 0$ if $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{H}$;

4° $\delta(H_1, H_2) = 1$ if and only if H_1 and H_2 are orthogonal;

5° $\delta(H_1, H_2) \geq \delta(H'_1, H'_2)$ if $H_1 \subset H'_1$ and $H_2 \subset H'_2$.

Proof. The statement 1° follows from the inequalities

$$0 \leq \|x - P_{H_2} x\|^2 = 1 - \|P_{H_2} x\|^2 \leq 1 \quad \|x\| = 1.$$

For the proof of 2°, let $x \in H_1$, $\|x\| = 1$ be arbitrary. If $P_{H_2} x = 0$ then $\|x - P_{H_2} x\| = 1 \geq \delta(H_2, H_1)$; on the other hand, if $P_{H_2} x \neq 0$ then

$$\begin{aligned} \|x - P_{H_2} x\|^2 &= 1 - \|P_{H_2} x\|^2 = 1 - \frac{(P_{H_2} x, P_{H_2} x)^2}{\|P_{H_2} x\|^2} = 1 - \frac{(P_{H_1} P_{H_2} x, P_{H_2} x)^2}{\|P_{H_2} x\|^2} \geq \\ &\geq 1 - \frac{\|P_{H_1} P_{H_2} x\|^2}{\|P_{H_2} x\|^2} = 1 - \|P_{H_1} y\|^2 = \|y - P_{H_1} y\|^2 \geq \delta^2(H_2, H_1), \end{aligned}$$

where $y = \frac{P_{H_2} x}{\|P_{H_2} x\|}$. Therefore $\delta(H_1, H_2) \geq \delta(H_2, H_1)$. The converse inequality may be verified analogously, thus 2° is proved.

If $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{H}$ there exists $x_0 \in H_1 \cap H_2$ such that $\|x_0\| = 1$ for which $P_{H_2} x_0 = x_0$, hence $\|x_0 - P_{H_2} x_0\| = 0$ and this proves 3°.

If H_1 and H_2 are orthogonal then $\|P_{H_2} x\|^2 = (x, P_{H_2} x) = 0$ holds, i.e. $\|x - P_{H_2} x\| = 1$ for all $x \in H_1$, $\|x\| = 1$, thus $\delta(H_1, H_2) = 1$. Conversely, if $\delta(H_1, H_2) = 1$ then $\|P_{H_2} x\|^2 = 1 - \|x - P_{H_2} x\|^2 = 0$ for all $x \in H_1$, $\|x\| = 1$, i.e. $(x, y) = (P_{H_2} x, y) = 0$ for all $x \in H_1$, $y \in H_2$ — thus 4° is proved.

Finally, if $H_2 \subset H'_2$ then $P_{H_2} = P_{H_2} P_{H'_2}$, hence if even $H_1 \subset H'_1$

$$\begin{aligned} \delta^2(H_1, H_2) &\geq \inf_{\substack{x \in H'_1 \\ \|x\|=1}} \|x - P_{H_2} x\|^2 = \inf_{\substack{x \in H'_1 \\ \|x\|=1}} \{1 - \|P_{H_2} P_{H'_2} x\|^2\} \geq \\ &\geq \inf_{\substack{x \in H'_1 \\ \|x\|=1}} \{1 - \|P_{H'_2} x\|^2\} = \inf_{\substack{x \in H'_1 \\ \|x\|=1}} \|x - P_{H'_2} x\|^2 = \delta^2(H'_1, H'_2), \end{aligned}$$

thus all the statements of the theorem are proved.

1.3. In order to characterize the "similarity of position" of subspaces let a real number $\alpha(H_1, H_2)$ correspond to every pair of subspaces $H_1 \in \mathcal{H}$, $H_2 \in \mathcal{H}$ such that the following Postulates are fulfilled:

1. $\alpha(H_1, H_2) \geq \alpha(H'_1, H'_2)$ if and only if $\delta(H_1, H_2) \leq \delta(H'_1, H'_2)$.
2. $\alpha(H_1, H_2) = 0$ if the subspaces H_1 and H_2 are orthogonal.
3. $\alpha(H_1, H_2) = 1$ if $\delta(H_1, H_2) = 0$.

Evidently, these Postulates are satisfied by an α if and only if it is a strictly decreasing function of δ , taking on the value 1 at the point 0 and the value 0 at the point 1. However, the choice of such a function of δ is equivalent to the choice of the scale measuring the relative position of subspaces. Therefore α is uniquely determined but scaling. It is advantageous to choose the scale such that $\alpha(H_1, H_2) = \mathbf{S}(H_1, H_2)$, where

$$(1.8) \quad \mathbf{S}(H_1, H_2) = \sqrt{1 - \delta^2(H_1, H_2)}.$$

Theorem 1.1. may be written by the aid of $\mathbf{S}(H_1, H_2)$ in the following form:

Theorem 1.1'. For any pair of subspaces $H_1 \in \mathcal{H}$ and $H_2 \in \mathcal{H}$

$$1^\circ \quad 0 \leq \mathbf{S}(H_1, H_2) \leq 1;$$

$$2^\circ \quad \mathbf{S}(H_1, H_2) = \mathbf{S}(H_2, H_1);$$

$$3^\circ \quad \mathbf{S}(H_1, H_2) = 1 \text{ if } H_1 \cap H_2 \in \mathcal{H};$$

$$4^\circ \quad \mathbf{S}(H_1, H_2) = 0 \text{ if and only if } H_1 \text{ and } H_2 \text{ are orthogonal};$$

$$5^\circ \quad \mathbf{S}(H_1, H_2) \leq \mathbf{S}(H'_1, H'_2) \text{ if } H_1 \subset H'_1 \text{ and } H_2 \subset H'_2.$$

Theorem 1.2.

$$(1.9) \quad \mathbf{S}(H_1, H_2) = \sup_{\substack{x \in H_1, \|x\|=1 \\ y \in H_2, \|y\|=1}} (x, y).$$

Proof. If $x \in H_1$, $\|x\| = 1$ and $y \in H_2$, $\|y\| = 1$ then

$$(1.10) \quad (x, y) = (\mathbf{P}_{H_2} x, y) \leq \|\mathbf{P}_{H_2} x\| = \sqrt{1 - \|x - \mathbf{P}_{H_2} x\|^2} \leq \\ \leq \sqrt{1 - \delta^2(H_1, H_2)} = \mathbf{S}(H_1, H_2).$$

In the case of $\mathbf{S}(H_1, H_2) = 0$ the statement follows from inequality (1.10). If $\mathbf{S}(H_1, H_2) > 0$, let the sequence of $x_n \in H_1$ be such that $\|x_n\| = 1$ and $\|x_n - \mathbf{P}_{H_2} x_n\| \rightarrow \delta(H_1, H_2)$ i.e. $\|\mathbf{P}_{H_2} x_n\| \rightarrow \mathbf{S}(H_1, H_2)$; hence the sequence $\{x_n\}$ may be chosen so that $\mathbf{P}_{H_2} x_n \neq 0$. Choosing $y_n = \frac{\mathbf{P}_{H_2} x_n}{\|\mathbf{P}_{H_2} x_n\|}$,

$$(x_n, y_n) = \frac{(x_n, \mathbf{P}_{H_2} x_n)}{\|\mathbf{P}_{H_2} x_n\|} = \|\mathbf{P}_{H_2} x_n\| \rightarrow \mathbf{S}(H_1, H_2)$$

from which the statement follows.

1.4. Let $\mathbf{P}_{H_2}^{H_1}$ denote the restriction of the operator \mathbf{P}_{H_2} to the subspace H_1 , i.e. the domain of $\mathbf{P}_{H_2}^{H_1}$ is equal to the subspace H_1 and $\mathbf{P}_{H_2}^{H_1} x = \mathbf{P}_{H_2} x$ if $x \in H_1$.

Theorem 1.3.

$$(1.11) \quad (\mathbf{P}_{H_2}^{H_1})^* = \mathbf{P}_{H_1}^{H_2}$$

Proof. If $x \in H_1$ and $y \in H_2$, then

$$(\mathbf{P}_{H_2}^{H_1} x, y) = (\mathbf{P}_{H_2} x, y) = (x, y) = (x, \mathbf{P}_{H_1} y) = (x, \mathbf{P}_{H_1}^{H_2} y).$$

Theorem 1.4.

$$(1.12) \quad \mathbf{S}(H_1, H_2) = \|\mathbf{P}_{H_2}^{H_1}\| = \|\mathbf{P}_{H_1}^{H_2}\|.$$

Proof.

$$\|\mathbf{P}_{H_2}^{H_1}\| = \sup_{\substack{x \in H_1 \\ \|x\|=1}} \|\mathbf{P}_{H_2}^{H_1} x\| = \sup_{\substack{x \in H_1 \\ \|x\|=1}} \sqrt{1 - \|x - \mathbf{P}_{H_2} x\|^2} = \mathbf{S}(H_1, H_2).$$

The following theorem specifies the cases for which the supremum is attainable in (1.9).

Theorem 1.5.

$$(1.13) \quad \mathbf{S}(H_1, H_2) = (x_0, y_0) \quad x_0 \in H_1, \|x_0\| = 1; y_0 \in H_2, \|y_0\| = 1$$

if and only if x_0, y_0 form a pair of eigenelements — belonging to the eigenvalue $S = \mathbf{S}(H_1, H_2)$ — of the pair of operators $\mathbf{P}_{H_2}^{H_1}, \mathbf{P}_{H_1}^{H_2}$.

Proof. If (1.13) holds then for any $y \in H_2$

$$\begin{aligned} \|x_0 - y\|^2 &= 1 - 2(x_0, y) + \|y\|^2 \geq 1 - 2S\|y\| + \|y\|^2 = \\ &= 1 - S^2 + (S - \|y\|)^2 \geq 1 - S^2 = \|x_0 - Sy_0\|^2, \end{aligned}$$

wherefrom owing to (1.5)

$$\mathbf{P}_{H_2}^{H_1} x_0 = Sy_0$$

and similarly

$$\mathbf{P}_{H_1}^{H_2} y_0 = Sx_0.$$

Conversely, if x_0, y_0 form a pair of normed eigenelements,

$$(x_0, y_0) = (\mathbf{P}_{H_2}^{H_1} x_0, y_0) = (Sy_0, y_0) = \mathbf{S}(H_1, H_2),$$

with which the statement is proved.

Theorem 1.6.

$$\sup_{\|x\|=1} \{ \|\mathbf{P}_{H_1} x\| \|\mathbf{P}_{H_2} x\| - \|x - \mathbf{P}_{H_1} x\| \|x - \mathbf{P}_{H_2} x\| \} = \mathbf{S}(H_1, H_2).$$

Proof.

$$(1.14) \quad \|\mathbf{P}_{H_1} x\| \|\mathbf{P}_{H_2} x\| - \|x - \mathbf{P}_{H_1} x\| \|x - \mathbf{P}_{H_2} x\| \leq \mathbf{S}(H_1, H_2),$$

for all $x \in H, \|x\| = 1$

holds as proved by H. P. KRAMER [9]. Let $x_n \in H_2, \|x_n\| = 1$ ($n = 1, 2, \dots$) be chosen for x in (1.14) such that $\|\mathbf{P}_{H_1} x_n\| \rightarrow \mathbf{S}(H_1, H_2)$; then the left side of (1.14) converges to $\mathbf{S}(H_1, H_2)$, wherefrom the statement follows.

Now, let H_1 and H_2 be two separable subspaces of H and $\{x_i\}, \{y_k\}$ be respective complete orthonormal systems. Introduce the quantity

$$(1.15) \quad \mathbf{C}(H_1, H_2) = \left[\sum_{i,k} (x_i, y_k)^2 \right]^{1/2}.$$

Theorem 1.7.

$$(1.16) \quad \mathbf{C}(H_1, H_2) = \|\mathbf{P}_{H_2}^{H_1}\| = \|\mathbf{P}_{H_1}^{H_2}\|.$$

Proof. From the definitions (1.3) and (1.15)

$$\|\mathbf{P}_{H_2}^{H_1}\|^2 = \sum_{i,k} (\mathbf{P}_{H_2}^{H_1} x_i, y_k)^2 = \sum_{i,k} (x_i, y_k)^2,$$

$\{x_i\}$ and $\{y_k\}$ being complete orthonormal systems in H_1 and H_2 , respectively.

§ 2. Topological problems

As mentioned in § 1, $\delta(H_1, H_2)$ defined by (1.6) represents no distance in the set \mathcal{H} . The existence of a non-vanishing function of δ defining a distance on \mathcal{H} was first inquired in [9]. Theorem 2.1 which will be formulated in general form, excludes even the existence of a non-vanishing function of δ the

neighbourhoods generated by which would form a basis of a topology. (The definition of topological space and related axioms of bases see e.g. [7] pp. 34—35.)

Theorem 2.1. *Let X be an arbitrary set. Let us suppose that for the function $\varphi(x, y)$ of two variables defined on X and for any $x \in X$ and $y \in X$ there exists a $z \in X$ such that*

$$(2.1) \quad \varphi(x, z) = \varphi(z, y) = \varphi(z, z).$$

If f is a non-negative function defined on the range of φ such that the subsets

$$V(x, \varepsilon) = \{y : \gamma(x, y) < \varepsilon\} \quad \varepsilon > 0$$

(the neighbourhood of x with radius ε generated by γ) satisfy the axioms of bases where

$$\gamma(x, y) = f(\varphi(x, y)), \quad x \in X, y \in X$$

then

$$\gamma(x, y) \equiv 0.$$

Proof. Let $x \in X, y \in X$. In consequence of the condition on φ , there exists a $z \in X$ satisfying (2.1), wherefrom $\gamma(x, z) = \gamma(z, y) = \gamma(z, z)$ follows. According to the first axiom of bases $z \in V(z, \varepsilon)$ for all $\varepsilon > 0$, that is $\gamma(z, z) < \varepsilon$ for all $\varepsilon > 0$, i.e. $\gamma(x, z) = \gamma(z, y) = \gamma(z, z) = 0$, therefore

$$(2.2) \quad z \in V(x, \varepsilon') \quad \text{for all } \varepsilon' > 0,$$

$$(2.3) \quad y \in V(z, \varepsilon'') \quad \text{for all } \varepsilon'' > 0.$$

According to the third axiom of bases for any $\varepsilon > 0$ there exists $\varepsilon' > 0$ such that for any point of $V(x, \varepsilon')$ and thus by (2.2) for z , there exists $\varepsilon'' > 0$ such that $V(z, \varepsilon'') \subset V(x, \varepsilon)$. From this and (2.3), $y \in V(x, \varepsilon)$, that is $\gamma(x, y) < \varepsilon$ for all $\varepsilon > 0$ is valid, hence $\gamma(x, y) = 0$ for all $x \in X$ and $y \in X$.

From this Theorem it is evident, no non-vanishing function of φ with property (2.1) may generate a quasi-distance.

Corollary. *There is no non-vanishing function of the quantity defined by (1.7) to generate a topology in \mathcal{H} .*

Proof. For any $H_1 \in \mathcal{H}$ and $H_2 \in \mathcal{H}$

$$\delta(H_1, H) = \delta(H, H_2) = \delta(H, H) = 0.$$

Hence δ satisfies the condition of Theorem 2.1, thus the statement holds.

§ 3. Remarks on the case of non-commutative probability theory

In this section a special Hilbert space is briefly discussed implying the functional ones arising from the ordinary or the non-commutative probability theory as particular cases (see [11]). In this abstract formulation we deal with the special projectors which provide the conditional expectation with norms equaling the maximal correlations.

Let L^0 be a real linear space in which the following further operations are defined:

1. Multiplication. An element $xy \in L^0$ corresponds to every $x \in L^0$ and $y \in L^0$ so that

- a) $x(yz) = (xy)z$ for all $x \in L^0$, $y \in L^0$, $z \in L^0$,
- b) there exists a unit-element $e \in L^0$ such that $xe = ex = x$ for all $x \in L^0$,
- c) $x(y + z) = xy + xz$ and $(x + y)z = xz + yz$ for all $x \in L^0$, $y \in L^0$, $z \in L^0$,
- d) $x(\alpha y) = (\alpha x)y = \alpha(xy)$ for all $x \in L^0$, $y \in L^0$ and any real number α .

2. Involution. An element $x' \in L^0$ corresponds to every $x \in L^0$ so that

- a) $(x')' = x$ for all $x \in L^0$,
- b) $(x + y)' = x' + y'$ for all $x \in L^0$ and $y \in L^0$,
- c) $(\alpha x)' = \alpha x'$ for all $x \in L^0$ and any real number α ,
- d) $(xy)' = y'x'$ for all $x \in L^0$ and $y \in L^0$.

It is easy to see that the unit-element is unique and $0x = 0$ for all $x \in L^0$. The elements $x \in L^0$ for which $x' = x$ are called self-adjoint. They form a linear subspace which contains the unit-element and the zero element. The elements of the set

$$(3.1) \quad \mathcal{S} = \{xx' : x \in L^0\}$$

are called positive elements. The unit-element and zero element are positive ones and the positive elements are self-adjoint.

Let μ be a real-valued function defined on the linear subspace $L^1 \subset L^0$ with the following properties:

1. μ is linear on L^1 .
2. If $xx' \in L^1$ then $\mu(xx') \geq 0$ and if $\mu(xx') = 0$ then $x = 0$.
3. If $xx' \in L^1$ and $yy' \in L^1$ then $xy' + yx' \in L^1$.
4. $e \in L^1$ and $\mu(e) = 1$.

Put

$$(3.2) \quad L^2 = \{x : xx' \in L^1\}.$$

From the property 3 it follows that L^2 is a linear subspace of L^0 .

For elements $x \in L^2$ and $y \in L^2$ let the scalar product and the norm be

$$(3.3) \quad (x, y) = \mu(xy' + yx') \quad \text{and} \quad \|x\| = \sqrt{(x, x)},$$

respectively, with which the space L^2 forms a — not necessarily complete — Hilbert space.

Further, let P be a linear transformation on L^1 to itself with the following properties:

1. If $x \in L^2 \cap L^1$ then $x(Px)' + (Px)x' \in L^1$.
2. If $x(Py)' + (Py)x' \in L^1$ then $P[x(Py)' + (Py)x'] = Px(Py)' + Py(Px)'$.
3. $\mu(Px) = \mu(x)$.
4. $Pe = e$.

Theorem 3.1. If $x \in L^2 \cap L^1$ then $\mathbf{P}x \in L^2$.

Proof.

$$2\mathbf{P}x(\mathbf{P}x)' = \mathbf{P}[x(\mathbf{P}x)' + (\mathbf{P}x)x'] \in L^1.$$

Theorem 3.2. If $x \in L^2 \cap L^1$ then $\mathbf{P}x$ is the orthogonal projection of x on the subspace

$$(3.4) \quad H = \{\mathbf{P}x : x \in L^2 \cap L^1\}.$$

Proof.

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}x, \mathbf{P}y) &= \mu(\mathbf{P}x(\mathbf{P}y)' + \mathbf{P}y(\mathbf{P}x)') = \mu(\mathbf{P}[x(\mathbf{P}y)' + (\mathbf{P}y)x']) = \\ &= \mu(x(\mathbf{P}y)' + (\mathbf{P}y)x') = (x, \mathbf{P}y) \end{aligned}$$

for all $\mathbf{P}y \in L^2$, hence the statement follows from (1.5).

Therefore the restriction of \mathbf{P} to $L^2 \cap L^1$ is the projection \mathbf{P}_H . However, not every projection has the above properties. These particular projectors represent the conditional expectation either in the ordinary or the non-commutative probability theory. The quantity

$$\mathbf{S}(H_{1,0}, H_{2,0}) = \|\mathbf{P}_{H_{2,0}}^{H_{1,0}}\| = \sup_{\substack{x \in H_{1,0} \\ y \in H_{2,0} \\ \|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \mu(xy' + yx'),$$

is called the maximal correlation of H_1 and H_2 , where $H_{1,0}$ and $H_{2,0}$ are the orthogonal complements of the subspaces of the above types H_1 and H_2 , respectively, to the unit-element.

§ 4. Maximal correlation of σ -algebras

4.1. In the present section let us consider the case of (commutative) probability theory. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ be a probability space and $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, further $L_{F_0}^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P})$, where \mathcal{F}_0 is an arbitrary sub- σ -algebra of the σ -algebra \mathcal{F} . Let us denote the subspace of the elements with zero expected values of the space $L_{F_0}^2$ by $L_{F_0,0}^2$. It should be remarked that not every subspace of L^2 is of the form $L_{F_0}^2$. (R. R. BAHADUR [1] has given necessary and sufficient conditions for a subspace to be of this form.)

Let \mathcal{F}_1 and \mathcal{F}_2 be two sub- σ -algebras of \mathcal{F} . The quantity

$$(4.1) \quad \mathbf{S}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \mathbf{S}(L_{\mathcal{F}_1,0}^2, L_{\mathcal{F}_2,0}^2)$$

is called the maximal correlation of these sub- σ -algebras.

It should be remarked that no topology may be introduced among the sub- σ -algebras of \mathcal{F} by the aid of non-vanishing functions of the maximal correlation as it follows from Theorem 2.1 in consequence of $\mathbf{S}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}) = \mathbf{S}(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}) = \mathbf{S}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 1$.

4.2. In the subsequent part of the paper the following symbols will be used for particular cases:

F_V for the smallest σ -algebra with respect to which every element of V is measurable, V being an arbitrary set of random variables; $F_{\xi_i} = F_{\{\xi_i\}}$ and

$F_\xi = F_{\{\xi\}}$, further the spaces

$$(4.2) \quad \begin{aligned} L_V^2 &= L_{F_V}^2, L_{V,0}^2 = L_{F_V,0}^2, \\ L_{\xi_t}^2 &= L_{\{\xi_t\}}^2, L_{\xi_t,0}^2 = L_{\{\xi_t\},0}^2, \\ L_\xi^2 &= L_{\{\xi\}}^2, L_{\xi,0}^2 = L_{\{\xi\},0}^2; \end{aligned}$$

moreover, the projectors

$$(4.3) \quad \begin{aligned} P_V &= P_{L_V^2}, \\ P_{\xi_t} &= P_{\{\xi_t\}}, \\ P_\xi &= P_{\{\xi\}}; \end{aligned}$$

finally,

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{S}(\xi_t, \eta_t) &= \mathbf{S}(F_{\xi_t}, F_{\eta_t}), \\ \mathbf{S}(\xi, \eta) &= \mathbf{S}(F_\xi, F_\eta) \end{aligned}$$

and

$$(4.5) \quad \begin{aligned} P_{F_1}^{F_2} &= P_{L_{F_2,0}^2}^{L_{F_2,0}^2}, \\ P_{\eta_t}^{\xi_t} &= P_{L_{\eta_t,0}^2}^{L_{\xi_t,0}^2}, \\ P_\eta^\xi &= P_{L_{\eta,0}^2}^{L_{\xi,0}^2} \end{aligned}$$

where ξ_t, η_t denote stochastic processes and ξ, η vector random variables (including single random variables as one-dimensional vectors), $\{\xi_t\}, \{\eta_t\}$ and $\{\xi\}, \{\eta\}$ denote the sets consisting of the components of ξ_t, η_t and ξ, η , respectively.

It is worthy of note that $\mathbf{S}(H_1, H_2)$ is equal to the correlation coefficient of the random variables $\zeta_1 \in L^2, \zeta_2 \in L^2$, if H_1 and H_2 are the sets of the linear functions with zero expected values of ζ_1 and ζ_2 , respectively. If H is the set of the linear functions with zero expected values of $\zeta \in L^2$ and ξ is a random variable then $\mathbf{S}(H, L_{\xi,0}^2)$ is the correlation ratio of ζ on ξ .

4.3. Now, we consider the extreme cases 0 and 1 of maximal correlation.

The sub- σ -algebras F_1 and F_2 are called independent if every element of F_1 is independent of each one of F_2 . It is easy to see that the independence of sub- σ -algebras (including that of stochastic processes and that of random variables) is equivalent to zero maximal correlation (see e. g. [2]).

The common elements of probability one and zero of two sub- σ -algebras of F are called their trivial common elements. Obviously, the empty set and the whole set Ω are the trivial common elements of any two sub- σ -algebras. If the sub- σ -algebras F_1 and F_2 have non-trivial common elements then $\mathbf{S}(F_1, F_2) = 1$, because of having such ones is equivalent to $L_{F_1,0}^2$ and $L_{F_2,0}^2$ having non-zero common elements. Especially, $\mathbf{S}(\xi, \eta) = 1$ if for the vector random variables ξ and η non-constant Borel-measurable vector-valued functions f and g exist such that $f(\xi) = g(\eta)$.

Since $F_1 \subset F_2$ if and only if $L_{F_1}^2 \subset L_{F_2}^2$, therefore $\mathbf{S}(F'_1, F'_2) \leq \mathbf{S}(F_1, F_2)$, whenever $F'_1 \subset F_1$ and $F'_2 \subset F_2$ as it follows from 5° of Theorem 1.1'.

Especially for vector random variables ξ and η $\mathbf{S}(f(\xi), g(\eta)) \leq \mathbf{S}(\xi, \eta)$ where f and g are any Borel-measurable vector-valued functions, because of $F_{f(\xi)} \subset F_\xi$ and $F_{g(\eta)} \subset F_\eta$.

4.4. In this section it is dealt with the pair of operators $\mathbf{P}_{F_2}^{F_1}$ and $\mathbf{P}_{F_1}^{F_2}$.

Theorem 4.1. For two normed random variables $f \in L_{F_1,0}^2$ and $g \in L_{F_2,0}^2$ the following statements are equivalent:

1° f and g form a pair of eigenfunctions of the pair of operators $\mathbf{P}_{F_2}^{F_1}, \mathbf{P}_{F_1}^{F_2}$.

2° $\|\mathbf{P}_{F_2}^{F_1} f\| = \|\mathbf{P}_{F_1}^{F_2} g\| = (f, g)$.

3° f and g are linearly correlated¹ and $\|\mathbf{P}_g^f f\| = \|\mathbf{P}_{F_2}^{F_1} f\|$; $\|\mathbf{P}_f^g g\| = \|\mathbf{P}_{F_1}^{F_2} g\|$.

Proof. Analogous to that of Theorem 1 in [4].

In the sequel, let us examine under what conditions the operators $\mathbf{P}_{F_2}^{F_1}$ and $\mathbf{P}_{F_1}^{F_2}$ form a pair of integral operators. The Theorem on this subject will be formulated in general.

Let $(\Omega_1, F_1, \mathbf{P}_1)$ and $(\Omega_2, F_2, \mathbf{P}_2)$ be two probability spaces and let \mathbf{T} be a linear bounded operator defined on $L_{F_1}^2$ and taking on its values in $L_{F_2}^2$, for which

1. $\mathbf{T} \chi_{\Omega_1} = \chi_{\Omega_1}$,

2. if $A \in F_1$ then $\mathbf{T} \chi_A \geq 0$,

3. $\int_{\Omega_2} \mathbf{T} f d\mathbf{P}_2 = \int_{\Omega_1} f d\mathbf{P}_1$ for all $f \in L_{F_1}^2$,

where χ_A denotes the indicator function of any $A \in F_1$.

Theorem 4.2. There hold

1° $\mathbf{T}^* \chi_{\Omega_1} = \chi_{\Omega_1}$,

2° if $B \in F_2$ then $\mathbf{T}^* \chi_B \geq 0$,

3° $\int_{\Omega_1} \mathbf{T}^* g d\mathbf{P}_1 = \int_{\Omega_2} g d\mathbf{P}_2$ for all $g \in L_{F_2}^2$.

(For the adjoint \mathbf{T}^* see (1.1).)

Proof. According to Condition 3, $(\mathbf{T}^* \chi_{\Omega_2}, f)_1 = (\chi_{\Omega_2}, \mathbf{T} f)_2 = (\chi_{\Omega_1}, f)_1$ for all $f \in L_{F_1}^2$ therefore 1° follows.

Since

$$\int_A \mathbf{T}^* \chi_B d\mathbf{P}_1 = (\chi_A, \mathbf{T}^* \chi_B)_1 = (\mathbf{T} \chi_A, \chi_B)_2 = \int_B \mathbf{T} \chi_A d\mathbf{P}_2 \geq 0 \text{ for any } A \in F_1,$$

according to Condition 2, thus $\mathbf{T}^* \chi_B \geq 0$.

Finally,

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{T}^* g d\mathbf{P}_1 = (\chi_{\Omega_1}, \mathbf{T}^* g)_1 = (\mathbf{T} \chi_{\Omega_1}, g)_2 = (\chi_{\Omega_2}, g)_2 = \int_{\Omega_2} g d\mathbf{P}_2.$$

¹ The correlation of f and g is called linear, if both the regressions of them are linear.

The conditions imply that the set function

$$(4.6) \quad \mathbf{P}(A \times B) = (\mathbf{T} \chi_A, \chi_B)_2$$

is non-negative on intervals of $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, hence it can be uniquely extended as a measure on $F = F_1 \times F_2$.

Thus, being $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, (Ω, F, \mathbf{P}) is a probability space, whereas

$$\mathbf{P}_1(A) = \mathbf{P}(A \times \Omega_2) \quad \text{for all } A \in F_1,$$

$$\mathbf{P}_2(B) = \mathbf{P}(\Omega_1 \times B) \quad \text{for all } B \in F_2$$

are the marginals of \mathbf{P} . Hence, if $f = f(x) \in L^2_{F_1}$ and $f_1(x, y) = f(x)$ for all $y \in \Omega_2$, then

$$\int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f_1^2 d\mathbf{P} = \int_{\Omega_1} f^2 d\mathbf{P}_1,$$

which means that $L^2_{F_1}$ can be considered as a subspace of $L^2(\Omega, F, \mathbf{P})$ consisting of its elements not depending on the elements of Ω_2 while F_1 as the sub- σ -algebra of the elements $A \times \Omega_2$. $L^2_{F_2}$ can be characterized in a similar way.

Theorem 4.3.

$$(4.7) \quad \mathbf{T} = \mathbf{P}^{L^2_{F_1}}_{L^2_{F_1}}.$$

Proof. (4.6) implies

$$(\chi_A, \chi_B) = (\mathbf{T} \chi_A, \chi_B)$$

for each $A \in F_1$ and $B \in F_2$; thus

$$(4.8) \quad (f, g) = (\mathbf{T} f, g)$$

whenever $f \in L^2_{F_1}$ and $g \in L^2_{F_2}$ are step functions; by the continuity of the operator \mathbf{T} , (4.8) holds for any $f \in L^2_{F_1}$ and $g \in L^2_{F_2}$, whence the statement follows from (1.5).

The operator \mathbf{T} is called an integral operator with kernel $K(x, y)$ if

$$\mathbf{T} f = \int_{\Omega_1} K(x, y) f(x) d\mathbf{P}_1(x) \in L^2_{F_2} \quad \text{for all } f \in L^2_{F_1}.$$

Theorem 4.4. \mathbf{T} is an integral operator with kernel $K(x, y)$ if and only if

$$\mathbf{P}(E) = \int_E \int K(x, y) d\mathbf{P}_1(x) d\mathbf{P}_2(y) \quad \text{for all } E \in F,$$

i.e. $\mathbf{P} \ll \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$.

Proof. Analogous to that of Theorem 1 in [3].

§ 5. The intuitive background of the postulates

In section 1.3 three postulates were given. Let us examine what is their intuitive background in spaces L^2 from the view-point of stochastic connection between two random variables.

As a matter of fact, the meaning of intensity of connection is not at all unambiguously determined. Thus, no system of postulates can be adapt to cha-

racterize it in all possible senses. This section is to explain the sense corresponding to our system of postulates.

Let ξ and η be arbitrary standard random variables. As it is known, L^2_ξ and L^2_η are the spaces of functions (having finite standard deviations) of ξ and η , respectively; further $P_\xi \eta$ represents the conditional expectation (regression) of η on ξ . If only the ξ -values are observed, the values of η may be inferred by the aid of $P_\xi \eta$. Of course, the closer the connection between ξ and η , the better is the inference. On the other hand, the inference is better, when the root-mean-square error of it, i.e.

$$(5.1) \quad \|\eta - P_\xi \eta\|,$$

is less. However, this standard deviation depends not only on the intensity of connection between ξ and η , but also on the scale, on which the values of η are measured, i.e. on the univalent transformations of η . Hence, the degree of dependence is regarded higher, when (5.1) may be lessened by normed univalent transformations of η , that is the quantity

$$(5.2) \quad \inf \|g - P_\xi g\|$$

is less, where the infimum is taken for univalent $g \in L^2_{\eta,0}$, $\|g\| = 1$. Though (5.2) does not seem to be $\delta(L^2_{\xi,0}, L^2_{\eta,0})$, the following Theorem is true.

Theorem 5.1.

$$(5.3) \quad \sup (u, v) = S(\xi, \eta),$$

where the supremum is taken for $u \in L^2_{\xi,0}$ and $v \in L^2_{\eta,0}$ univalent functions of ξ and η , respectively, with $\|u\| = \|v\| = 1$.

Proof. Let $f_n \in L^2_{\xi,0}$ and $g_n \in L^2_{\eta,0}$ ($\|f_n\| = \|g_n\| = 1$) be such that $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, g_n) = S(\xi, \eta)$, further let $\varphi_{nm} \in L^2_{\xi,0}$, $\psi_{nm} \in L^2_{\eta,0}$ be step functions which take on only a finite number of values, such that $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_{nm} - f_n\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\psi_{nm} - g_n\| = 0$ for all n . Then $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_{nm}^* - f_n\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|\psi_{nm}^* - g_n\| = 0$, too, where $\varphi_{nm}^* = \frac{\varphi_{nm}}{\|\varphi_{nm}\|}$, $\psi_{nm}^* = \frac{\psi_{nm}}{\|\psi_{nm}\|}$, for $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_{nm}^* - \varphi_{nm}\|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 - \|\varphi_{nm}\|)^2 = 0$ and

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_{nm}^* - f_n\| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_{nm}^* - \varphi_{nm}\| + \lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_{nm} - f_n\| = 0,$$

which can be analogously verified for $\|\psi_{nm}^* - g\|$, too.

Let

$$u_{nmk} = \varepsilon_{nmk} t(\xi) + \varphi_{nm}^* \quad \text{and} \quad v_{nmk} = \varepsilon_{nmk} t(\eta) + \psi_{nm}^*,$$

where $t(x)$ is a univalent bounded measurable function: $|t(x)| \leq C$. The posi-

tive numbers ε_{nmk} are determined so that $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_{nmk} = 0$ and $\varepsilon_{nmk} < \frac{\alpha_{nm}}{2C}$,

where $\alpha_{nm} > 0$ are less than any of the absolute values of the non-zero difference of the values of the step functions φ_{nm}^* , ψ_{nm}^* . With this choice of ε_{nmk} the functions u_{nmk} and v_{nmk} are univalent, since if $u_{nmk}(x_1) = u_{nmk}(x_2)$, either

$$\alpha_{nm} < |\varphi_{nm}^*(x_1) - \varphi_{nm}^*(x_2)| = \varepsilon_{nmk} |t(x_1) - t(x_2)| < \frac{\alpha_{nm}}{2C} \cdot 2C = \alpha_{nm},$$

which is impossible, or $\varphi_{nm}^*(x_1) - \varphi_{nm}^*(x_2) = 0$, in which case $t(x_1) = t(x_2)$ and, owing to the univalence of $t(x)$, $x_1 = x_2$. Similarly, the functions v_{nmk} are also univalent. Because of

$$\|u_{nmk} - \varphi_{nm}^*\| \leq C \varepsilon_{nmk} \quad \text{and} \quad \|v_{nmk} - \psi_{nm}^*\| \leq C \varepsilon_{nmk},$$

and²

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{nmk}^* - u_{nmk}\|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} [(1 - \|u_{nmk} - \mathbf{M}(u_{nmk})\|)^2 + \mathbf{M}^2(u_{nmk})] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_{nmk}^* - v_{nmk}\|^2 = 0, \end{aligned}$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_{nmk}^* - \varphi_{nm}^*\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|v_{nmk}^* - \psi_{nm}^*\| = 0$ for all n and m , where u_{nmk}^* and v_{nmk}^* are the standardized of u_{nmk} and v_{nmk} .

Therefore, (u_{nmk}^*, v_{nmk}^*) may approach $\mathbf{S}(\xi, \eta)$ with arbitrary accuracy.

In consequence of this Theorem, (5.2) is equal to $\delta(L_{\xi,0}^2, L_{\eta,0}^2)$. Accordingly, in 1.3 Postulate 1 asserts the closer the connection, the greater the maximal correlation.

Postulate 2 needs no commentary: it simply asserts, the maximal correlation being zero in the case of independence.

Postulate 3 expresses the case of "strict dependence". However, not only the case of ξ and/or η being a function of the other should be regarded as that of strict dependence, but also the more general type of dependence $f(\xi) = g(\eta)$ where f and g are non-constant Borel-measurable functions.

In this case

$$(5.4) \quad \delta(L_{\xi,0}^2, L_{\eta,0}^2) = 0.$$

Moreover, (5.4) may hold in the "irregular" cases, when there exist sequences of $f_n \in L_{\xi,0}^2$, $g_n \in L_{\eta,0}^2$ such that $\|f_n\| = \|g_n\| = 1$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g_n\| = 0$,

but no function of ξ is equal to a function of η . (See an example for this case in [10].) For sake of uniformity, these cases are also considered as those of "strict dependence".

A. RÉNYI [10] has given some Postulates for quantities measuring the intensity of stochastic dependence which are satisfied by the maximal correlation. If his Postulates are modified by substituting our Postulates 1 and 3 for these Postulates F) and E), respectively, then the obtained system of postulates is satisfied by the maximal correlation only.

It is to be noted, that C. B. BELL [2] also dealt with the modification of A. RÉNYI's Postulates, but the maximal correlation does not satisfy his modified system.

§ 6. Particular cases and examples

In this section the notation $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ will be used for an N -dimensional and $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_M)$ for an M -dimensional random vector, where $N \leq M$.

² Henceforth let $\mathbf{M}(\)$ denote the expectation of the random variable in brackets.

6.1. Canonical distribution. The random vector (ξ, η) is said to be canonically distributed if the joint distribution function of it equals the product of the distribution functions of $(\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_N, \eta_N)$ and of $\eta_{N+1}, \dots, \eta_M$, i.e.

$$(6.1) H(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) = H_1(x_1, y_1) \dots H_N(x_N, y_N) H_{N+1}(y_{N+1}) \dots H_M(y_M).$$

Lemma 6.1. For canonical distributions $(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_k}, \eta_{j_1}, \dots, \eta_{j_l})$ is independent of $(\xi_{i'_1}, \dots, \xi_{i'_k}, \eta_{j'_1}, \dots, \eta_{j'_l})$, whenever all the indices i' and j' differ from all the indices i and j . Hence if $f_1 \in L^2_{\xi_1}, \dots, f_N \in L^2_{\xi_N}, g_1 \in L^2_{\eta_1}, \dots, g_M \in L^2_{\eta_M}$ then the products $f_1 \dots f_N \in L^2_{\xi}$ and $g_1 \dots g_M \in L^2_{\eta}$, further $\|f_1 \dots f_N\| = \|f_1\| \dots \|f_N\|$, $\|g_1 \dots g_M\| = \|g_1\| \dots \|g_M\|$ and $(f_1 \dots f_N, g_1 \dots g_M) = (f_1, g_1) \dots (f_N, g_N) \times \dots \mathbf{M}(g_{N+1}) \dots \mathbf{M}(g_M)$. If $\{f_{in_i}\}$ and $\{g_{jm_j}\}$ are complete orthonormal systems in $L^2_{\xi_i}$ resp. $L^2_{\eta_j}$ ($i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$) then the sets of all the possible products $\{f_{1m_1} \dots f_{Nm_N}\}$ and $\{g_{1m_1} \dots g_{Mm_M}\}$ are complete orthonormal systems in L^2_{ξ} , resp. L^2_{η} .

Proof. The statements may be verified directly from the definition of the canonical distribution.

Lemma 6.2. For canonical distributions

$$(6.2) \quad \mathbf{P}_{\eta} f_1 \dots f_N = \mathbf{P}_{\eta_1} f_1 \dots \mathbf{P}_{\eta_N} f_N,$$

$$(6.3) \quad \mathbf{P}_{\xi} g_1 \dots g_M = \mathbf{P}_{\xi_1} g_1 \dots \mathbf{P}_{\xi_N} g_N \mathbf{M}(g_{N+1}) \dots \mathbf{M}(g_M),$$

where $f_i \in L^2_{\xi_i}$ and $g_j \in L^2_{\eta_j}$ ($i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$).

Proof. Let $\{g_{jm_j}\}$ be complete orthonormal systems in $L^2_{\eta_j}$ ($j = 1, \dots, M$) and $g = \sum_{m_1, \dots, m_M} \beta_{m_1 \dots m_M} g_{1m_1} \dots g_{Mm_M}$ an arbitrary element of L^2_{η} . Thus

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_{\eta_1} f_1 \dots \mathbf{P}_{\eta_N} f_N, g) &= \sum_{m_1, \dots, m_M} \beta_{m_1 \dots m_M} (\mathbf{P}_{\eta_1} f_1 \dots \mathbf{P}_{\eta_N} f_N, g_{1m_1} \dots g_{Mm_M}) = \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_M} \beta_{m_1 \dots m_M} (f_1, g_{1m_1}) \dots (f_N, g_{Nm_N}) \mathbf{M}(g_{N+1, m_{N+1}}) \dots \mathbf{M}(g_{Mm_M}) = \\ &= (f_1 \dots f_N, g) \end{aligned}$$

which proves (6.2). The proof of (6.3) is analogous.

Theorem 6.1. Let $f_{i_1}, g_{i_1}, \dots, f_{i_k}, g_{i_k}$ be pairs of eigenfunctions of $\mathbf{P}_{\eta_{i_1}}^{\xi_{i_1}}, \mathbf{P}_{\xi_{i_1}}^{\eta_{i_1}}, \dots, \mathbf{P}_{\eta_{i_k}}^{\xi_{i_k}}, \mathbf{P}_{\xi_{i_k}}^{\eta_{i_k}}$ and belong to the respective eigenvalues $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ of a canonical distribution. Then the pair of products $f_{i_1} \dots f_{i_k}, g_{i_1} \dots g_{i_k}$ forms a pair of eigenfunctions of $\mathbf{P}_{\eta}^{\xi}, \mathbf{P}_{\xi}^{\eta}$ and belongs to the product $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k}$ for any k^{th} order combination (i_1, \dots, i_k) of the elements $1, \dots, N$.

Proof. According to Lemma (6.2),

$$\mathbf{P}_{\eta}^{\xi} f_{i_1} \dots f_{i_k} = \mathbf{P}_{\eta_{i_1}}^{\xi_{i_1}} f_{i_1} \dots \mathbf{P}_{\eta_{i_k}}^{\xi_{i_k}} f_{i_k} = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} g_{i_1} \dots g_{i_k},$$

$$\mathbf{P}_{\xi}^{\eta} g_{i_1} \dots g_{i_k} = \mathbf{P}_{\xi_{i_1}}^{\eta_{i_1}} g_{i_1} \dots \mathbf{P}_{\xi_{i_k}}^{\eta_{i_k}} g_{i_k} = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} f_{i_1} \dots f_{i_k}.$$

Theorem 6.2. For canonical distributions

$$(6.4) \quad \mathbf{S}(\xi, \eta) = \max_{i=1, \dots, N} \mathbf{S}(\xi_i, \eta_i).$$

Proof. Let $\{f_{in_i}\}$ and $\{g_{jn_j}\}$ be complete orthonormal systems in $L^2_{\xi_i}$ resp. $L^2_{\eta_j}$, such that $f_{i0} = g_{j0} = \chi_\Omega$ ($i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$). Let further $f = \sum_{n_1+\dots+n_N>0} \alpha_{n_1\dots n_N} f_{1n_1}\dots f_{Nn_N} \in L^2_{\xi,0}$ and $g = \sum_{m_1+\dots+m_M>0} \beta_{m_1\dots m_M} g_{1m_1}\dots g_{Mm_M} \in L^2_{\eta,0}$ be arbitrary normed random variables. In this case one obtains

$$\begin{aligned}
 |(f, g)| &= \left| \sum_{n_1+\dots+n_N>0} \sum_{m_1+\dots+m_M>0} \alpha_{n_1\dots n_N} \beta_{m_1\dots m_M} (f_{1n_1}, g_{1m_1}) \times \dots \times \right. \\
 &\quad \left. \times (f_{Nn_N}, g_{Nm_N}) \mathbf{M}(g_{N+1, m_{N+1}}) \dots \mathbf{M}(g_{Mm_M}) \right| \leq \\
 &\leq \sum_{\substack{n_1, \dots, n_N \\ n_1>0}} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_N \\ m_1>0}} |\alpha_{n_1\dots n_N} \beta_{m_1\dots m_N 0\dots 0} (f_{1n_1}, g_{1m_1}) \dots (f_{Nn_N}, g_{Nm_N})| + \dots + \\
 &\quad + \sum_{n_N>0} \sum_{m_N>0} |\alpha_{0\dots 0 n_N} \beta_{0\dots 0 m_N 0\dots 0} (f_{Nn_N}, g_{Nm_N})| \leq \\
 &\leq \mathbf{S}(\xi_1, \eta_1) \sum_{\substack{n_1, \dots, n_N \\ n_1>0}} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_N \\ m_1>0}} |\alpha_{n_1\dots n_N} \beta_{m_1\dots m_N 0\dots 0}| + \dots + \\
 &\quad + \mathbf{S}(\xi_N, \eta_N) \sum_{n_N>0} \sum_{m_N>0} |\alpha_{0\dots 0 n_N} \beta_{0\dots 0 m_N 0\dots 0}| \leq \\
 &\leq \max_{i=1, \dots, N} \mathbf{S}(\xi_i, \eta_i) \sum_{n_1+\dots+n_N>0} \sum_{m_1+\dots+m_N>0} |\alpha_{n_1\dots n_N} \beta_{m_1\dots m_N 0\dots 0}| \leq \max_{i=1, \dots, N} \mathbf{S}(\xi_i, \eta_i).
 \end{aligned}$$

On the other hand, $\mathbf{S}(\xi_i, \eta_i) \leq \mathbf{S}(\xi, \eta)$ ($i = 1, \dots, N$) is trivial, thus (6.4) is true.

Theorem 6.3. For canonical distributions

$$(6.5) \quad 1 + \mathbf{C}^2(\xi, \eta) = [1 + \mathbf{C}^2(\xi_1, \eta_1)] \dots [1 + \mathbf{C}^2(\xi_N, \eta_N)]$$

where $\mathbf{C}(\xi_1, \eta_1) = ||| \mathbf{P}^{\xi_1}_{\eta_1} |||$ is the mean-square contingency of (vector) random variables ξ_1 and η_1 .

Proof. If $\{f_{in_i}\}$ and $\{g_{jn_j}\}$ are complete orthonormal systems in $L^2_{\xi_i}$ resp. $L^2_{\eta_j}$ such that $f_{i0} = g_{j0} = \chi_\Omega$ ($i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, M$) then from (1.15)

$$\begin{aligned}
 1 + \mathbf{C}^2(\xi, \eta) &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_N \\ m_1, \dots, m_M}} (f_{1n_1} \dots f_{Nn_N}, g_{1m_1} \dots g_{Mm_M})^2 = \\
 &= \sum_{n_1, m_1} (f_{1n_1}, g_{1m_1})^2 \dots \sum_{n_N, m_N} (f_{Nm_N}, g_{Nm_N})^2 = [1 + \mathbf{C}^2(\xi_1, \eta_1)] \dots [1 + \mathbf{C}^2(\xi_N, \eta_N)].
 \end{aligned}$$

Theorem 6.4. If the eigenvalues λ_{in_i} for $n_i > 0$ belong to pairs of eigenfunctions of $\mathbf{P}^{\xi_i}_{\eta_i}$, $\mathbf{P}^{\eta_i}_{\xi_i}$ ($i = 1, \dots, N$) furnishing complete orthogonal systems in $L^2_{\xi_i,0}$ and $L^2_{\eta_i,0}$, respectively, further if $\lambda_{i0} = 1$ then the sequence $\{\lambda_{1n_1} \dots \lambda_{Nn_N}\}$ contains all the non-zero eigenvalues of \mathbf{P}^{ξ}_{η} , \mathbf{P}^{η}_{ξ} .

Proof. In consequence of (1.4) and (6.5)

$$\begin{aligned}
 1 + \sum_{n_1+\dots+n_N>0} \lambda_{1n_1}^2 \dots \lambda_{Nn_N}^2 &= (1 + \sum_{n_1>0} \lambda_{1n_1}^2) \dots (1 + \sum_{n_N>0} \lambda_{Nn_N}^2) = \\
 &= [1 + \mathbf{C}^2(\xi_1, \eta_1)] \dots [1 + \mathbf{C}^2(\xi_N, \eta_N)] = 1 + \mathbf{C}^2(\xi, \eta).
 \end{aligned}$$

Regarding Theorem 6.1, this proves the statement.

6.2. Normal distribution. Let the joint distribution of (ξ, η) be an $N + M$ -dimensional Gaussian one with the covariance matrix

$$(6.6) \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma'_{12} & \Sigma_{22} \end{bmatrix},$$

where Σ_{11} is the covariance matrix of ξ , Σ_{22} that of η ; the elements of Σ_{12} are the covariances between the components of ξ and those of η . (Σ'_{12} means the transposed of Σ_{12} .)

If ξ is degenerately distributed i.e. the determinant of Σ_{11} vanishes then some components of ξ can be expressed in terms of the others. Omitting these components, the space L^2_ξ remains unchanged. Thus a non-degenerate distribution of ξ , and similarly of η , may be supposed without restricting generality.

There can be made use of the known fact that a non-degenerate $N + M$ -dimensional normal random vector (ξ, η) can be transformed by non-degenerate linear transformations of its N -dimensional component ξ and of its M -dimensional component η so that the obtained random vector (ξ', η') be of $N + M$ -dimensional zero-vector expectation and of covariance matrix

$$(6.7) \quad \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \varrho_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \varrho_N & 0 & \dots & 0 \\ \varrho_1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & \varrho_N & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \varrho_1 \geq \dots \geq \varrho_N \geq 0.$$

This means that the components of ξ' and η' are standard normal random variables and that their joint distribution is canonical (see H. HOTELLING [6]). The correlation coefficients $\varrho_1, \dots, \varrho_N$ are called the canonical correlations of ξ and η . Thus, $L^2_{\xi'} = L^2_\xi$ and $L^2_{\eta'} = L^2_\eta$ holding, ξ, η can be taken as canonically distributed with standard components without any restriction of generality.

Theorem 6.5. *The maximal correlation of normally distributed random vector variables is equal to their greatest canonical correlation.*

Proof. The normally distributed vector (ξ, η) with covariance matrix (6.7) — according to $\mathbf{S}(\xi_i, \eta_i) = \varrho_i$ ($i = 1, \dots, N$) and Theorem 6.2 — has

$$\mathbf{S}(\xi, \eta) = \varrho_1,$$

from which the statement follows.

When transforming the normal distribution with covariance matrix (6.6) into a canonical distribution, it is to see that $\mathbf{S}(\xi, \eta)$ is the greatest root of

the equation

$$\det \begin{bmatrix} \varrho \sum_{11} & \sum_{12} \\ \sum'_{12} & \varrho \sum_{22} \end{bmatrix} = 0$$

and that the pair of linear eigenfunctions belonging to $\mathbf{S}(\xi, \eta)$ is

$$f = \sum_{i=1}^N \alpha_i (\xi_i - \mathbf{M}(\xi_i)), \quad g = \sum_{j=1}^M \beta_j (\eta_j - \mathbf{M}(\eta_j)),$$

where $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ and $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_M)$ are the vectors satisfying the equations

$$\begin{aligned} \sum'_{12} \alpha &= \mathbf{S}(\xi, \eta) \sum_{22} \beta \\ \sum_{12} \beta &= \mathbf{S}(\xi, \eta) \sum_{11} \alpha. \end{aligned}$$

6.3. Multinomial distribution. Let the joint distribution of (ξ, η) be

$$\begin{aligned} p_{i_1 \dots i_N j_1 \dots j_M} &= \\ &= \frac{L!}{i_1! \dots i_N! j_1! \dots j_M! (L - I - J)!} p_1^{i_1} \dots p_N^{i_N} q_1^{j_1} \dots q_M^{j_M} (1 - P - Q)^{L - I - J}, \end{aligned}$$

where $i_1, \dots, i_N, j_1, \dots, j_M$ are non-negative integers, L is a positive one and $p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_M$ are non-negative numbers, further

$$I = i_1 + \dots + i_N, \quad J = j_1 + \dots + j_M, \quad I + J \leq L,$$

$$P = p_1 + \dots + p_N, \quad Q = q_1 + \dots + q_M, \quad P + Q \leq 1.$$

The marginal and the conditional probabilities are

$$p_{i_1 \dots i_N} = \frac{L!}{i_1! \dots i_N! (L - I)!} p_1^{i_1} \dots p_N^{i_N} (1 - P)^{L - I} \quad I \leq L,$$

$$p_{j_1 \dots j_M} = \frac{L!}{j_1! \dots j_M! (L - J)!} q_1^{j_1} \dots q_M^{j_M} (1 - Q)^{L - J} \quad J \leq L;$$

$$\begin{aligned} p_{i_1 \dots i_N | j_1 \dots j_M} &= \frac{(L - J)!}{i_1! \dots i_N! (L - J - I)!} \left(\frac{p_1}{1 - Q} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{p_N}{1 - Q} \right)^{i_N} \left(1 - \frac{P}{1 - Q} \right)^{L - J - I} \\ & \quad I \leq L - J; J \leq L, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{j_1 \dots j_M | i_1 \dots i_N} &= \frac{(L - I)!}{j_1! \dots j_M! (L - I - J)!} \left(\frac{q_1}{1 - P} \right)^{j_1} \dots \left(\frac{q_M}{1 - P} \right)^{j_M} \left(1 - \frac{Q}{1 - P} \right)^{L - I - J} \\ & \quad J \leq L - I; I \leq L. \end{aligned}$$

In order to calculate the maximal correlation for such distributions the formula

$$(6.8) \quad \sum_{i=0}^L i^n \binom{L}{i} p^i (1 - p)^{L - i} = \sum_{j=1}^n a_{jn} p^j \frac{L!}{(L - j)!} \quad n = 1, 2, \dots$$

is to be applied where L is a positive integer, $0 \leq p \leq 1$ and a_{jn} are appropriate coefficients with $a_{nn} = 1$.

Theorem 6.6. *The non-zero eigenvalues of the pair of operators \mathbf{P}_η^ξ , \mathbf{P}_ξ^η are*

$$(6.9) \quad \lambda_n = \left[\frac{PQ}{(1-P)(1-Q)} \right]^{\frac{n}{2}} \quad n = 1, \dots, L$$

and the maximal correlation

$$(6.10) \quad \mathbf{S}(\xi, \eta) = \left[\frac{PQ}{(1-P)(1-Q)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Proof. In consequence of

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1 + \dots + i_N \leq L-J} (i_1 + \dots + i_N)^n p_{i_1 \dots i_N \cdot | j_1 \dots j_M} = \\ &= \sum_{I=0}^{L-J} I^n \binom{L-J}{I} \left(1 - \frac{P}{1-Q}\right)^{L-J-I} \sum_{i_1 + \dots + i_N = I} \frac{I!}{i_1! \dots i_N!} \left(\frac{p_1}{1-Q}\right)^{i_1} \dots \left(\frac{p_N}{1-Q}\right)^{i_N} = \\ &= \sum_{I=0}^{L-J} I^n \binom{L-J}{I} \left(\frac{P}{1-Q}\right)^I \left(1 - \frac{P}{1-Q}\right)^{L-J-I} = \sum_{j=1}^n a_{jn} \left(\frac{P}{1-Q}\right)^j \frac{(L-J)!}{(L-J-j)!} \end{aligned}$$

the equality

$$\mathbf{P}_\eta^\xi(\varphi_n - \mathbf{M}(\varphi_n)) = \sum_{j=1}^n a_{jn} \left(\frac{P}{1-Q}\right)^j (L - \varphi_1) \dots (L - \varphi_1 - j + 1) - \mathbf{M}(\varphi_n) \quad n = 1, \dots, L$$

and analogously the equality

$$\mathbf{P}_\xi^\eta(\psi_n - \mathbf{M}(\psi_n)) = \sum_{j=1}^n a_{jn} \left(\frac{Q}{1-P}\right)^j (L - \varphi_1) \dots (L - \varphi_1 - j + 1) - \mathbf{M}(\psi_n) \quad n = 1, \dots, L$$

hold, where

$$\varphi_n = (\xi_1 + \dots + \xi_N)^n \quad \text{and} \quad \psi_n = (\eta_1 + \dots + \eta_M)^n \quad n = 1, \dots, L.$$

Here a generalized form of Theorem 3 of [4] may be applied. Viz. as it is obvious, this Theorem may be generalized to any pairs of Hilbert spaces and any pair of operators adjoint to each other: the proof is analogous. Thus (6.9) supplies eigenvalues.

With the aid of identity (1.4) it is proved that (6.9) provides all the non-zero eigenvalues:

$$\begin{aligned} 1 + \mathbf{C}^2(\xi, \eta) &= \sum_{i_1 + \dots + i_N + j_1 + \dots + j_M \leq L} \frac{p_{i_1 \dots i_N j_1 \dots j_M}^2}{p_{i_1 \dots i_N} p_{j_1 \dots j_M}} = \\ &= \sum_{I+J \leq L} \frac{(L-I)! (L-J)!}{I! J! (L-I-J)!^2} \left(1 - \frac{P}{1-Q}\right)^{L-I-J} \left(1 - \frac{Q}{1-P}\right)^{L-I-J} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{\substack{i_1+\dots+i_N=I \\ j_1+\dots+j_M=J}} \frac{I!J!}{i_1! \dots i_N! j_1! \dots j_M!} \left(\frac{p_1}{1-Q} \right)^{i_1} \dots \left(\frac{p_N}{1-Q} \right)^{i_N} \left(\frac{q_1}{1-P} \right)^{j_1} \dots \left(\frac{q_M}{1-P} \right)^{j_M} = \\
& = \sum_{I+J \leq L} \frac{(L-I)!(L-J)!}{I!J!(L-I-J)!} \left(\frac{P}{1-Q} \right)^L \left(1 - \frac{P}{1-Q} \right)^{L-I-J} \left(\frac{Q}{1-P} \right)^J \times \\
& \times \left(1 - \frac{Q}{1-P} \right)^{L-I-J} = \sum_{\substack{I+J \leq L \\ 0 \leq k \leq L-I-J \\ 0 \leq l \leq L-I-J}} \frac{(L-I)!(L-J)!}{I!J!(L-I-J-k)!(L-I-J-l)!k!l!} \times \\
& \times (-1)^{k+l} \left(\frac{P}{1-Q} \right)^{I+k} \left(\frac{Q}{1-P} \right)^{J+l} = \sum_{m=0}^L \sum_{n=0}^L \left(\frac{P}{1-Q} \right)^m \left(\frac{Q}{1-P} \right)^n \sum_{l=0}^m \binom{L-n}{l} \times \\
& \times \binom{-L+m-1}{m-I} \sum_{j=0}^n \binom{L-m}{j} \binom{-L+n-1}{n-J} = \sum_{m=0}^L \sum_{n=0}^L (-1)^{m+n} \binom{n}{m} \binom{m}{n} \times \\
& \times \left(\frac{P}{1-Q} \right)^m \left(\frac{Q}{1-P} \right)^n = \sum_{n=0}^L \left[\frac{PQ}{(1-P)(1-Q)} \right]^n = 1 + \sum_{n=1}^L \lambda_n^2.
\end{aligned}$$

Therefore (6.10) holds, too.

6.4. Multihypergeometric distribution. Let the joint distribution of (ξ, η) be

$$p_{i_1 \dots i_N j_1 \dots j_M} = \frac{\binom{A_1}{i_1} \dots \binom{A_N}{i_N} \binom{B_1}{j_1} \dots \binom{B_M}{j_M} \binom{L-A-B}{k-I-J}}{\binom{L}{k}},$$

where $i_1, \dots, i_N, j_1, \dots, j_M$ are non-negative integers, $A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_M, L$ and k are positive ones, further

$$I = i_1 + \dots + i_N, \quad J = j_1 + \dots + j_M, \quad I + J \leq k,$$

$$A = A_1 + \dots + A_N, \quad B = B_1 + \dots + B_M, \quad A + B \leq L$$

and $k \leq L$.

The marginal and the conditional probabilities are

$$p_{i_1 \dots i_N} = \frac{\binom{A_1}{i_1} \dots \binom{A_N}{i_N} \binom{L-A}{k-I}}{\binom{L}{k}}, \quad I \leq k,$$

$$p_{j_1 \dots j_M} = \frac{\binom{B_1}{j_1} \dots \binom{B_M}{j_M} \binom{L-B}{k-J}}{\binom{L}{k}} \quad J \leq k,$$

$$p_{i_1 \dots i_N | j_1 \dots j_M} = \frac{\binom{A_1}{i_1} \dots \binom{A_N}{i_N} \binom{L-B-A}{k-J-I}}{\binom{L-B}{k-J}} \quad I \leq k-J; J \leq k,$$

$$p_{j_1 \dots j_M | i_1 \dots i_N} = \frac{\binom{B_1}{j_1} \dots \binom{B_M}{j_M} \binom{L-A-B}{k-I-J}}{\binom{L-A}{k-I}} \quad J \leq k-I; I \leq k.$$

Analogously to (6.8) in the preceding example, in the present case

$$\sum_{i=0}^k i^n \frac{\binom{L_1}{i} \binom{L-L_1}{k-i}}{\binom{L}{k}} = \sum_{j=1}^n a_{jn} \frac{\binom{L_1}{j}}{\binom{L}{j}} \frac{k!}{(k-j)!} \quad n = 1, 2, \dots$$

is needed where $k \leq L$ are positive integers and a_{jn} are appropriate coefficients with $a_{nn} = 1$.

Theorem 6.7. *The non-zero eigenvalues of the pair of operators P_η^i, P_ξ^n are*

$$(6.11) \quad \lambda_n = \left[\frac{\binom{A}{n} \binom{B}{n}}{\binom{L-A}{n} \binom{L-B}{n}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad n = 1, \dots, k$$

and the maximal correlation

$$(6.12) \quad \mathbf{S}(\xi, \eta) = \left[\frac{AB}{(L-A)(L-B)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Proof. In consequence of

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1 + \dots + i_N \leq k-J} (i_1 + \dots + i_N)^n p_{i_1 \dots i_N | j_1 \dots j_M} = \\ &= \sum_{I=0}^{k-J} I^n \frac{\binom{L-B-A}{k-J-I}}{\binom{L-B}{k-J}} \sum_{i_1 + \dots + i_N = I} \binom{A_1}{i_1} \dots \binom{A_N}{i_N} = \sum_{j=1}^n a_{jn} \frac{\binom{A}{j}}{\binom{L-B}{j}} \frac{(k-J)!}{(k-J-j)!}, \end{aligned}$$

the equality

$$P_{\eta}^{\xi}(\varphi_n - \mathbf{M}(\varphi_n)) = \sum_{j=1}^n a_{jn} \frac{\binom{A}{j}}{\binom{L-B}{j}} (k - \varphi_1) \dots (k - \varphi_1 - j + 1) - \mathbf{M}(\varphi_n) \quad n = 1, \dots, k$$

and analogously the equality

$$P_{\xi}^{\eta}(\varphi_n - \mathbf{M}(\varphi_n)) = \sum_{j=1}^n a_{jn} \frac{\binom{B}{j}}{\binom{L-A}{j}} (k - \varphi_1) \dots (k - \varphi_1 - j + 1) - \mathbf{M}(\varphi_n) \quad n = 1, \dots, k,$$

hold, where

$$\varphi_n = (\xi_1 + \dots + \xi_N)^n \text{ and } \varphi_n = (\eta_1 + \dots + \eta_M)^n \quad n = 1, \dots, k.$$

Analogously to the previous example, here (6.11) provides eigenvalues. Finally, we prove that these are all the non-zero eigenvalues:

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1 + \dots + i_N + j_1 + \dots + j_M \leq k} \frac{p_{i_1 \dots i_N j_1 \dots j_M}^2}{p_{i_1 \dots i_N} \cdot p_{j_1 \dots j_M}} = \\ &= \sum_{I+J \leq k} \frac{\binom{L-A-B}{k-I-J}^2}{\binom{L-A}{k-I} \binom{L-B}{k-J}} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_N = I \\ j_1 + \dots + j_M = J}} \binom{A_1}{i_1} \dots \binom{A_N}{i_N} \binom{B_1}{j_1} \dots \binom{B_M}{j_M} = \\ &= \sum_{I+J \leq k} \frac{\binom{A}{I} \binom{B}{J} \binom{L-A-B}{k-I-J}^2}{\binom{L-A}{k-I} \binom{L-B}{k-J}} = 1 + \sum_{n=1}^k \lambda_n^2. \end{aligned}$$

The last equality is the consequence of the fact, that neither side depends on N and M and that the left side of it is equal to the left side of the first equality for $N = M = 1$. Namely, in this particular case the left side of the last equality is equal to $1 + \sum_{n=1}^k \lambda_n^2$, since both the dimensions of $L_{\xi,0}^2$ and $L_{\eta,0}^2$ equal k , the number of possible pairs of eigenfunctions.

6.5. The distribution of (ξ, η) having the joint frequency function

$$h(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) = \begin{cases} \frac{1}{t} & \text{if } (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{\frac{1}{2}} + (y_1^2 + \dots + y_M^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $p > 0$, $q > 0$ and

$$t = \int \dots \int_{\substack{(x_1^2 + \dots + x_N^2)^{\frac{p}{2}} + (y_1^2 + \dots + y_M^2)^{\frac{q}{2}} \leq 1}} dx_1 \dots dx_N dy_1 \dots dy_M.$$

The marginal and the conditional frequency functions are

$$h_{1\dots N}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\pi^{\frac{M}{2}}}{t \Gamma\left(\frac{M}{2} + 1\right)} \left[1 - (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{p}{2} M}; \quad x_1^2 + \dots + x_N^2 \leq 1,$$

$$h_{1\dots M}(y_1, \dots, y_M) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{t \Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)} \left[1 - (y_1^2 + \dots + y_M^2)^{\frac{q}{2}}\right]^{\frac{q}{2} N}; \quad y_1^2 + \dots + y_M^2 \leq 1;$$

$$h_{1\dots N|1\dots M}(x_1, \dots, x_N | y_1, \dots, y_M) = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)}{\pi^{\frac{N}{2}}} \left[1 - (y_1^2 + \dots + y_M^2)^{\frac{q}{2}}\right]^{-\frac{N}{q}};$$

$$x_1^2 + \dots + x_N^2 \leq \left[1 - (y_1^2 + \dots + y_M^2)^{\frac{q}{2}}\right]^{\frac{2}{p}}, \quad y_1^2 + \dots + y_M^2 \leq 1,$$

$$h_{1\dots M|1\dots N}(y_1, \dots, y_M | x_1, \dots, x_N) = \frac{\Gamma\left(\frac{M}{2} + 1\right)}{\pi^{\frac{M}{2}}} \left[1 - (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{\frac{p}{2}}\right]^{-\frac{M}{p}};$$

$$y_1^2 + \dots + y_M^2 \leq \left[1 - (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{2}{q}}, \quad x_1^2 + \dots + x_N^2 \leq 1.$$

Theorem 6.8. The non-zero eigenvalues of the pair of operators \mathbf{P}_η^ξ , \mathbf{P}_ξ^η are

$$(6.13) \quad \lambda_n = \left[\frac{NM}{(pn + N)(qn + M)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad n = 1, 2, \dots$$

and the maximal correlation

$$(6.14) \quad \mathbf{S}(\xi, \eta) = \left[\frac{NM}{(p + N)(q + M)} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Proof. In consequence of

$$\int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_N^2 \leq \left[1 - (y_1^2 + \dots + y_M^2)^{\frac{q}{2}}\right]^{\frac{2}{p}}} (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{\frac{pn}{2}} h_{1\dots N|1\dots M}(x_1, \dots, x_N | y_1, \dots, y_M) \times$$

$$\times dx_1 \dots dx_N = \frac{N}{pn + N} \left[1 - (y_1^2 + \dots + y_M^2)^{\frac{q}{2}}\right]^n,$$

the equality

$$\mathbf{P}_\eta^\xi(\varphi_n - \mathbf{M}(\varphi_n)) = \frac{N}{pn + N} (1 - \varphi_1)^n - \mathbf{M}(\varphi_n) \quad n = 1, 2, \dots$$

and analogously the equality

$$\mathbf{P}_\xi^\eta(\psi_n - \mathbf{M}(\psi_n)) = \frac{M}{qn + M} (1 - \varphi_1)^n - \mathbf{M}(\psi_n) \quad n = 1, 2, \dots,$$

hold, where

$$\varphi_n = (\xi_1^2 + \dots + \xi_N^2)^{\frac{pn}{2}} \quad \text{and} \quad \psi_n = (\eta_1^2 + \dots + \eta_M^2)^{\frac{qn}{2}} \quad n = 1, 2, \dots$$

As in the above examples, here (6.13) are eigenvalues and (6.14) holds, for (6.13) gives all the non-zero eigenvalues:

$$\begin{aligned} & \int \dots \int \frac{h^2(x_1, \dots, x_M, y_1, \dots, y_M)}{h_{1\dots N}(x_1, \dots, x_N) h_{1\dots M}(y_1, \dots, y_M)} \times \\ & \quad \frac{p}{(x_1^2 + \dots + x_N^2)^{\frac{p}{2}} + (y_1^2 + \dots + y_M^2)^{\frac{q}{2}}} \leq 1 \\ & \times dx_1 \dots dx_N dy_1 \dots dy_M = \frac{M \Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)}{\pi^{\frac{N}{2}}} \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_N^2 \leq 1} [1 - (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{\frac{p}{2}}]^{\frac{M}{q}} \times \\ & \quad \times \int_0^1 [1 - (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{\frac{p}{2}}]^{\frac{1}{q}} \frac{p}{p} \sigma^{M-1} d\sigma dx_1 \dots dx_N = \\ & = \frac{M \Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)}{\pi^{\frac{N}{2}}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{N}{p}}{n} \frac{1}{qn + M} \times \\ & \quad \times \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_N^2 \leq 1} [1 - (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{\frac{p}{2}}]^n dx_1 \dots dx_N = \\ & = NM \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{N}{p}}{n} \frac{1}{qn + M} \int_0^1 (1 - \varrho^p)^n \varrho^{N-1} d\varrho = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N}{pn + N} \frac{M}{qn + M} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2. \end{aligned}$$

The integrals were calculated by introducing spherical coordinates.

(Received December 6, 1962.)

REFERENCES

- [1] BAHADUR, R. R.: "Measurable subspaces and subalgebras". *Proc. Amer. Math. Soc.* **6** (1955) 565—570.
- [2] BELL, C. B.: "Mutual information and maximal correlation as measures of dependence". *Ann. Math. Stat.* **33** (1962) 587—595.
- [3] CSÁKI, P.—FISCHER, J.: "On bivariate stochastic connection". *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5** (1960) 311—323.
- [4] CSÁKI, P.—FISCHER, J.: "Contributions to the problem of maximal correlation". *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5** (1960) 325—337.

- [5] GEBELEIN, H.: "Das statistische Problem der Korrelation als Variations- und Eigenwertproblem und sein Zusammenhang mit der Ausgleichsrechnung". *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **21** (1941) 364—379.
- [6] HOTELLING, H.: "Relations between two sets of variates". *Biometrika* **28** (1936) 321—377.
- [7] КАНТОРОВИЧ, Л. В. — АКИЛОВ, Г. П.: *Функциональный анализ в нормированных пространствах*. Гос. Издат. Физ. Мат. Лит., Москва, 1959.
- [8] КОЛМОГОРОВ, А. Н. — РОЗАНОВ, Ю. А.: "Об условиях сильного перемешивания гауссовского стационарного процесса." *Теория вероятностей и ее применения* **5** (1960) 222—227.
- [9] KRAMER, H. P.: "Maximal correlation and uncertainty". *Abstract* 576-213, *Notices Amer. Math. Soc.* **7** (1960) 977—978.
- [10] RÉNYI, A.: "On measures of dependence". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 441—451.
- [11] UMEGAKI, H.: "Conditional expectation in an operator algebra". *Tohoku Mathematical Journal* **6** (1954) 177—181.

ОБ ОБЩЕМ ПОНЯТИИ МАКСИМАЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

P. CSÁKI и J. FISCHER

Резюме

Авторы рассматривают некоторые свойства обобщенной максимальной корреляции. Цель статьи — обобщение, соответственно дополнение некоторых результатов, полученных авторами а также другими исследователями данной области.

В § 1 рассматривается понятие $\mathbf{S}(H_1, H_2)$, характеризующее взаимное расположение подпространств H_1, H_2 в общем Гильбертовом пространстве, являющееся в случае L^2 равным максимальной корреляцией.

Для этой цели авторы вводят в разделе 1.3 постулаты, основывающиеся на величине $\delta(H_1, H_2)$ определенной соотношением (1.7). Величина $\mathbf{S}(H_1, H_2)$, определенная соотношением (1.8) удовлетворяет этим постулатам. Приведенные здесь теоремы являются также обобщениями известных результатов, относящихся к максимальной корреляции (скалярных) случайных величин, а теорема 1.6 дает новое определение величины $\mathbf{S}(H_1, H_2)$.

В § 2 авторы показывают, что не существует такой не тождественно исчезающей функции величины $\mathbf{S}(H_1, H_2)$, произведенные которой множества $V(x, \epsilon)$ могли бы служить базисом топологии в множестве подпространств.

В § 3 дается толкование понятия максимальной корреляции в некоммутативной теории вероятностей.

В § 4 авторы рассматривают максимальную корреляцию между σ -алгебрами, обобщая при этом несколько их более ранних результатов (теоремы 4.1 и 4.4). В качестве частного случая рассматриваются максимальные корреляции между стохастическими процессами а также между векторными случайными величинами.

В § 5 авторы исследуют вопрос, в какой мере максимальная корреляция, как число измеряющее стохастическую связь, выражает наглядное содержание понятия этой связи. Они характеризуют интенсивность стохастической связи между двумя случайными величинами возможной

малостью среднеквадратической ошибки одной из случайных величин, рассчитанной от ее ожидаемой условной величины по отношению другой случайной величине при взаимно-однозначном преобразовании случайных величин.

В этой связи они доказывают, что максимальная корреляция двух случайных величин равна супремуму корреляционных коэффициентов их взаимнооднозначных функций (теорема 5.1), значит она тем больше чем теснее связь в вышеуказанном смысле.

В § 6 авторы определяют значение максимальной корреляции в нескольких частных случаях и примерах. Они показывают, что максимальную корреляцию векторных случайных величин с каноническим распределением дает наибольшая максимальная корреляция между их компонентами (теорема 6.2). Отсюда они водят, что максимальная корреляция векторных случайных величин с нормальным распределением равна их наибольшей канонической корреляции (теорема 6.5). В случае полиномиального распределения максимальная корреляция даётся формулой (6.10), а в случае полигипергеометрического распределения формулой (6.12). Максимальная корреляция приведенного в разделе 6.5 распределения даётся формулой (6.14).



ON THE ISOPERIMETRIC PROPERTY OF THE REGULAR HYPERBOLIC TETRAHEDRA

by

L. FEJES TÓTH

The isoperimetric property of the regular Euclidean tetrahedron, according to which of all Euclidean tetrahedra of equal surface-area the regular one has the greatest volume, is equivalent to the easily shown fact that of all tetrahedra circumscribed about the unit sphere the regular one has the least volume. Another simple way of proving the isoperimetric property of the regular tetrahedron in Euclidean space is Steiner's symmetrization.

None of these methods can be applied in non-Euclidean spaces. Since, on the other hand, the measurement of volume in non-Euclidean spaces is rather complicated, every information concerning the volume of a non-Euclidean tetrahedron must be considered as a valuable contribution to this subject. Thus it will be of some interest to give a simple direct proof of the following

Theorem 1. *In the hyperbolic space of all tetrahedra of given surface-area the regular tetrahedron has the greatest possible volume.*

Unfortunately, our proof fails to hold in the elliptic space.

The following lemmas operate in a Euclidean or non-Euclidean plane. They touch upon the *momentum*

$$M(D) = \int_D f(OP) dp$$

of a domain D with respect to a fixed origin O , where dp is the element of area at the point P and $f(x)$ is a strictly decreasing function. We shall denote a domain and its area with the same letter.

Lemma 1. *Let c be a circle centred at O and s a segment of c . Then the function $M(s)$ is convex for $0 < s < c/2$.*

In order to distinguish this particular function of one variable from our general symbol of the momentum we shall denote it with $\omega(s)$.

Lemma 2. *Let σ be a straight segment contained in the circle c but not containing the point O , σ' the central projection of σ on the boundary of c and t the convex hull of σ and σ' . Then*

$$M(t) \geq \omega(t).$$

As to the proofs of Lemmas 1 and 2 we refer to [1] and [2].

Lemma 3. *Of all convex n -gons of equal area the regular n -gon with centre O has the greatest possible value of M .*

Let π be a convex n -gon. We may suppose that π contains the point O . Otherwise we could displace π in such a way that each point of it would get nearer to O . By this means M obviously increases.

Let $\bar{\pi}$ be a regular n -gon centred at O and having the same area as π . Consider the intersections $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ of the sides of π with the circumcircle c of $\bar{\pi}$, as well as the corresponding domains t_1, \dots, t_n (some of which may be empty) defined in Lemma 2. Then, denoting the part of π outside c by π^* , we have

$$M(\pi) = M(c) - M(t_1) - \dots - M(t_n) + M(\pi^*)$$

whence, in view of Lemma 1 and 2 and Jensen's inequality,

$$\begin{aligned} M(\pi) &\leq M(c) - \omega(t_1) - \dots - \omega(t_n) + M(\pi^*) \leq \\ &\leq M(c) - n \omega\left(\frac{t_1 + \dots + t_n}{n}\right) + M(\pi^*). \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\pi = c - t_1 - \dots - t_n + \pi^* = c - ns = \bar{\pi},$$

where s is a segment of c cut off by a side of $\bar{\pi}$. Hence

$$\frac{t_1 + \dots + t_n}{n} = s + \frac{\pi^*}{n}$$

which enables us to write

$$\omega\left(\frac{t_1 + \dots + t_n}{n}\right) = \omega(s) + M(u)$$

u denoting a domain which completes the segment s to a segment of area $s + \pi^*/n$. Bearing in mind that u lies within c whilst π^* lies outside of it, we have

$$nM(u) \geq M(\pi^*)$$

on account of which

$$M(\pi) \leq M(c) - n\omega(s) - nM(u) + M(\pi^*) \leq M(c) - n\omega(s) = M(\bar{\pi}).$$

The case of equality is obvious.

Note that Lemma 3 remains true if the function $f(x)$, instead of being strictly decreasing, is non-increasing and satisfies the additional condition $f(x_1) > f(x_2)$, whenever $x_1 < r < R < x_2$, where r and R are the inradius and circumradius of $\bar{\pi}$. In this form Lemma 3 involves the well-known facts that of all n -gons of given area the regular n -gon has the greatest incircle and the smallest circumcircle. Thus Lemma 3 seems to be interesting in itself. Since it turns out to be useful also in other problems see ([3] and [4]) we shall refer to it as to the *momentum lemma*.

Lemma 4. *$M(\bar{\pi})$ is a concave function of the area $\bar{\pi}$.*

Let $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ be regular n -gons each centred at O in such a way that a ray issuing from O and containing a vertex of one polygon contains a vertex

of each of the remaining three polygons as well. Suppose furthermore that $\pi_1 < \pi_2 < \pi_3 < \pi_4$ and that $\pi_2 - \pi_1 = \pi_4 - \pi_3$. It is easy to give an area-preserving transformation of the polygonal ring R_1 enclosed by the boundaries of π_1 and π_2 onto the ring R_3 defined by π_3 and π_4 in such a way, that each point gets farther from O . It follows that $M(R_1) < M(R_3)$ showing that the slope of the function in question is at π_1 greater than at π_3 . The slope being decreasing, the function is concave.

Turning now to the proof of Theorem 1, let T be a tetrahedron in the hyperbolic space, O the centre of its insphere and t one of the four partial tetrahedra determined by O and a face Δ of T . We shall perform successive transformations on these tetrahedra. Terms like "increases" will be used as abbreviations instead of "increases, unless the transformation is an isometry".

Let O' be the foot of the perpendicular drawn from O to the plane p of Δ . Let dp be the "element of the plane p " at the point P (as well as its area), dv the volume of the "cone" with basis dp and apex O and $d\alpha$ the solid angle subtended by dp at O . Writing $OP = \varrho$, $\angle OPO' = \beta$ and denoting the surface-area and the volume of a sphere of radius ϱ with $S(\varrho)$ and $V(\varrho)$ we have

$$d\alpha = 4\pi \frac{\sin \beta}{S(\varrho)} dp \quad \text{and} \quad dv = \frac{V(\varrho) \sin \beta}{S(\varrho)} dp.$$

In view of

$$S(\varrho) = 4\pi \operatorname{sh}^2 \varrho, \quad V(\varrho) = \int_0^\varrho S(x) dx = \pi(\operatorname{sh} 2\varrho - 2\varrho)$$

and

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{sh} r}{\operatorname{sh} \varrho}, \quad r = OO'$$

we deduce

$$d\alpha = \operatorname{sh} r \operatorname{sh}^{-3} \varrho dp \quad \text{and} \quad dv = \frac{1}{4} \operatorname{sh} r \operatorname{sh}^{-3} \varrho (\operatorname{sh} 2\varrho - 2\varrho) dp.$$

Note that $\operatorname{sh}^{-3} \varrho$ is a decreasing function of ϱ . In order to show the same for

$$g(\varrho) = \operatorname{sh}^{-3} \varrho (\operatorname{sh} 2\varrho - 2\varrho)$$

we introduce the function

$$h(\varrho) = \frac{1}{2} \operatorname{sh}^4 \varrho g'(\varrho) = 3\varrho \operatorname{ch} \varrho - \operatorname{sh} \varrho (3 + \operatorname{sh}^2 \varrho)$$

and observe that $h(0) = 0$ and

$$h'(\varrho) = 3 \operatorname{sh} \varrho \left(\varrho - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varrho \right) < 0, \quad \varrho > 0.$$

This involves, for $\varrho > 0$, $h(\varrho) < 0$.

Obviously, the considered functions are at the same time decreasing functions of the distance $O'P$. Thus we can consider the volume v of the tetrahedron t , as well as its solid angle α at O as momenta of Δ with respect to the

point O' formed with strictly decreasing functions. Therefore, replacing Δ by a regular triangle of the same area centred at O' , both v and α will increase, according to the momentum lemma.

The considered transformation of Δ involves a transformation of the tetrahedron t into a "straight tetrahedron". In a quite similar way, we transform into straight tetrahedra the remaining tetrahedra based on the faces of T and having O as common apex. Again, we transform the obtained four tetrahedra into new straight tetrahedra leaving their altitudes invariant, replacing, on the other hand, their bases by equal (regular) triangles having the same total area as before. In view of Lemma 4 and Jensen's inequality, the total volume of the tetrahedra as well as the sum of their solid angles at O will increase also in this step. Now we subject the tetrahedra to a last transformation: we leave their bases invariant but increase their altitude. By means of this the volumes of the tetrahedra continue to increase, but their solid angles at the apex obviously decrease. Since before the last transformation these angles were greater than π , we can perform this transformation so as to obtain tetrahedra with solid angles equal to π . These tetrahedra can be put together so as to form one regular tetrahedron, having the same surface-area as the original one. But since the total volume of the partial tetrahedra has increased in each of the above steps, the volume of the regular tetrahedron is greater than that of T , unless T was originally regular.

This completes the proof of Theorem 1.

Using the expression *tangent polyhedron* for a polyhedron circumscribed about a sphere, we can state the following more general

Theorem 2. *In the hyperbolic space, let Π be a tangent polyhedron bounded by n v -gons. Let S be the surface area of Π , V its volume and v the volume of a straight v -gonal pyramid having a regular basis of area S/n and a solid angle at his apex equal to $4\pi/n$. Then*

$$V \leq nv.$$

Equality holds only for the Platonic solids.

For instance, in the hyperbolic space, of all isoperimetric tangent dodecahedra bounded by pentagons the regular dodecahedron has the greatest volume.

(Received January 9, 1963.)

REFERENCES

- [1] FEJES TÓTH, L.: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*. Berlin, 1953, p. 82.
- [2] IMRE, M.: "Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (in print.)
- [3] COXETER, H. S. M.—FEJES TÓTH, L.: "The total length of the edges of a non-Euclidean polyhedron with triangular faces". *Quart. J. Math. Oxford*.
- [4] TOMOR, B.: "A szabályos poliéderek egy szélsőérték-tulajdonsága állandó görbületű terekben". *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Osz. Közleményei*.

ОБ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕГУЛЯРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТЕТРАЭДРА

L. FEJES TÓTH

Резюме

Основным содержанием статьи является доказательство изопериметрического свойства экстремальной величины, относящейся к регулярному тетраэдру в гиперболическом пространстве: Среди тетраэдров заданного объема в гиперболическом пространстве наименьшую площадь поверхности имеет регулярный тетраэдр.

ON CLASSICAL OCCUPANCY PROBLEMS I.

by

A. BÉKÉSSY

1. Introduction Let there be n "cells" or "urns", and suppose that N "balls" are thrown in the cells independently of each other with the same probability $1/n$. As a result, there will be cells occupied by 0, 1, 2, ... balls resp. Denoting the number of cells, which contain exactly m balls by $\xi(n, N, m)$, an "occupancy problem" is to determine the probability distribution of the random variables ξ . This well known problem is treated and the probabilities in question are computed by elementary combinatorial methods e.g. in W. FELLER's book [1]. However, the expressions for these probabilities are rather inconvenient, so that various authors worked on determining the corresponding limit distributions. In this respect there are some earlier results due to R. von MISES [3] and to S. M. BERNSTEIN [2]. Recently, I. WEISS [4] has proved that supposing $n \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$, $N/n = \text{const.}$, the number of the empty cells, more precisely the *standardized* variables $\xi(n, N, 0)$ tends to be normally distributed. Moreover, F. N. DAVID and D. E. BARTON showed that the same is true more generally for $\xi(n, N, m)$. Their results are summarized in [10]. In a recent paper [5] A. RÉNYI generalized the theorem concerning the normal limit case in an other direction, he proved namely that the condition $N/n = \text{const.}$ is not necessary, the sufficient (and at the same time necessary) condition being $D \rightarrow \infty$, where

$$D^2 = ne^{-a}[1 - (1 + a)e^{-a}],$$

$$a = \frac{N + 1}{n},$$

but his paper deals with the special case $m = 0$ only. The purpose of the present paper is to generalize RÉNYI's result to $m \neq 0$, or with other words, to extend the corresponding theorem of DAVID and BARTON.

Theorem. *If both n and N tend to infinity and $a = (N + 1)/n$ is restricted by*

$$(1) \quad n a^m e^{-a} \rightarrow \infty$$

(since a may be eventually unbounded), whereas $m = \text{const.}$, $x = \text{const.}$ and $m \geq 2$, then the asymptotic relation

$$(2) \quad \mathbf{P} \left\{ \frac{\xi(n, N, m) - E(n, N, m)}{D(n, N, m)} < x \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$$

holds with

$$(3) \quad E(n, N, m) = n \frac{\alpha^m e^{-\alpha}}{m!}$$

and

$$(4) \quad D^2(n, N, m) = n \frac{\alpha^m e^{-\alpha}}{m!} \left[1 - \frac{\alpha^m e^{-\alpha}}{m!} \left(1 + \frac{(\alpha - m)^2}{\alpha} \right) \right].$$

As for $m = 0$ and $m = 1$, the same is true with the only difference that for α not bounded from below the condition

$$(5) \quad n \alpha^2 \rightarrow \infty$$

is necessary (instead of (1)).

The conditions (1) and (5) are equivalent to $D(n, N, m) \rightarrow \infty$.

If $D^2(n, N, m) \rightarrow \gamma \neq 0$, then the corresponding random variables are distributed on the limit according to Poisson's law. In order to give a more detailed description, if $n \alpha^m e^{-\alpha}/m! \rightarrow \gamma \neq 0$ because α tends to infinity, then

$$(6) \quad \mathbf{P}\{\xi(n, N, m) = k\} \rightarrow \frac{\gamma^k e^{-\gamma}}{k!}$$

with no restriction on m , (see e. g. [1], [3], [8]), but if $n \alpha^m e^{-\alpha}/m! \rightarrow \gamma$ because α tends to zero, then (6) holds only for $m \geq 2$, and for the exceptional cases we have

$$(7) \quad \mathbf{P}\{\xi(n, N, 0) - n + N = k\} \rightarrow \frac{(\gamma/2)^k e^{-\gamma/2}}{k!}$$

and

$$(8) \quad \mathbf{P}\left\{\frac{N - \xi(n, N, 1)}{2} < x\right\} \rightarrow \sum_{k=0}^{[x]} \frac{(\gamma/2)^k e^{-\gamma/2}}{k!}$$

where $\gamma = \lim n \alpha^2$.

Remark. It follows from (8) that the probability of $N - \xi(n, N, 1)$ being an even number tends to 1. This somewhat queer phenomenon may be roughly explained as follows. The variable $N - \xi(n, N, 1)$ is the number of balls placed in cells containing more than one ball. In the case $\lim n \alpha^2 < \infty$ there are relatively few balls at all, therefore with probability tending to 1 the small set of cells containing more than one ball consists of cells having exactly two ones.

2. The G-functions of the ξ 's. In the course of proving WEISS' theorem, A. RÉNYI has found that a certain generating function of the characteristic functions of $\xi(n, N, 0)$ turns to be a very simple expression. In fact, denoting the characteristic function by $\Phi(n, N, 0, t)$, the G-function

$$G(n, z, 0, t) = \sum_{N=0}^{\infty} \Phi(n, N, 0, t) \frac{(nz)^N}{N!}$$

is simply $(e^z + e^{it} - 1)^n$. Similarly, the G-function of the variables $\xi(N, n, m)$ is relatively simple,

$$(9) \quad G(n, z, m, t) = \left[e^z + (e^{it} - 1) \frac{z^m}{m!} \right]^n,$$

where $G(n, z, m, t)$ is defined as

$$(10) \quad \sum_{N=0}^{\infty} \mathbf{E} \{ e^{it\xi(n, N, m)} \} \frac{(nz)^N}{N!}.$$

In order to prove (9), the starting point will be the joint distribution of the variables ξ (for various m). Denote $p(n, N, k_0, k_1, \dots, k_m)$ the probability of the event that after having distributed N balls, the number of the cells containing 0, 1, 2, \dots , m balls is $k_0, k_1, k_2, \dots, k_m$ resp. For the probabilities $p(n, N, k_0, k_1, \dots, k_m)$ the following recurrence relation holds:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} p(n, N+1, k_0, k_1, \dots, k_m) &= p(n, N, k_0, \dots, k_m) \frac{n - k_0 - \dots - k_m}{n} + \\ &+ p(n, N, k_0+1, k_1-1, \dots, k_m) \frac{k_0+1}{n} + \\ &+ p(n, N, k_0, k_1+1, k_2-1, \dots, k_m) \frac{k_1+1}{n} + \dots \\ &\dots + p(n, N, k_0, \dots, k_{m-1}+1, k_m-1) \frac{k_{m-1}+1}{n} + \\ &+ p(n, N, k_0, \dots, k_{m-1}, k_m+1) \frac{k_m+1}{n}, \end{aligned} \right.$$

expressing the change in the probability of the event characterized by the numbers k_0, k_1, \dots, k_m after having thrown one more ball. Denoting the characteristic function by $\Phi(n, N, t_0, t_1, \dots, t_m)$ and the G-function

$$\sum_{N=0}^{\infty} \Phi(n, N, t_0, t_1, \dots, t_m) \frac{(nz)^N}{N!}$$

by $G(n, z, t_0, \dots, t_m)$, we obtain from (11) the partial differential equation

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{\partial G}{\partial z} &= G + \frac{1}{n} (e^{i(t_1-t_0)} - 1) \frac{\partial G}{i \partial t_0} + \\ &+ \frac{1}{n} (e^{i(t_2-t_1)} - 1) \frac{\partial G}{i \partial t_1} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n} (e^{i(t_m-t_{m-1})} - 1) \frac{\partial G}{i \partial t_{m-1}} + \\ &+ \frac{1}{n} (e^{-it_m} - 1) \frac{\partial G}{i \partial t_m}, \end{aligned} \right.$$

which may be solved e. g. by the method of characteristics, and the solution satisfying the suitable initial condition $G(n, 0, t_0, \dots, t_m) = e^{int_0}$ is

$$(13) \quad G(n, z, t_0, t_1, \dots, t_m) = \left[e^z + \sum_{\mu=0}^m \frac{z^\mu}{\mu!} (e^{it_\mu} - 1) \right]^n.$$

From (13) the equation (9) immediately follows.

Probabilities of various events are easily derivable from (9) or (13) by differentiating; e. g. the probability of having k cells, each occupied by m balls is (see [1])

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^N k!} \frac{\partial^{N+k}}{\partial z^N \partial x^k} \left(e^z + (x-1) \frac{z^m}{m!} \right) \Big|_{z=0}^n = \\ & = \frac{(-1)^k n! N!}{n^N k!} \sum_{s=k}^n \frac{(-1)^s}{(s-k)! (n-s)!} \cdot \frac{(n-s)^{N-ms}}{(m!)^s (N-ms)!} \end{aligned}$$

(Put $(a!)^{-1}$ equal to zero for $a < 0$).

3. Expectation and variance. By differentiating (9), we have for the expectation $\mathbf{E}\{\xi(n, N, m)\}$ and for the quadratic moment $\mathbf{E}\{\xi^2(n, N, m)\}$

$$(14) \quad \left\{ \mathbf{E}\{\xi(n, N, m)\} = \frac{1}{n^N} \frac{\partial^{N+1}}{\partial t \partial z^N} G(n, z, m, t) \Big|_{t=0} = \frac{n}{n^N} \binom{N}{m} (n-1)^{N-m}, \right.$$

and

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{E}\{\xi^2(n, N, m)\} &= -\frac{1}{n^N} \frac{\partial^{N+2}}{\partial t^2 \partial z^N} G(n, z, m, t) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{n}{n^N} \binom{N}{m} (n-1)^{N-m} + \frac{n(n-1)}{n^N} \binom{N}{m} \binom{N-m}{m} (n-2)^{N-2m}. \end{aligned} \right.$$

Supposing $N \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ and $N/n^2 \rightarrow 0$, it follows from (14) that asymptotically

$$(16) \quad \mathbf{E}\{\xi(n, N, m)\} \sim n \frac{\alpha^m e^{-\alpha}}{m!} = E(n, N, m),$$

(where $\alpha = (N+1)/n$). With more difficulties, — although the computation is quite elementary — under the same conditions as former one has

$$(17) \quad \begin{aligned} \mathbf{D}^2\{\xi(n, N, m)\} &= \mathbf{E}\{\xi^2(n, N, m)\} - \mathbf{E}\{\xi(n, N, m)\}^2 \sim \\ &\sim \frac{n \alpha^m e^{-\alpha}}{m!} \left[1 - \frac{\alpha^m e^{-\alpha}}{m!} \left(1 + \frac{(\alpha-m)^2}{\alpha} \right) \right] = D^2(n, N, m). \end{aligned}$$

The difficulty said above arises because of the fact that $\mathbf{E}\{\xi^2\}$ is asymptotically equal to $\mathbf{E}\{\xi\}^2$ and $\mathbf{D}^2\{\xi\}$ being their difference, one must take account of asymptotic terms of lower order in $\mathbf{E}\{\xi\}$ and $\mathbf{E}\{\xi\}^2$ — too.

The rate D^2/E tends to 1 for $\alpha \rightarrow 0$, but only if $m \geq 2$, whereas for $m = 0$

$$\frac{D^2}{E} \sim \frac{\alpha^2}{2},$$

resp. for $m = 0$

$$\frac{D^2}{E} \sim 2\alpha.$$

This peculiarity shows that for $\alpha \rightarrow 0$ the asymptotic behaviour of the distribution of $\xi(n, N, 0)$ resp. $\xi(n, N, 1)$ will eventually be different from that of $\xi(n, N, m)$ with $m \geq 2$.

4. Preliminary remarks concerning the proof of the theorem. It follows from (9) by Cauchy's formula that the characteristic function of $\xi(n, N, m)$ is

$$(18) \quad \Phi(n, N, m, t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{N!}{n^N} \cdot \oint \left[e^z + (e^{it} - 1) \frac{z^m}{m!} \right]^n z^{-N-1} dz,$$

where the path of integration may be taken to be along a circle about the point $z = 0$. Having the characteristic function in the integral form (18), its asymptotic behaviour can be effectively analysed by Riemann's and Debye's method of steepest descents well known in the analysis [9]. On the other hand, according to the continuity theorem, the asymptotics of the characteristic function and that of the distribution correspond to each other. In the present case however, saddle points on the z plane, necessary for employing Debye's method, are not real for real values of the argument t . In order to avoid the inconvenience involved with complex-valued saddle points, we regard in what follows the variable t as pure imaginary, in which case it can be shown that there exists at least one saddle point b on the real positive z axis. As for the validity of the continuity theorem, I. H. CURTISS has shown [7] that it is sufficient to analyse the behaviour of $\psi(x) = \Phi(-ix)$ for real x 's in the both sided neighbourhood of $x = 0$. More precisely, in the sense of Curtiss' theorem it is sufficient to show that for x real and constant the asymptotic relation

$$\Psi\left(n, N, m, \frac{x}{D}\right) \cdot \exp\left\{-\frac{x E}{D}\right\} \sim e^{x^2/2}$$

is valid (since we expect normal limit distribution), where E and D have the values (3) and (4) resp. Hence it is to be proved that

$$(19) \quad \frac{N!}{n^N} \frac{1}{2\pi i} \oint \left(e^z + p \frac{z^m}{m!} \right)^n z^{-N-1} dz \sim \exp\left\{ \frac{x E}{D} + \frac{x^2}{2} \right\}$$

(where p denotes $e^{\frac{x}{D}} - 1$ as abbreviation) under the restrictions imposed upon x, n, N and α previously.

The saddle points b , defined as values of z , for which

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\left(e^z + p \frac{z^m}{m!} \right)^n z^{-N-1} \right] = 0,$$

are now determined by the equation

$$(20) \quad b = \alpha + (\alpha - m) p \frac{b^m e^{-b}}{m!}.$$

There lies on the real positive z axis at least one point b satisfying equation (20). (The later estimations will show that for sufficiently large n only one positive b exists.)

Considering the integral (19), let us take the path of integration through the saddle point b . Putting $z = bw$ we have

$$(21) \quad \Psi\left(n, N, m, \frac{x}{D}\right) = F \cdot J,$$

where

$$(22) \quad F = \frac{N!}{n^N} \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \cdot \left(e^b + p \frac{b^m}{m!} \right)^n b^{-N}$$

and

$$(23) \quad J = \frac{\sqrt{N}}{i\sqrt{2\pi}} \oint \left[\frac{e^{b(w-1)} + pw^m \frac{b^m e^{-b}}{m!}}{1 + p \frac{b^m e^{-b}}{m!}} \right]^n w^{-N-1} dw.$$

The factor F in (21) is (apart from a factor $\frac{N!}{n^N} \frac{1}{\sqrt{2\pi N}}$) the value of the integrand in the saddle point b , and as a matter of fact, the asymptotical behaviour of ψ is wholly governed by F , because the other factor J tends to 1 in all cases considered later on.

The proof of the theorem (including also the "Poisson-cases") may be conducted in three steps these being the analysis of the behaviour of the saddle point b , the factor F and the integral J respectively.

5. The expansion of b . Let us suppose first $D \rightarrow \infty$, then $p = o(1)$, more precisely

$$(24) \quad p = e^{x/D} - 1 = O\left(\frac{e^{x/2}}{\alpha^{m/2} \sqrt{n}}\right) + O\left(\frac{1}{\alpha \sqrt{n}}\right).$$

If α is bounded away both from zero and from infinity, then

$$(25) \quad b = \alpha + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

because of (24), but (25) involves

$$\frac{b^m e^{-b}}{m!} = \frac{\alpha^m e^{-\alpha}}{m!} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

so that from (20)

$$(26) \quad b = \alpha + (\alpha - m) p \frac{\alpha^m e^{-\alpha}}{m!} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right]$$

follows. After repeated application of (20) and (25) also the more elaborate asymptotic expansions, needed for the subsequent calculations

$$(27) \quad b = \alpha + (\alpha - m) p \frac{\alpha^m e^{-\alpha}}{m!} - \frac{(\alpha - m)^3}{\alpha} p^2 \frac{\alpha^{2m} e^{-2\alpha}}{(m!)^2} + O\left(\frac{1}{n \sqrt{n}}\right)$$

and

$$(28) \quad p \frac{b^m e^{-b}}{m!} = \frac{b - \alpha}{\alpha - m} = p \frac{\alpha^m e^{-\alpha}}{m!} - \frac{(\alpha - m)^2}{\alpha} p^2 \frac{\alpha^{2m} e^{-2\alpha}}{(m!)^2} + O\left(\frac{1}{n \sqrt{n}}\right)$$

can be deduced.

If $\alpha \rightarrow \infty$ then first we have from (20)

$$b > c\alpha > m,$$

for α large with a c positive and tending to 1. It follows therefore that

$$\frac{b^m e^{-b}}{m!} < \frac{(c\alpha)^m e^{-c\alpha}}{m!} = O(\alpha^m e^{-c\alpha})$$

and

$$p(\alpha - m) \frac{b^m e^{-b}}{m!} = O\left(\frac{e^{-\alpha/(2+\eta)}}{\sqrt{n}}\right)$$

(where $\eta \rightarrow 0$), i.e. (25) holds in the present case, too. The expansions (27) and (28) are now deducible as former.

If $\alpha \rightarrow 0$ and $m \geq 2$, then from (20) we have

$$\frac{b}{\alpha} < 1 + m|p| \frac{b}{\alpha} \cdot \frac{b^{m-1} e^{-b}}{m!} < 1 + \frac{b}{\alpha} m^2 |p|,$$

thus b/α is bounded from above. With sufficiently large n it follows then $b < C\alpha < m$ with a C bounded from above so that we have

$$b^m e^{-b} = O(\alpha^m)$$

and

$$p \frac{b^m e^{-b}}{m!} = O\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right),$$

thus

$$(29) \quad b = \alpha \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right].$$

With repeated application of (20) and (29) the expansions (27) and (28) are deducible again.

For $\alpha \rightarrow 0$ and $m = 1$ we obtain in the same manner as former the asymptotic expansions (27) and (28), but now with the remainder term $O\left(\frac{1}{\alpha^2 n \sqrt{n}}\right)$. Similarly, for $\alpha \rightarrow 0$ and $m = 0$ the second of the expansions

$$(30) \quad b = \alpha + p \alpha e^{-\alpha} - p^2 \alpha^2 e^{-2\alpha} + O\left(\frac{1}{n \sqrt{n}}\right)$$

$$(31) \quad p e^{-b} = \frac{b - \alpha}{\alpha} = p e^{-\alpha} - p^2 \alpha e^{-2\alpha} + O\left(\frac{1}{\alpha n \sqrt{n}}\right)$$

corresponding to (28), has the remainder term $O\left(\frac{1}{\alpha n \sqrt{n}}\right)$ instead of $O\left(\frac{1}{n \sqrt{n}}\right)$.

As $D \rightarrow \gamma = \text{const.} \neq 0$, we take $p = e^x - 1 = \text{const.}$ and the asymptotic behaviour of b may be expressed by

$$(32) \quad b = \alpha + (\alpha - m) \frac{p\gamma}{n} (1 + o(1))$$

if $\alpha \rightarrow \infty$ (without restriction on n) or if $\alpha \rightarrow 0$ but $m \neq 0, 1$. For $\alpha \rightarrow 0$ and $m = 0, 1$ it is enough to show that

$$b \sim \frac{\alpha}{1+p} \sim \frac{\sqrt{\gamma}}{(1+p)\sqrt{n}}$$

where now $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha^2$.

6. The asymptotic behaviour of the factor F . In order to have a convenient form for F , we make use of Stirling's formula and of the equation (20). Thus we obtain

$$(33) \quad \begin{aligned} \log F = & n(\alpha - m) p \frac{b^m e^{-b}}{m!} + n \log \left(1 + p \frac{b^m e^{-b}}{m!} \right) - \\ & - N \log \left(1 + p \frac{\alpha - m}{\alpha} \cdot \frac{b^m e^{-b}}{m!} \right) + o(1) \end{aligned}$$

as starting-point. Supposed $D \rightarrow \infty$, the terms with logarithmic factors in (33) can be expanded down to $o(1)$, and regard to

$$p = e^{x/D} - 1 = \frac{x}{D} + \frac{x^2}{2D^2} + O\left(\frac{1}{D^3}\right)$$

and to (28), we easily obtain

$$(34) \quad \log F = \frac{x E}{D} + \frac{x^2}{2} + o(1).$$

However, this simple procedure can only be applied if the terms $p b^m e^{-b}/m!$ and $p \frac{\alpha - m}{\alpha} \cdot b^m e^{-b}/m!$ have the order $O(1/\sqrt{n})$, that does not hold in the cases $\alpha \rightarrow 0$, $m = 0$ and $m = 1$. If $m = 0$, then

$$\log F = n \alpha p e^{-b} + (n - n \alpha) \log(1 + p e^{-b}) + o(1).$$

and in order to avoid the mentioned difficulty, let us put

$$\log(1 + p e^{-b}) = \log(1 + p) + \log \left(1 - \frac{p(1 - e^{-b})}{1 + p} \right),$$

the term $p(1 - e^{-b})$ being $O(1/\sqrt{n})$. Similarly, if $m = 1$, then

$$\log F = n(\alpha - 1) p b e^{-b} + n \log(1 + p b e^{-b}) - n \alpha \log \left(1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha} p b e^{-b} \right).$$

Considering that from (20)

$$1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha} pb e^{-b} = \frac{b}{\alpha},$$

and that the quantity b/α may be expressed in the case $m = 1$ more convenient by

$$\frac{b}{\alpha} = \frac{1}{1 - (\alpha - 1) p e^{-b}},$$

we may put

$$\begin{aligned} n \alpha \log \left(1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha} pb e^{-b} \right) &= \\ &= -n \alpha \log(1 + p) - n \alpha \log \left(1 - \frac{p(1 - e^{-b} + \alpha e^{-b})}{1 + p} \right). \end{aligned}$$

After expanding the logarithmic terms and using (28) the result will be (34) again, nevertheless, the computations are, however elementary, somewhat more cumbersome, because the remainder term in (28) as said above is now considerably greater than $O(n^{-1/2})$.

Supposing $D \rightarrow \gamma = \text{const.} \neq 0$ the corresponding results are

$$\log F = \frac{1}{2} \gamma p + (n - N) \log(1 + p) + o(1)$$

for $m = 0$, $\alpha \rightarrow 0$,

$$\log F = N \log(1 + p) - \frac{1}{2} \gamma \frac{p(p + 2)}{(p + 1)^2} + o(1)$$

for $m = 1$, $\alpha \rightarrow 1$ with $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} n \alpha^2$, and

$$\log F = \gamma p + o(1)$$

with $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} n \alpha^m e^{-\alpha} / m!$ in all other cases.

7. The asymptotics of the integral J . As to the integral (23), according to Debye's method, one must find and take the steepest descent's path through the critical saddle point. This is, however, in general not necessary, it is sufficient to find such a line as a path of integration, which is convenient to apply Laplace's method (see e.g. [9]). The fact that the integrand will be eventually complex-valued, does not matter, rather the difficulty arises that in the present case the integrand has two parameters, both tending to infinity, their rate α being not previously fixed. Applying Laplace's method according to its sense, the integral will be divided into three parts; the first, „essential” part J_1 , containing the close vicinity of the saddle point b , tends to 1, whereas the other two, „unessential” parts tend to zero. This will be proved as follows.

a) $\alpha \rightarrow \infty$, $\liminf n \alpha^m e^{-\alpha} > 0$. We take the straight line through the saddle point parallel to the imaginary axis to be the path integration. It is easy to see that the new path is equivalent to the original circle. Putting

$w = 1 + iu$, we have

$$J = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{iub}(1+iu)^{-m} + p \frac{b^m e^{-b}}{m!}}{1 + p \frac{b^m e^{-b}}{m!}} \right)^n (1+iu)^{n(m-a)} du.$$

Divide the integral into three parts, the "essential" part being

$$J_1 = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n^{-1/5}}^{n^{-1/5}} f(u) du,$$

where $f(u)$, with respect to (20) may be written as

$$\log f(u) = n \log \left(1 + \frac{\alpha - m}{b - m} \left(\frac{e^{ibu}}{(1+iu)^m} - 1 \right) \right) - n(\alpha - m) \log(1+iu).$$

Expanding $\log f(u)$ in powers of u to $O(u^3)$ we obtain

$$\log f(u) = -\frac{(N+1)u^2}{2} \left(1 - \frac{m}{\alpha} \right) \left(b - \alpha + \frac{b}{b-m} \right) + O(nb^3 u^3),$$

i.e.

$$J_1 = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n^{-1/5}}^{n^{-1/5}} \exp \left\{ -\frac{N+1}{2} u^2 [1 + o(1) + O(\alpha^2 u)] \right\} du = 1 + o(1),$$

because of $O(\alpha^2 u) = O(\alpha^2 n^{-1/5}) = o(1)$ and $N^{1/2} n^{-1/5} \rightarrow \infty$.

As to the "unessential" part

$$J_2 = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \int_{n^{-1/5}}^{\infty} f(u) du,$$

we have the inequality

$$\left| \frac{e^{ibu}(1+iu)^{-m} + p \frac{b^m e^{-b}}{m!}}{1 + p \frac{b^m e^{-b}}{m!}} \right|^n \leq \left(\frac{1 + |p| \frac{b^m e^{-b}}{m!}}{1 - |p| \frac{b^m e^{-b}}{m!}} \right)^n = O(e^{c\sqrt{n}}),$$

where c is bounded from above, so that

$$|I_2| = O(e^{c\sqrt{n}}) \cdot O\left(\frac{1}{(1+n^{-2/5})^{\frac{(\alpha-m)n}{2}}} \right) \cdot O(\sqrt{N}) = o(1),$$

and similarly

$$I_3 = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-n^{-1/5}} f(u) du = o(1).$$

b) $\limsup \alpha < \infty$. For the path of integration we take the unit circle around the point $w = 0$ on the w -plane. Putting $w = e^{iu}$, we have from (23)

$$J = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\exp\{-b(1 - e^{iu})\} + p e^{imu} \frac{b^m e^{-b}}{m!}}{1 + p \frac{b^m e^{-b}}{m!}} \right]^n e^{-iNu} du =$$

$$= \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) du,$$

the essential part being now

$$J_1 = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} g(u) du,$$

where $\delta > 0$ is arbitrarily small, but fixed.

For the unessential part

$$I_2 = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta}^{\pi} g(u) du$$

with respect to (20) and (35) the inequality

$$|I_2| = O(\sqrt{N}) \cdot e^{-nb(1-\cos\delta)} \cdot \max_{\delta \leq u \leq \pi} \exp \left\{ n \frac{\alpha - m}{b - m} |p| \frac{b^m}{m!} |e^{imu + b(1-e^{iu})} - e^{-b}| \right\}$$

is easily obtainable. Since the function $C = \exp \{imu + b(1-e^{iu})\} - e^{-b}$ is bounded,

$$(36) \quad |I_2| = O(\sqrt{N}) \cdot O(\exp \{-nb(1 - \cos \delta - o(1)) |p| b^{m-1}\})$$

follows.

If $p \rightarrow 0$, then the final result is

$$(37) \quad |I_2| = O(\sqrt{N}) \cdot O(e^{-N\eta}) = o(1)$$

(where $\liminf \eta > 0$). For $m = 0$ the proof seems at first sight to be incorrect, but considering that for $m = 0$ the function C is bounded by $O(b)$ the term $o(1)$ in (36) can be now replaced by $O(b)$.

The inequality (36) involves (37) also if $p = \text{const.}$, $\alpha \rightarrow 0$, $n\alpha^m \rightarrow \text{const.}$ for $m \geq 2$, but the cases $n\alpha^2 \rightarrow \text{const.}$, $m = 0$ or 1 need special considerations. If $m = 1$, then

$$|I_2| = O(\sqrt{N}) \cdot \max_{\delta \leq u \leq \pi} \left| \frac{\exp \{be^{iu}\} + pbe^{iu}}{e^b + p} \right|^n =$$

$$= O(\sqrt{N}) \cdot \max_{\delta \leq u \leq \pi} |1 + (p+1)b(e^{iu} - 1) + O(b^2)|^n.$$

but with regard to $b^2 = O\left(\frac{1}{n}\right)$ we have

$$|I_2| = O(\sqrt{N}) [1 - 2b(p+1)[1 - \cos \delta + O(b)]]^{n/2},$$

and $p+1$ being always positive the relation (37) follows. For $m=0$ the proof of (36) is similar to that for $m=1$.

There remained to show that the essential part J_1 tends to 1. As former, the logarithm of $\log g(u)$ will be expanded to $O(u^3)$, but care must be taken that, with regard to the possibility of $b \rightarrow 0$, the remainder term should have the form $O(bu^3)$, therefore it will be convenient to use a special form of $\log g(u)$, easily obtainable from (20) and (35):

$$\begin{aligned} \log g(u) = n \log & \left[1 + \frac{\alpha - m}{b - m} \left[\exp \{-b(1 - e^{iu})\} - 1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + p \frac{b^m e^{-b}}{m!} (e^{imu} - 1) \right] \right] - iNu \end{aligned}$$

leading to

$$\begin{aligned} \log g(u) &= iu - \frac{bnu^2}{2} \cdot \frac{\alpha - m}{b - m} \left[1 + b + m^2 p \frac{b^{m-1} e^{-b}}{m!} - \frac{\alpha^2}{b} \cdot \frac{b - m}{\alpha - m} \right] + O(bu^3) = \\ &= iu - \frac{Nu^2}{2} [1 + o(1) + O(u)], \end{aligned}$$

and, having in mind that δ is fixed, but arbitrarily small,

$$J_1 = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{iu - \frac{Nu^2}{2} [1 + o(1) + O(u)]} du \rightarrow 1$$

follows, making the proof of the theorem complete.

(Received January 11, 1963.)

REFERENCES

- [1] FELLER, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 1. (Second Edition) N. Y. 1957. (Problem 22. page 103).
- [2] BERNSTEIN, S. N.: *Teoriya Veroyatnostey*. Moskva, 1946.
- [3] von MISES, R.: "Über Aufteilung und Besetzungswahrscheinlichkeiten". *Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul*, N. S. 4 (1939) 145—163.
- [4] WEISS, I.: "Limiting distribution in some occupancy problems", *Ann. Math. Stat.*, 29 (1958) 878—884.
- [5] RÉNYI, A.: "Three new proofs and a generalisation of a theorem of Irving Weiss". *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* 7 (1962) 203—215.
- [6] BÉKÉSSY, A.: "Egy elosztási problémára vonatkozó határelosztástétel új bizonyítása". *MTA III. Osztályának Közleményei* 12 (1962) 329—334.
- [7] CURTISS, J. H.: "A note on the theory of moment generating functions". *Ann. Math. Stat.* 13 (1942) 430—433.
- [8] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: "On a classical problem of porability theory". *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* 6 A. (1961) 215—220.
- [9] ERDÉLYI, A.: *Asymptotic expressions*. Dover Publ., 1956.
- [10] DAVID, F. N.—BARTON, D. E.: *Combinatorial Chance*. London, 1962, Ch. Griffin et Comp.

О КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ЗАПОЛНЕНИЯ ЯЩИКОВ I.

A. BÉKÉSSY

Резюме

Пусть события a_1, a_2, \dots, a_n являются всеми элементами дискретного и конечного поля событий и пусть их вероятностное распределение равномерно. Справшивается, сколько будет таких событий которые точно m ряда ($m = 0, 1, 2, \dots$) состоятся в некотором образце этих событий, состоящего из N элементов. Обозначим число этих событий через $\xi(n, N, m)$. Поставленный вопрос может быть сформирован более наглядно посредством ящиков и шариков таким образом: если распределить N шариков в n ящиках случайным способом, какое будет число ящиков содержащих точно m шариков.

Статья содержит следующую теорему:

если $n \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ и $m = \text{конст.}$ и если, кроме того

$$D^2 = n \frac{\alpha^m e^{-\alpha}}{m!} \left[1 - \frac{\alpha^m e^{-\alpha}}{m!} \left(1 + \frac{(\alpha - m)^2}{\alpha} \right) \right] \rightarrow \infty,$$

где $\alpha = \frac{N+1}{n}$, тогда предельное распределение стандартизированного случайного переменного $\xi(n, N, m)$ является нормальным. (Сравн. (2), (3), (4)). В качестве дополнения автор приводит в больших чертах также предельный случай $D^2 \rightarrow \gamma = \text{konst} \neq 0$.

Теорему, высказанную в статье ранее доказал А. Рёнун [5] для частного случая $m = 0$, соответственно доказали ее для общего случая F. N. David и D. E. Barton [10], однако при более сильных ограничениях.



ON SEQUENCES OF QUASI-EQUIVALENT EVENTS, I

by

P. RÉVÉSZ

Introduction

Let $\{\Omega, \mathcal{S}, \mathbf{P}\}$ be a probability space, A_1, A_2, \dots be a sequence of events (i.e. A_i ($i = 1, 2, \dots$) is an element of the σ -algebra \mathcal{S}) and ξ_1, ξ_2, \dots be a sequence of random variables (i.e. ξ_i ($i = 1, 2, \dots$) is a real-valued measurable function defined on Ω). We use the following notations: $\mathcal{B}(A_1, A_2, \dots)$ is the smallest σ -algebra which includes the events A_1, A_2, \dots ; $\mathcal{B}(\xi_1, \xi_2, \dots)$ is the smallest σ -algebra with respect to which ξ_1, ξ_2, \dots are measurable. The

σ -algebra $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}(A_n, A_{n+1}, \dots)$ is called the tail of the sequence A_1, A_2, \dots ;

analogously the σ -algebra $\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}(\xi_n, \xi_{n+1}, \dots)$ is called the tail of the sequence

ξ_1, ξ_2, \dots . The σ -algebra \mathcal{F} is called trivial if for each set $A \in \mathcal{F}$ $\mathbf{P}(A) = 0$ or $\mathbf{P}(A) = 1$. Especially if the σ -algebra \mathcal{F} is the tail of a sequence A_1, A_2, \dots or ξ_1, ξ_2, \dots and \mathcal{F} is trivial then we say that the tail of A_1, A_2, \dots is trivial resp. the tail of ξ_1, ξ_2, \dots is trivial. We say that the σ -algebras \mathcal{F} and \mathcal{G} are equivalent ($\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$) if for every $F \in \mathcal{F}$ there exists a $G \in \mathcal{G}$ such that¹ $\mathbf{P}(F \Delta G) = 0$ and conversely for every $G \in \mathcal{G}$ there exists an $F \in \mathcal{F}$ such that $\mathbf{P}(F \Delta G) = 0$.

An important question of the theory of probability is the following: how can be characterized of the sequence of events (random variables) having trivial tail. A classical result in this direction is the zero-one law of KOLMOGOROV [1]:

Zero-one law. Let A_1, A_2, \dots (ξ_1, ξ_2, \dots) be a sequence of mutually independent events (random variables). Then the tail of the sequence A_1, A_2, \dots (ξ_1, ξ_2, \dots) is trivial.

In his paper [2] SUCHESTON obtains a characterization of the sequence of events having trivial tail.

Another direction of the generalization of the zero-one law is the following: we have a given sequence of events having the tail \mathcal{F} , how can \mathcal{F} be characterized. In this paper we characterize the tail of a special type of sequences of events, namely we will consider the sequence of equivalent events and further a more general class of sequences which will be called sequences of quasi-equivalent events. The characterization of quasi-equivalent events from other points

¹ Here and in what follows $A \Delta B$ denotes the symmetric difference of the events A and B .

of view will be given too. Namely we will obtain the generalization of the well-known properties of equivalent events for quasi-equivalent events.

In the present paper we use some concepts and results of papers [3], [4] and [5]. For the convenience of the reader we recall these concepts and results.

Definition 1 (see [3]). The sequence of events A_1, A_2, \dots is called mixing if

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n | B) = \lambda$$

where $0 < \lambda < 1$ and B is any event such that $\mathbf{P}(B) > 0$ ($\mathbf{P}(A|B)$ denotes the conditional probability of the event A under the condition B).

Definition 2 (see [4]). The sequence of events A_1, A_2, \dots is called stable if for every $B \in \mathcal{S}$ the limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n | B) = \mathbf{Q}(B)$$

exists. It is easy to see that $\mathbf{Q}(B)$ is a measure defined on the space $\{\Omega, \mathcal{S}\}$ which is absolutely continuous with respect to the measure \mathbf{P} . Let the Radon-Nikodym derivative of \mathbf{Q} (with respect to \mathbf{P}) be $\lambda(\omega)$, i.e.

$$\mathbf{Q}(B) = \int_B \lambda(\omega) d\mathbf{P}.$$

The random variable $\lambda(\omega)$ is called the local density of the sequence A_1, A_2, \dots .

Definition 3 (see [5], [6]). The events A_n ($n = 1, 2, \dots$) are called equivalent if the probability of the event $A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}$ ($i_j \neq i_l$ if $j \neq l$) depends only on k and it does not depend on the indices i_1, i_2, \dots, i_k . The numbers

$$\alpha_k = \mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

are called the moments of the sequence A_1, A_2, \dots .

It is easy to see that a sequence of equivalent events is a stable sequence. The following five theorems are proved in [3], [4] and [7].

Theorem A ([3]). If $\{A_n\}$ is a sequence of events such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n | A_k) = \lambda \quad (k = 1, 2, \dots)$$

where $0 < \lambda < 1$ and $A_1 = \Omega$, then the sequence $\{A_n\}$ is mixing.

Theorem B ([4]). If $\{A_n\}$ is a sequence of events such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n | A_k) = \lambda_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

where $A_1 = \Omega$ and λ_k is a sequence of real numbers ($0 < \lambda_k \leq 1$) then the sequence A_n is stable.

Theorem C ([4]). If H is a Hilbert space and f_n is a sequence of elements of H such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, f_k) = \lambda_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

and

$$\|f_n\| \leq C$$

where C is a positive constant and λ_k is a sequence of real numbers, then f_n converges weakly to an element f of the Hilbert space H , i.e.

$$(f_n, g) \rightarrow (f, g) \quad (n \rightarrow \infty)$$

for every element g of H .

Theorem D (see [5], [6] and [7]). *The real numbers $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ are the moments of a sequence of equivalent events if and only if there exists a distribution function $F(x)$ defined on the interval $[0, 1]$ such that*

$$\alpha_k = \int_0^1 x^k dF(x).$$

Theorem E ([7]). *Let $\{A_n\}$ be a sequence of equivalent events. Let $\lambda = \lambda(\omega)$ be the local density of the sequence $\{A_n\}$, considered as a stable sequence. Then we have*

$$\mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k} | \lambda) = \lambda^k \quad (\text{with probability } 1)$$

for $k = 1, 2, \dots$ and $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. I.e. the events A_n are independent under the condition that λ takes on a fixed value.

In this paper we introduce the following two concepts.

Definition 4. The events A_n ($n = 1, 2, \dots$) are called quasi-equivalent if the value of the ratio

$$\frac{\mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k})}{\mathbf{P}(A_{i_1}) \mathbf{P}(A_{i_2}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k})} = \alpha_k \quad (i_j \neq i_l \text{ if } j \neq l)$$

depends only on k and it does not depend on the indices i_1, i_2, \dots, i_k ($k = 1, 2, \dots$). The numbers $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ are called the moments of the quasi-equivalent events A_1, A_2, \dots .

It is clear that any sequence of equivalent events and any sequence of independent events is a sequence of quasi-equivalent events.

Another example for quasi-equivalent events is the following:

Let us consider two urns one of them containing R_1 red balls and W_1 white balls, the other one containing R_2 red balls and W_2 white balls. We suppose that $R_1 + W_1 = R_2 + W_2 = N$. We choose at random one of the urns, with probability p ($0 < p < 1$) and with probability $q = 1 - p$ we choose the other one. From the chosen urn we choose at random a ball (we choose every ball with the same probability). We put back the ball to the urn and we put in the first urn a red ball with probability p_1 ($p_1 < R_1/R_2$) and a white ball with probability $q_1 = 1 - p_1$; in the second urn we put a red ball with probability $p_1^* = \lambda p_1$ (where $\lambda = R_2/R_1$) and a white ball with probability $q_1^* = 1 - p_1^*$. In the next step we choose a ball at random from the urn from which we have already chosen the first ball. We put back this ball to this urn and we put in the first urn a red ball with probability p_2 ($p_2 < R_2/R_1$) and a white ball with probability $q_2 = 1 - p_2$; in the second urn we put a red ball with probability $p_2^* = \lambda p_2$ and a white ball with probability $q_2^* = 1 - p_2^*$. We continue this process, so that in the k -th step we choose a ball from the urn from which we have chosen the first ball and we put back this ball to this urn and we put in the first urn a red ball with probability p_k ($p_k < R_2/R_1$) and a white ball with probability $q_k = 1 - p_k$; in the second urn we put a red ball with probability $p_k^* = \lambda p_k$ and a white ball with probability $q_k^* = 1 - p_k^*$.

Let A_k denote the event that we choose in the k -th step a red ball.

It is easy to see that the events A_n are neither independent nor equivalent if $\lambda \neq 1$. We prove that they are quasi-equivalent events. Let B_1 denote the event that the first ball was chosen from the first urn and B_{11} denote the event

that the first ball was chosen from the second urn. It is clear that the events $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$ are independent under the condition B_I , therefore we have

$$\mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k} | B_I) = \mathbf{P}(A_{i_1} | B_I) \mathbf{P}(A_{i_2} | B_I) \dots \mathbf{P}(A_{i_k} | B_I)$$

and

$$\mathbf{P}(A_{k+1} | B_I) = \frac{1}{N+k} \sum_{j=0}^k (R_1 + j) \mathbf{P}(v_k = j)$$

where v_k denotes the number of red balls which was put in the first urn at the first k steps. So we have

$$\mathbf{P}(A_{k+1} | B_I) = \frac{R_1 + \mathbf{M}(v_k)}{N+k} = \frac{R_1 + \alpha_k}{N+k}$$

where $\alpha_k = p_1 + p_2 + \dots + p_k$. A simple calculation gives

$$\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(A_k | B_I) (p + \lambda q) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

and similarly

$$\mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}(A_k | B_{II}) (p/\lambda + q) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

so we have

$$\frac{\mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k})}{\mathbf{P}(A_{i_1}) \mathbf{P}(A_{i_2}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k})} = \frac{p}{(p + \lambda q)^k} + \frac{q}{(p/\lambda + q)^k}$$

which proves our statement.

Definition 5. The sequence of events A_1, A_2, \dots is called quasi-stable if for every $B \in \mathcal{S}$ the limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(A_n B)}{\mathbf{P}(A_n)} = \mu(B)$$

exists.

It is easy to see that a stable sequence is a fortiori a quasi-stable sequence, and the set function μ is a probability measure on $\{\Omega, \mathcal{S}\}$ which is absolutely continuous with respect to \mathbf{P} .

In § 1 we give the generalization of Theorem B for quasi-stable sequences and the generalization of Theorems D and E for quasi-equivalent events. § 2 contains a strong law of large numbers for quasi-equivalent events and the characterization of the tail of quasi-equivalent events.

§ 1. The generalizations of Theorems B, D and E

In this § we formulate and prove Theorems 1, 2 and 3 which are the generalizations of Theorems B, D and E resp. The proofs of these theorems are very similar to the original proofs. We can only obtain the generalizations of the mentioned theorems under a restriction. Namely we have to assume that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) > 0.$$

Theorem 1. Let A_1, A_2, \dots be a sequence of events for which

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) > 0$$

and the limit

$$\alpha_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(A_n | A_k)}{\mathbf{P}(A_n)} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

exists. Let the random variables $a_k(\omega)$ and $\eta_k(\omega)$ ($k = 1, 2, \dots$) be defined as follows

$$a_k(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega \in A_k \\ 0 & \text{if } \omega \notin A_k \end{cases}$$

and

$$\eta_k(\omega) = \frac{a_k(\omega)}{\mathbf{P}(A_k)}.$$

Then the events A_n ($n = 1, 2, \dots$) are quasi-stable and the sequence $\eta_n(\omega)$ converges weakly to a random variable $\lambda(\omega)$ which will be called the relative-density of the sequence $\{A_n\}$.

Proof. It is easy to see that the conditions of Theorem C are fulfilled (if we substitute f_k by η_k) because η_k is an element of the Hilbert-space $L^2\{\Omega, \mathbf{P}\}$ for which

$$\|\eta_k\| = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{P}(A_k)}} \leq \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n)}} = C$$

if $k \geq k_0(\varepsilon)$, and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\eta_n, \eta_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbf{P}(A_n) \mathbf{P}(A_k)} \int_{\Omega} a_n(\omega) a_k(\omega) d\mathbf{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(A_n A_k)}{\mathbf{P}(A_n) \mathbf{P}(A_k)} = \alpha_k.$$

If B is an arbitrary event and

$$\beta(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega \in B \\ 0 & \text{if } \omega \notin B \end{cases}$$

then by Theorem C we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(A_n B)}{\mathbf{P}(A_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\eta_n, \beta) = (\lambda, \beta) = \int_B \lambda d\mathbf{P}$$

where λ is the weak limit of η_n . So we have proved Theorem 1.

Remark. A simple example shows that Theorem 1 is not valid without the condition $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) > 0$.

The generalization of Theorem D will be given in Theorems 2a and 2b.

Theorem 2a. If A_1, A_2, \dots is a sequence of quasi-equivalent events with the moments $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ such that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = K > 0$$

then there exists a distribution function $F(x)$ defined on the interval $[0, 1/K]$ such that

$$\alpha_k = \int_0^{1/K} x^k dF(x).$$

Proof. Let the quasi-density of the sequence A_1, A_2, \dots of quasi-equivalent events be $\lambda(\omega)$ and denote the indicator function of A_n by $a_n(\omega)$. Let us put

$$\eta_n(\omega) = \frac{a_n(\omega)}{\mathbf{P}(A_n)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

and

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k})}{\mathbf{P}(A_{i_1}) \mathbf{P}(A_{i_2}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k})} = \int_{\Omega} \eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_k} d\mathbf{P} = (\eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_{k-1}}, \eta_{i_k}).$$

Thus by Theorem 1 we have

$$\alpha_k = \lim_{i_{k-1} \rightarrow \infty} (\eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_{k-1}}, \eta_{i_k}) = (\eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_{k-1}}, \lambda) = (\eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_{k-2}} \lambda, \eta_{i_{k-1}}).$$

Applying the same argument again we obtain

$$\alpha_k = \lim_{i_{k-1} \rightarrow \infty} (\eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_{k-2}} \lambda, \eta_{i_{k-1}}) = (\eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_{k-2}} \lambda, \lambda).$$

Applying the same argument again $k - 2$ times we obtain that

$$\alpha_k = \mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = \int_{\Omega} \lambda^k(\omega) d\mathbf{P} = \int_0^{1/K} x^k dF_{\lambda}(x)$$

where $F_{\lambda}(x)$ is the distribution function of $\lambda(\omega)$. (It is clear that $\mathbf{P}(0 \leq \lambda(\omega) \leq 1/K) = 1$). Thus Theorem 2a is proved.

Theorem 2b. If $\lambda(\omega)$ is a random variable such that

$$\mathbf{P}(0 \leq \lambda(\omega) \leq 1/K) = 1 \quad \text{and} \quad \int_{\Omega} \lambda(\omega) d\mathbf{P} = 1,$$

K is a positive number in the interval $[0, 1]$ and a_k is a sequence of the real numbers for which $0 < a_k < K$ then there exists a sequence of quasi-equivalent events A_1, A_2, \dots such that

$$(1) \quad \mathbf{P}(A_k) = a_k$$

and

$$(2) \quad \frac{\mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k})}{\mathbf{P}(A_{i_1}) \mathbf{P}(A_{i_2}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k})} = \mathbf{M}(\lambda^k) = a_k.$$

Proof. Let us define a probability space Ω as follows:

$$\Omega = I_1 \times I_2$$

where I_1 is the interval $[0, 1/K]$ and I_2 is the interval $[0, 1]$. Let the probability measure \mathbf{P} on Ω be the product measure

$$\mathbf{P} = \mu_1 \times \mu_2$$

where μ_1 is the Lebesgue—Stieltjes measure on I_1 defined by the distribution function $F_{\lambda}(x) = \mathbf{P}\{\lambda < x\}$ and μ_2 is the ordinary Lebesgue measure on I_2 .

To define the events A_n in Ω we need to define a set of polynomials

$$p_k^{(n)}(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2^n; n = 1, 2, \dots)$$

as follows $p_0^{(n)}(x) \equiv 0$ and

$$p_{k+1}^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^k (a_1x)^{\varepsilon_1^{(j)}} (1 - a_1x)^{1-\varepsilon_1^{(j)}} (a_2x)^{\varepsilon_2^{(j)}} (1 - a_2x)^{1-\varepsilon_2^{(j)}} \dots (a_nx)^{\varepsilon_n^{(j)}} (1 - a_nx)^{1-\varepsilon_n^{(j)}}$$

if $k \geq 0$, where $\varepsilon_l^{(j)}$ denotes the l th digit in the dyadic expansion of $1 - \frac{j+1}{2^n}$

more exactly

$$1 - \frac{j+1}{2^n} = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^{(j)}}{2^i} \quad (\varepsilon_i \text{ is } 0 \text{ or } 1).$$

Thus for instance

$$p_0^{(3)}(x) \equiv 0$$

$$p_1^{(3)}(x) = a_1a_2a_3x^3$$

$$p_2^{(3)}(x) = a_1a_2a_3x^3 + a_1a_2x^2(1-a_3x) = a_1a_2x^2$$

$$p_4^{(3)}(x) = a_1a_2x^2 + a_1x(1-a_2x)a_3x + a_1x(1-a_2x)(1-a_3x) = a_1x$$

$$p_5^{(3)}(x) = a_1x + (1-a_1x)a_2a_3x^2$$

$$p_6^{(3)}(x) = a_1x + (1-a_1x)a_2a_3x^2 + (1-a_1x)a_2x(1-a_3x) = a_1x + (1-a_1x)a_2x$$

$$p_7^{(3)}(x) = a_1x + (1-a_1x)a_2x + (1-a_1x)(1-a_2x)a_3x$$

$$p_8^{(3)}(x) = a_1x + (1-a_1x)a_2x + (1-a_1x)(1-a_2x)a_3x + (1-a_1x)(1-a_2x)(1-a_3x) \equiv 1.$$

The condition $0 < a_k < K$ implies that $p_0^{(n)}(x) \leq p_1^{(n)}(x) \leq \dots \leq p_{2^n-1}^{(n)}(x)$ in the interval $[0, 1/K]$.

Now, let $B_k^{(n)}$ be the set of all points (x, y) of Ω for which $p_{2k}^{(n)}(x) \leq y < p_{2k+1}^{(n)}(x)$ and let A_n be the union of the sets $B_k^{(n)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} - 1$) i.e.

$$A_n = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} B_k^{(n)}.$$

It is easy to verify that the events A_n are quasi-equivalent and (1) and (2) hold.

Theorem 3. Let $\{A_n\}$ be a sequence of quasi-equivalent events for which $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = K > 0$. Let $\lambda(\omega)$ be the quasi-density of the sequence $\{A_n\}$ considered as a quasi-stable sequence. Then we have

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2} \dots A_{i_k} | \lambda) &= \lambda^k \mathbf{P}(A_{i_1}) \mathbf{P}(A_{i_2}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k}) = \\ &= \mathbf{P}(A_{i_1} | \lambda) \dots \mathbf{P}(A_{i_k} | \lambda) \quad (\text{with probability } 1) \end{aligned}$$

for $k = 1, 2, \dots$ and $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

By other words the events A_n are independent under the condition that the value of $\lambda(\omega)$ is fixed.

Proof. First of all we prove (3) for $k = 1$. Let us put

$$a_k(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega \in A_k \\ 0 & \text{if } \omega \notin A_k \end{cases}$$

and

$$\eta_k(\omega) = \frac{a_k(\omega)}{\mathbf{P}(A_k)}$$

Let us assume that

$$(4) \quad \mathbf{M}(\eta_n | \lambda) = \lambda + \varepsilon_n.$$

Here $\varepsilon_n(\omega)$ is a Baire-function of λ by the definition of the conditional probability. Let $\varepsilon_n(\omega) = g_n(\lambda(\omega))$. Then we have

$$\mathbf{M}(\eta_n) = \mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{M}(\mathbf{M}(\eta_n | \lambda)) = \mathbf{M}(\lambda + \varepsilon_n) = \mathbf{M}(\lambda) + \mathbf{M}(\varepsilon_n)$$

therefore $\mathbf{M}(\varepsilon_n) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$). Similarly we have

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\eta_k \eta_l) &= \mathbf{M}(\lambda^2) = \mathbf{M}(\lambda \eta_k) = \mathbf{M}[\mathbf{M}(\lambda \eta_k | \lambda)] = \\ &= \mathbf{M}(\lambda(\lambda + \varepsilon_k)) = \mathbf{M}(\lambda^2) + \mathbf{M}(\lambda \varepsilon_k). \end{aligned}$$

Therefore $\mathbf{M}(\lambda \varepsilon_k) = 0$. Similarly we obtain

$$\mathbf{M}(\lambda^n \varepsilon_k) = \int_0^{1/K} x^n g_k(x) dF_\lambda(x) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots)$$

where $F_\lambda(x)$ is the distribution function of $\lambda(\omega)$. (It is clear that $0 \leq \lambda(\omega) \leq 1/K$.) The fact that the sequence $\{x^n\}$ is a complete sequence in the space $L^2_{F_\lambda}[0, 1/K]$ (the space of functions in the interval $[0, 1/K]$ which are square integrable with respect to the measure defined by the distribution function $F_\lambda(x)$) (implies that $g_n(x)$ is equal to 0 almost everywhere with respect to the measure defined by $F_\lambda(x)$), so we have

$$\mathbf{P}(\varepsilon_k = 0) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

therefore

$$\mathbf{M}(\eta_n | \lambda) = \lambda$$

and

$$(5) \quad \mathbf{P}(A_n | \lambda) = \lambda \mathbf{P}(A_n).$$

The proof for $k = 2$ is completely similar to the above written proof. Let us put

$$\mathbf{M}(\eta_i \eta_k | \lambda) = \lambda^2 + \varepsilon_{ik}.$$

where ε_{ik} is a Baire-function of λ . With these notations we have

$$\mathbf{M}(\eta_i \eta_k) = \mathbf{M}(\lambda^2) = \mathbf{M}(\mathbf{M}(\eta_i \eta_k | \lambda)) = \mathbf{M}(\lambda^2 + \varepsilon_{ik})$$

so

$$\mathbf{M}(\varepsilon_{ik}) = 0.$$

Similarly we have

$$\mathbf{M}(\eta_i \eta_j \eta_k) = \mathbf{M}(\lambda^3) = \mathbf{M}(\eta_i \eta_j \lambda) = \mathbf{M}(\mathbf{M}(\eta_i \eta_j \lambda | \lambda)) = \mathbf{M}(\lambda(\lambda^2 + \varepsilon_{ij})).$$

so

$$\mathbf{M}(\varepsilon_{ik} \lambda) = 0$$

and in general we obtain

$$\mathbf{M}(\varepsilon_{ik} \lambda^n) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{i. e.} \quad \mathbf{P}(\varepsilon_{ik} = 0) = 1.$$

Therefore

$$\mathbf{M}(\eta_i \eta_k | \lambda) = \lambda^2$$

and

$$\mathbf{P}(A_i A_k | \lambda) = \lambda^2 \mathbf{P}(A_i) \mathbf{P}(A_k)$$

and using (5) we obtain (3) for $k = 2$.

The proof of (3) for any value of k is essentially the same.

Remark. From Theorem 3 easily follows that $\mathbf{P}\left(0 \leq \lambda \leq \frac{1}{\sup \mathbf{P}(A_n)}\right) = 1$ and that it is the best possible estimation follows from Theorem 2b.

§ 2. Some further properties of sequences of quasi-equivalent events

In this § we prove a strong law of large numbers for quasi-equivalent events and we give the characterization of the tail of sequences of quasi-equivalent events.

Theorem 4a. Let A_1, A_2, \dots be a sequence of quasi-equivalent events such that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = K > 0.$$

Let us denote the quasi-density of this sequence by $\lambda(\omega)$. Then we have

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k(\omega)}{\mathbf{P}(A_k)} \rightarrow \lambda(\omega)\right\} = 1$$

where $\alpha_k(\omega)$ is the indicator function of A_k .

Proof. Let us represent the events A_1, A_2, \dots in the rectangle $\left[0, \frac{1}{K}\right] \times [0, 1]$ of the plane as we did in the proof of Theorem 2b. Then by the strong law of large numbers we have

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k(x_0, y)}{\mathbf{P}(A_k)} \rightarrow \lambda(x_0)$$

for every x_0 in the interval $\left[0, \frac{1}{K}\right]$ and for almost every y in $[0, 1]$ (with respect to the ordinary Lebesgue measure). So by the Fubini-theorem we have

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k(x, y)}{\mathbf{P}(A_k)} \rightarrow \lambda(x)$$

almost everywhere in the rectangle $\left[0, \frac{1}{K}\right] \times [0, 1]$.

The validity of the strong law of large numbers does not depend on the concrete representation of the random variables, therefore the proof is complete.

By the same method it is possible to prove the following version of Theorem 4a.

Theorem 4b. Let A_1, A_2, \dots be a sequence of quasi-equivalent events such that

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) = K > 0.$$

Let us denote the quasi-density of this sequence by $\lambda(\omega)$. Then we have

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [\alpha_k(\omega) - \lambda \mathbf{P}(A_k)] \rightarrow 0 \right\} = 1$$

where $\alpha_k(\omega)$ is the indicator function of A_k .

Theorem 5. Let A_1, A_2, \dots be a sequence of quasi-equivalent events for which $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) > 0$. Let $\lambda(\omega)$ be the quasi-density of the sequence $\{A_n\}$, considered as a quasi-stable sequence. Let us denote the tail of the sequence A_1, A_2, \dots by \mathcal{A} . Then $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}(\lambda)$.

In the proof of this theorem we can follow the known method of the proof of the zero-one law.

Proof. Let A be an element of the σ -algebra \mathcal{A} and let \mathcal{U} be the class of measurable sets F with the property that

$$\mathbf{P}(AF | \lambda) = \mathbf{P}(A | \lambda) \mathbf{P}(F | \lambda) \quad (\text{with probability } 1).$$

Then according to our Theorem 3 \mathcal{U} includes the σ -algebra $\mathcal{B}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ($n = 1, 2, \dots$). This fact implies that \mathcal{U} includes the σ -algebra $\mathcal{B}(A_1, A_2, \dots)$ and therefore $A \in \mathcal{U}$. So we have

$$\mathbf{P}(A | \lambda) = \mathbf{P}(A | \lambda) \mathbf{P}(A | \lambda)$$

i.e. $\mathbf{P}(A | \lambda) = 0$ or $\mathbf{P}(A | \lambda) = 1$ with probability 1. This last fact implies that there is a $B \in \mathcal{B}(\lambda)$ such that $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$ and therefore there exists a σ -algebra $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}(\lambda)$ for which $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{A}$.

Let us define the random variable $a_i(\omega)$ ($i = 1, 2, \dots$) as follows:

$$a_k(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega \in A_k \\ 0 & \text{if } \omega \notin A_k. \end{cases}$$

By Theorem 4 we have

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k(\omega)}{\mathbf{P}(A_k)} \rightarrow \lambda \quad (\text{with probability } 1).$$

It is clear that

$$\mathcal{B} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k(\omega)}{\mathbf{P}(A_k)} \right) \subset \mathcal{A}$$

i.e.

$$\mathcal{B}(\lambda) \subset \mathcal{A}.$$

So the proof of Theorem 5 is complete.

(Received July 10, 1963.)

REFERENCES

- [1] KOLMOGOROFF, A. N.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, Berlin, 1933.
- [2] SUCHESTON, L.: "On mixing and the zero-one law." *Journal of Math. Analysis and Applications* **6** (1963) 447—456.
- [3] RÉNYI, A.: "On mixing sequences of events". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958) 215—227.
- [4] RÉNYI, A.: "On stable sequences of events". (In print in *Sankhya*.)
- [5] DE FINETTI, B.: "La prevision: ses lois logiques, ses sources subjectives." *Annales de l'Institut H. Poincaré* **7** (1937) 1—68.
- [6] ХИНЧИН, А. Я.: „О классах эквивалентных событий." *Математический Сборник* **39** (1932) 40—43.
- [7] RÉNYI, A.—RÉVÉSZ, P.: "A study of sequences of equivalent events as a special stable sequences." (In print in *Publicationes Mathematicae*.)

О КВАЗИЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ СОБЫТИЙ

P. RÉVÉSZ

Резюме

Последовательность событий A_1, A_2, \dots называется квазиэквивалентной, если значение дроби

$$\frac{\mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k})}{\mathbf{P}(A_{i_1}) \mathbf{P}(A_{i_2}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k})} \quad (i_j \neq i_l \text{ если } j \neq l)$$

зависит лишь от k и не зависит от индексов i_1, i_2, \dots, i_k . И вполне независимые события, и эквивалентные события, очевидно, квазиэквивалентны. Цель работы исследовать свойства последовательностей квазиэквивалентных событий.

Основным результатом работы является следующий: Пусть квазиэквивалентные события A_1, A_2, \dots определены на поле вероятностей $\{\Omega, \mathcal{S}, \mathbf{P}\}$. Предположим, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A_n) > 0,$$

тогда существует случайная величина $\lambda(\omega)$ такая, что

$$(1) \quad \mathbf{P}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k} | \lambda(\omega)) = \lambda^k \mathbf{P}(A_{i_1}) \mathbf{P}(A_{i_2}) \dots \mathbf{P}(A_{i_k}) = \\ = \mathbf{P}(A_{i_1} | \lambda) \mathbf{P}(A_{i_2} | \lambda) \dots \mathbf{P}(A_{i_k} | \lambda).$$

$$(2) \quad \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k(\omega)}{\mathbf{P}(A_k)} \rightarrow \lambda \right\} = 1$$

где $\alpha_k(\omega)$ индикаторная функция события A_k ,

$$(3) \quad \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}(A_n, A_{n+1}, \dots) = \mathcal{A}(\lambda)$$

где $\mathcal{A}(A_n, A_{n+1}, \dots)$ обозначает σ -алгебру порожденную событиями A_n, A_{n+1}, \dots , а $\mathcal{A}(\lambda)$ обозначает σ -алгебру порожденную случайной величиной $\lambda(\omega)$. Две σ -алгебры считаются равными, если любой элемент одной из них отличается от некоторого элемента другой лишь на множестве меры нуль и наоборот. Формулу (3) можно рассматривать как обобщение закона нуля и единицы.

EINE INFORMATIONSTHEORETISCHE UNGLEICHUNG UND IHRE ANWENDUNG AUF DEN BEWEIS DER ERGODIZITÄT VON MARKOFFSCHEN KETTEN

von

IMRE CSISZÁR

Einleitung

Setzen wir voraus, daß durch einen gestörten Kanal irgendwelche Signale übertragen werden, welche aus zwei verschiedenen Quellen stammen dürfen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Signale der beiden Quellen seien verschieden. Nun ist es anschaulich klar, daß die Störungen während der Übertragung die Verschiedenheit der Verteilungen nur vermindern können, also die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Ausgangssignale, welche Eingangssignalen aus verschiedenen Quellen entsprechen, voneinander nur in kleinerem (genauer: nicht größerem) Maße abweichen können, als diejenigen der Eingangssignalen selbst. Satz 1 der vorliegenden Arbeit ist eine mathematische Wiedergabe dieser anschaulichen Aussage, indem er besagt, daß die f -Abweichung der Verteilungen der übertragenen Signale nicht zunehmen kann, wobei der Begriff der f -Abweichung — definiert durch (4) — die Information für Diskrimination von KULLBACK und LEIBLER [1] (relative Information erster Ordnung; auch relative Entropie genannt), die relative Information beliebiger Ordnung $\alpha > 0$ (vgl. [2]) sowie die gewöhnliche Variationsentfernung als Spezialfälle enthält.

Die Bedingung dafür, daß die Übertragung durch den Kanal keine Verminderung der f -Abweichung bedeutet, wird als Ergänzung des Satzes 1 angegeben. Im § 2 werden noch manche Folgerungen bzw. Spezialfälle des Satzes 1 dargestellt. Im § 3 betrachten wir den Fall der kleinen Abweichungsverminderung (Stabilitätsfrage der Ungleichung, Satz 2), und die Verallgemeinerung der Ungleichung für nicht normierbare Maße (Satz 3).

Als eine Anwendung wird ein rein informationstheoretischer Beweis der Ergodizität bestimmter Markoffscher Ketten dargestellt¹ (§ 4).

Herrn Professor Alfréd Rényi möchte ich für seine wertvollen Bemerkungen meinen Dank aussprechen.

§ 1. Bezeichnungen und Hilfssätze

In den folgenden wird $f(u)$ immer eine für $0 < u < +\infty$ definierte stetige und von unten konvexe, sonst aber beliebige Funktion bedeuten.

¹ Der erste informationstheoretische Beweis für Ergodizität Markoffscher Ketten stammt von A. RÉNYI [2]. Dort brauchte man aber auch matrizentheoretische Überlegungen, nämlich um die Existenz einer stationären Verteilung zu beweisen.

Es werden auch Ausdrücke der Form $f(0)$, $0 \cdot f\left(\frac{0}{0}\right)$ und $0 \cdot f\left(\frac{a}{0}\right)$ ($0 < a < +\infty$) vorkommen; diese sind folgendermassen zu verstehen:

$$(1) \quad f(0) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u)$$

$$(2) \quad 0 \cdot f\left(\frac{0}{0}\right) = 0$$

$$(3) \quad 0 \cdot f\left(\frac{a}{0}\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon f\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) = a \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} \quad (0 < a < +\infty)$$

Die Größen $f(0)$ und $0 \cdot f\left(\frac{a}{0}\right)$ können also auch gleich $+\infty$ sein, $-\infty$ aber nicht, wegen der Konvexität von $f(u)$.

Mit den Buchstaben **P** und **Q** werden wir Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem meßbaren Raum (X, \mathcal{S}_X) bezeichnen, mit λ ein σ -endliches Maß, welches **P** und **Q** dominiert (also für welches $\mathbf{P} \ll \lambda$, $\mathbf{Q} \ll \lambda$ gilt; ein solches Maß ist z. B. $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$). Wir werden uns mit Größen der Form

$$(4) \quad \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \int_X q(x) f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \lambda(dx)$$

beschäftigen, wobei $p(x) = \frac{\mathbf{P}(dx)}{\lambda(dx)}$, $q(x) = \frac{\mathbf{Q}(dx)}{\lambda(dx)}$ die λ -Dichten von **P** und **Q**

bedeuten. (Die Radon-Nikodymschen Ableitungen sind so bestimmt, daß sie überall — und nicht nur fast überall — nichtnegativ und endlich sind.) Das Integral in (4) ist immer sinnvoll, da wegen der Konvexität von $f(u)$ für geeignete reelle Zahlen A und B $f(u) \geq A + Bu$ gelten muß, also kann die Funktion $qf\left(\frac{p}{q}\right)$ von unten durch die λ -summierbare Funktion $Ap + Bq$ abgeschätzt werden. Ferner ist der Wert der Grösse $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ von der Wahl des dominierenden Maßes λ offenbar unabhängig.

Die Grösse $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ wird der f -Abweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen **P** und **Q** heissen, da sie als eine Verallgemeinerung verschiedener bekannten Abweichungsmaßzahlen anzusehen ist. Die relative Information² (erster Ordnung) zweier Verteilungen **P** und **Q** ist z. B. nichts anderes, als ihre $u \log u$ -Abweichung. Es gilt nämlich für $f(u) = u \log u$

$$(5) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) &= \int_X q(x) \frac{p(x)}{q(x)} \log \frac{p(x)}{q(x)} \lambda(dx) = \int_X p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} \lambda(dx) = \\ &= \left\{ \int_X \log \frac{\mathbf{P}(dx)}{\mathbf{Q}(dx)} \cdot \mathbf{P}(dx) \quad \text{falls } \mathbf{P} \ll \mathbf{Q} \right. \\ &\quad \left. + \infty \quad \text{sonst} \right\} = I(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q}). \end{aligned}$$

² Auch die Bezeichnungen »Information für Diskrimination«, »I-Divergenz«, »Informationsgewinn«, »verallgemeinerte Entropie« sind benutzt, vgl. z. B. [1], [2], [3], [4].

Auch für $\alpha \neq 1$ sind die Informationsgrößen $I_\alpha(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q})$ (relative Information von Ordnung α , $\alpha > 0$, s. [2], vgl. auch [5]) aus den Größen $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ herleitbar. Setzt man nämlich

$$(6) \quad f_\alpha(u) = \begin{cases} -u^\alpha & \text{für } 0 < \alpha < 1 \\ u^\alpha & \text{für } \alpha > 1 \end{cases},$$

so ergibt sich

$$(7) \quad \mathcal{J}_{f_\alpha}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \operatorname{sgn}(\alpha - 1) \int_X p^\alpha(x) q^{1-\alpha}(x) \lambda(dx) = \operatorname{sgn}(\alpha - 1) \mathcal{J}_\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$$

wobei $\mathcal{J}_\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \int_X p^\alpha(x) q^{1-\alpha}(x) \lambda(dx)$ das Informationsintegral von Ordnung α bedeutet (vgl. [5]), also gilt

$$(8) \quad I_\alpha(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q}) = \frac{1}{\alpha - 1} \log \mathcal{J}_\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \frac{1}{\alpha - 1} \log |\mathcal{J}_{f_\alpha}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})|,$$

d. h. stellt $I_\alpha(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q})$ eine monoton zunehmende Funktion von $\mathcal{J}_{f_\alpha}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ dar.

Die gewöhnliche Variationsentfernung³ zweier Verteilungen \mathbf{P} und \mathbf{Q} ist auch ein Spezialfall der f -Abweichung; setzt man nämlich $f(u) = |u - 1|$, so gilt offenbar

$$\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \int_X q(x) \left| \frac{p(x)}{q(x)} - 1 \right| \lambda(dx) = \int_X |p(x) - q(x)| \lambda(dx) = |\mathbf{P} - \mathbf{Q}|(X).$$

Es soll allerdings betont sein, daß die „ f -Abweichung“ zweier Verteilungen — für allgemeines f — auch negativ sein kann. Es gilt aber allgemein — s. (35) —

$$\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \geq f(1) = \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{P}),$$

so daß durch Addieren einer Konstante die f -Abweichung immer zu einer annehmbaren — obwohl im allgemeinen keiner symmetrischen — Verschiedenheitsmaßzahl gemacht werden kann.

Bemerkung. Die relative Information $I_\alpha(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q})$ ist bekanntlich gleich dem Supremum der relativen Informationen bezüglich aller endlichen Unterabgebren von S_X , also gilt die Beziehung $I_\alpha(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q}) = \sup_{A \subset S_X} I_\alpha(\mathbf{P}_A \parallel \mathbf{Q}_A)$, wobei \mathbf{P}_A bzw. \mathbf{Q}_A die Einschränkung von \mathbf{P} bzw. \mathbf{Q} auf die endliche Algebra A bedeutet (für $\alpha = 1$ siehe [3], [4]; für beliebiges $\alpha > 0$ vgl. [5]). In derselben Weise kann gezeigt werden, daß diese Beziehung auch für $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ bei beliebigem konvexem $f(u)$ gültig ist.

In den folgenden werden wir die Jensensche Ungleichung oft benützen und zwar in der folgenden Form:

Hilfssatz 1. Ist μ ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf den Borelschen Mengen der Halbgerade $[0, +\infty)$ mit $\int_0^\infty u \mu(du) < +\infty$, so gilt für jedes konvexe $f(u)$

$$(9) \quad \int_0^\infty f(u) \mu(du) \geq f\left(\int_0^\infty u \mu(du)\right).$$

³ Unter der Variationsentfernung zweier Wahrscheinlichkeitsmaße wird die Totalvariation ihrer Differenz auf dem ganzen Definitionsbereich der beiden Maße, also — falls \mathbf{P} und \mathbf{Q} auf (X, S_X) definierte Wahrscheinlichkeitsmaße sind — die Größe $|\mathbf{P} - \mathbf{Q}|(X) = \int_X |p(x) - q(x)| \lambda(dx)$ verstanden.

Ist die Funktion $f(u)$ streng konvex, enthält also ihr Graph keine gerade Strecke, so ist für die Gleichheit in (9) notwendig und hinreichend, daß das Maß μ auf den einzigen Punkt $u_0 = \int_0^\infty u \mu(du)$ konzentriert ist.

Wir brauchen auch den folgenden Hilfssatz über die Stabilität der Jensenschen Ungleichung:

Hilfssatz 2. Ist die Funktion $f(u)$ in der ε_1 -Umgebung von $u_0 = \int_0^\infty u \mu(du)$ zweimal differenzierbar, und gilt hier $f''(u) \geq \tau > 0$, so folgt aus

$$\int_0^\infty f(u) \mu(du) - f\left(\int_0^\infty u \mu(du)\right) \leq \frac{\tau}{2} \varepsilon_1^2 \varepsilon$$

die Ungleichung $\mu([u_0 - \varepsilon_1, u_0 + \varepsilon_1]) > 1 - \varepsilon_2$.

Hilfssatz 2 ist ein Spezialfall des Lemmas in [5], § 2, und ergibt sich daraus, indem man $X = [0, +\infty)$, $g(u) = u$, $A = u_0$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \int_0^\infty f(u) \mu(du) - f(\int_0^\infty u \mu(du))$, $a = \tau$ setzt.

Hilfssatz 3. Es gilt für jedes $p_0 \geq 0$, $p_1 \geq 0$, $q \geq 0$

$$(10) \quad 0 \cdot f\left(\frac{p_0}{0}\right) + qf\left(\frac{p_1}{q}\right) \geq qf\left(\frac{p_0 + p_1}{q}\right),$$

mit Gleichheit nur im Falle $p_0 = 0$ oder $q = 0$. Ist ferner $f(u)$ in der ε_1 -Umgebung von $u_0 = \frac{p_0 + p_1}{q}$ ($q > 0$) zweimal differenzierbar und gilt hier $f''(u) \geq \tau > 0$, so folgt aus

$$(11) \quad 0 \cdot f\left(\frac{p_0}{0}\right) + qf\left(\frac{p_1}{q}\right) - qf\left(\frac{p_0 + p_1}{q}\right) < \frac{\tau}{2} \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 q \quad (\varepsilon_2 < 1)$$

die Ungleichung $\frac{p_0}{q} \leq \varepsilon_1$.

Beweis. Für $q = 0$ ist (10) eine unmittelbare Folge von (2), (3). Für $q > 0$ folgt (10) aus (9), indem man das Maß μ durch $\mu\left(\left\{\frac{p_0}{\varepsilon}\right\}\right) = \frac{\varepsilon}{q + \varepsilon}$, $\mu\left(\left\{\frac{p_1}{q}\right\}\right) = \frac{q}{q + \varepsilon}$ definiert ($\varepsilon > 0$), und dann ε gegen 0 streben läßt. Die zweite Behauptung folgt ähnlicherweise aus Hilfssatz 2, man soll bloß bemerken, daß aus (11) für beliebige Konstante K

$$-\frac{\varepsilon}{q + \varepsilon} f\left(\frac{p_0}{\varepsilon}\right) + \frac{q}{q + \varepsilon} f\left(\frac{p_1}{q}\right) - f\left(\frac{p_0 + p_1}{q + \varepsilon}\right) \leq \frac{\tau}{2} (\varepsilon_1 - K\varepsilon)^2 \varepsilon_2$$

folgt, falls nur $\varepsilon > 0$ genügend klein ist, was nach Hilfssatz 2 die Ungleichung⁴

⁴ Falls nur K so gewählt ist, daß die $(\varepsilon_1 - K\varepsilon)$ -Umgebung von $\frac{p_0 + p_1}{q + \varepsilon}$ ein Teilintervall der ε_1 -Umgebung von $\frac{p_0 + p_1}{q}$ darstellt, wofür z. B. $K = \frac{p_0 + p_1}{q^2}$ eine geeignete Wahl ist.

$\mu \left(\left[\frac{p_0 + p_1}{q + \varepsilon} - (\varepsilon_1 - K\varepsilon), \frac{p_0 + p_1}{q + \varepsilon} + (\varepsilon_1 - K\varepsilon) \right] \right) > 1 - \varepsilon_2$ und daher, für genügend kleines $\varepsilon > 0$, $\frac{p_1}{q} \in \left[\frac{p_0 + p_1}{q + \varepsilon} - (\varepsilon_1 - K\varepsilon), \frac{p_0 + p_1}{q + \varepsilon} + (\varepsilon_1 - K\varepsilon) \right]$ mit sich bringt, woraus mit dem Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ wirklich $\frac{p_0}{q} \leq \varepsilon_1$ folgt.

§ 2. Das Abnehmen der f-Abweichung, wenn ein Übertragungskanal benützt wird

Fassen wir den meßbaren Raum (X, S_X) dem Raum der Eingangssignale eines Übertragungskanals auf. Der Ausgangsraum sei mit (Y, S_Y) bezeichnet, und die Übergangsfunktion mit $\nu(B|x)$. Also sei $\nu(B|x)$ für jedes feste $x \in X$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Y, S_Y) und für jedes feste $B \in S_Y$ eine S_X -meßbare Funktion von x .

Sind \mathbf{P} und \mathbf{Q} zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf (X, S_X) , die Wahrscheinlichkeitsmaße $\bar{\mathbf{P}}$ und $\bar{\mathbf{Q}}$ auf (Y, S_Y) werden durch

$$(12) \quad \bar{\mathbf{P}}(B) = \int_X \nu(B|x) \mathbf{P}(dx), \quad \bar{\mathbf{Q}}(B) = \int_X \nu(B|x) \mathbf{Q}(dx)$$

definiert. $\bar{\mathbf{P}}$ bzw. $\bar{\mathbf{Q}}$ stellt offenbar die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ausgangssignale dar, wenn die Verteilung der Eingangssignale \mathbf{P} bzw. \mathbf{Q} ist.

Es ist anschaulich klar, daß die Störungen (»Geräusch«) während der Übertragung in Richtung der Verminderung der Verschiedenheit der Verteilungen von Signalen aus verschiedenen Quellen wirken, mit anderen Worten, daß das Geräusch einen Verlust an aus den Signalen für Bestimmung ihrer Quelle erhältlichen Information verursacht.

Man erwartet also die Gültigkeit der Ungleichung

$$(13) \quad \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \geq \mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}})$$

die wir in diesem Paragraphen beweisen wollen. Man bemerke, daß Ungleichung (13) im Falle $f(u) = u \log u$ auch in engerem Sinne einen Informationsverlust ausdrückt, da $\mathcal{J}_{\log}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = I(\mathbf{P}||\mathbf{Q})$ als die Maßzahl der für Unterscheidung der Verteilungen \mathbf{P} und \mathbf{Q} erhältlichen Information gilt [1].

Schicken wir noch manche Bezeichnungen voraus. Die Maße \mathbf{P} und $\bar{\mathbf{P}}$ bzw. \mathbf{Q} und $\bar{\mathbf{Q}}$ lassen sich als die Projektionen auf (X, S_X) und (Y, S_Y) von Maßen \mathbf{P}^* bzw. \mathbf{Q}^* auf dem Produktraum $(X \times Y, S_X \times S_Y)$ auffassen, wobei \mathbf{P}^* bzw. \mathbf{Q}^* für Mengen der Form $A \times B$ ($A \in S_X, B \in S_Y$) durch

$$(14) \quad \mathbf{P}^*(A \times B) = \int_A \nu(B|x) \mathbf{P}(dx), \quad \mathbf{Q}^*(A \times B) = \int_A \nu(B|x) \mathbf{Q}(dx)$$

und für das ganze $S_X \times S_Y$ in der gewöhnlichen Weise durch Erweiterung definiert sind.

Wählen wir ein σ -endliches Maß λ^* auf $(X \times Y, S_X \times S_Y)$ mit $\mathbf{P}^* \ll \lambda^*$, $\mathbf{Q} \ll \lambda^*$ derart, daß auch seine Projektionen auf (X, S_X) und (Y, S_Y) σ -endlich sind ($\lambda^* = \mathbf{P}^* + \mathbf{Q}^*$ ist z. B. geeignet); diese Projektionen dominieren offenbar

\mathbf{P} und \mathbf{Q} bzw. $\bar{\mathbf{P}}$ und $\bar{\mathbf{Q}}$, also dürfen sie als λ bzw. $\bar{\lambda}$ gewählt werden. In den folgenden werden $p(x)$ und $q(x)$ bzw. $\bar{p}(y)$ und $\bar{q}(y)$ die Dichten (also Radon-Nikodymsche Ableitungen, bestimmt als überall — und nicht nur fast überall — nichtnegative und endliche Funktionen) von \mathbf{P} und \mathbf{Q} bzw. $\bar{\mathbf{P}}$ und $\bar{\mathbf{Q}}$ bezüglich dieses λ bzw. $\bar{\lambda}$ bezeichnen.

Nun beweisen wir die Ungleichung (13) und zeigen, daß die Gleichheit (für streng konvexes $f(u)$ mit $\mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) < +\infty$) dann und nur dann besteht, wenn die Likelihood-Quotienten $\frac{p(x)}{q(x)}$ und $\frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)}$ mit \mathbf{Q}^* -Wahrscheinlichkeit 1 gleich sind.

Satz 1. *Es gilt für eine beliebige konvexe Funktion $f(u)$ ($0 < u < +\infty$) und beliebige Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbf{P} und \mathbf{Q} auf (X, S_X)*

$$(13) \quad \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \geq \mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}).$$

Ergänzung. *Ist ferner die Funktion $f(u)$ streng konvex (enthält also ihr Graph keine gerade Strecke), so ist für die Gleichheit in der obigen Ungleichung notwendig und hinreichend, daß entweder $\mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) = +\infty$ oder*

$$(15) \quad \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} \quad [\mathbf{Q}^*]$$

d. h.

$$(16) \quad \nu \left(\left\{ y : \frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} = \frac{p(x)}{q(x)} \right\} | x \right) = 1 \quad [\mathbf{Q}]$$

gilt.⁵

Beweis. Man darf $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) < +\infty$ voraussetzen, da für $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = +\infty$ nichts zu beweisen ist.

Um das Wesen des Beweises besser hervorzuheben, führen wir ihn zunächst im Spezialfall $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$ durch. Aus $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$ folgt offenbar auch $\mathbf{P}^* \ll \mathbf{Q}^*$ so daß man $\lambda^* = \mathbf{Q}^*$ wählen darf; dann gilt $p(x) = \frac{\mathbf{P}(dx)}{\mathbf{Q}(dx)}$, $\bar{p}(y) = \frac{\bar{\mathbf{P}}(dy)}{\bar{\mathbf{Q}}(dy)}$, $q(x) = 1$, $\bar{q}(y) = 1$.

Betrachte man nun die Wahrscheinlichkeitsalgebra $(X \times Y, S_X \times S_Y, \mathbf{Q}^*)$ und die auf ihr definierten Zufallsveränderlichen

$$\xi(x, y) = p(x)$$

$$\eta(x, y) = \bar{p}(y).$$

Wir zeigen, daß $\eta = \bar{p}(y)$ gleich dem bedingten Erwartungswert von $\xi = p(x)$ bei gegebenem y , oder, genauer gesagt,

$$(17) \quad \eta = \mathbf{E}(\xi | S'_Y)$$

ist, wobei die σ -Algebra $S'_Y \subset S_X \times S_Y$ durch $S'_Y = \{X \times B : B \in S_Y\}$ definiert

⁵ Bezeichnungen wie $[\mathbf{Q}^*]$, $[\bar{\mathbf{Q}}]$ u. s. w. bedeuten: fast überall bezüglich des Maßes \mathbf{Q}^* , $\bar{\mathbf{Q}}$, u. s. w.

ist. In der Tat ist η offenbar S'_Y -meßbar, ferner gilt für jede Menge aus S_Y d. h. für jede Menge der Form $X \times B$ ($B \in S_Y$)

$$\begin{aligned} \int_{X \times B} \xi \mathbf{Q}^*(dx, dy) &= \int_{X \times B} p(x) \mathbf{Q}^*(dx, dy) = \int_X p(x) \nu(B|x) \mathbf{Q}(dx) = \\ &= \int_X \nu(B|x) \mathbf{P}(dx) = \bar{\mathbf{P}}(B) = \int_B \bar{p}(y) \bar{\mathbf{Q}}(dy) = \int_{X \times B} \bar{p}(y) \mathbf{Q}^*(dx, dy) = \\ &= \int_{X \times B} \eta \mathbf{Q}^*(dx, dy), \end{aligned}$$

wodurch (17) bewiesen ist.

Da aus der Konvexität von $f(u)$ bekanntlicherweise

$$(18) \quad \mathbf{E}(f(\xi)|S'_Y) \geq f(\mathbf{E}(\xi|S'_Y)) \quad [\mathbf{Q}^*]$$

folgt, (vgl. (29)), erhält man auf Grund von (17)

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) &= \mathbf{E}(f(\xi)) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(f(\xi)|S'_Y)) \geq \\ &\geq \mathbf{E}(f(\mathbf{E}(\xi|S'_Y))) = \mathbf{E}(f(\eta)) = \mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}), \end{aligned}$$

also (13). Für die Gleichheit ist notwendig und hinreichend, daß in (18) \mathbf{Q}^* -f. ü. die Gleichheit besteht, was aber für eine streng konvexe Funktion $f(u)$ dann und nur dann zutrifft, wenn — vgl. (32) —

$$\xi = \mathbf{E}(\xi|S'_Y) = \eta \quad [\mathbf{Q}^*]$$

also (15) gilt, w. z. b. w.

Es sei bemerkt, daß für Funktionen $f(u)$ mit $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$ die Voraussetzung $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$ keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, da sonst $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = +\infty$ wäre. Im allgemeinen Falle kann jedoch die f -Abweichung zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen auch dann endlich sein, wenn $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$ nicht gilt. In diesem Falle können wir folgendermaßen vorgehen: man setze

$$(19) \quad X_0 = \{x : q(x) = 0\}, \quad Y_0 = \{y : \bar{q}(y) = 0\}$$

und zerlege das Maß $\bar{\mathbf{P}}$ als $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}_0 + \bar{\mathbf{P}}_1$,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_0(B) &= \mathbf{P}^*(X_0 \times B) = \int_{X_0} \nu(B|x) \mathbf{P}(dx) \\ (20) \quad \bar{\mathbf{P}}_1(B) &= \mathbf{P}^*((X - X_0) \times B) = \int_{X - X_0} \nu(B|x) \mathbf{P}(dx). \end{aligned}$$

Dementsprechend setzen wir

$$(21) \quad \bar{p}_0(y) = \frac{\bar{\mathbf{P}}_0(dy)}{\bar{\lambda}(dy)}, \quad \bar{p}_1(y) = \frac{\bar{\mathbf{P}}_1(dy)}{\bar{\lambda}(dy)} \quad (\bar{p}_0(y) + \bar{p}_1(y) = \bar{p}(y)).$$

Betrachte man wieder die Wahrscheinlichkeitsalgebra $(X \times Y, S_X \times S_Y, \mathbf{Q}^*)$ und definiere die Zufallsveränderliche $\xi = \xi(x, y)$ durch

$$(22) \quad \xi(x, y) = \begin{cases} \frac{p(x)}{q(x)} & \text{für } x \notin X_0 \\ 0 & \text{für } x \in X_0. \end{cases}$$

Es wird zweckmäßig sein, die bedingte Verteilung (im schwachen Sinne) von ξ bei gegebenem y , d. h. bezüglich der σ -Algebra $S'_Y = \{X \times B : B \in S_Y\}$ einzuführen. Diese bedingte Verteilung ist — vgl. [6], S. 29 — eine Schar von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbf{Q}_0(\cdot | x, y)$ ($(x, y) \in X \times Y$) auf den Borelschen Mengen der Zahlengerade, wobei $\mathbf{Q}_0(M | x, y)$ für jede Borelsche Menge M eine S'_Y -meßbare Funktion von (x, y) darstellt — man kann also $\mathbf{Q}_0(\cdot | y)$ statt $\mathbf{Q}_0(\cdot | x, y)$ schreiben — so daß für jede Borelsche Menge M

$$(23) \quad \mathbf{Q}^* \{ \xi \in M | S'_Y \} = \mathbf{Q}_0(M | y)$$

und für jede Bairesche Funktion $f(u)$ mit $\mathbf{E}(|f(\xi)|) < +\infty$

$$(24) \quad \mathbf{E}(f(\xi) | S'_Y) = \int_0^\infty f(u) \mathbf{Q}_0(du | y)$$

gilt⁶ (mit Wahrscheinlichkeit 1, d. h. \mathbf{Q}^* -fast überall; man kann statt dessen auch $\overline{\mathbf{Q}}$ -f. ü. sagen, da es sich um bloß von y abhängenden (x, y) -Funktionen handelt).

Nun beweisen wir die Relation

$$(25) \quad \mathbf{E}(\xi | S'_Y) = \int_0^\infty u \mathbf{Q}_0(du | y) = \frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} \quad [\overline{\mathbf{Q}}].$$

Die Zufallsveränderliche

$$\eta(x, y) = \begin{cases} \frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} & \text{für } y \notin Y_0 \\ 0 & \text{für } y \in Y_0. \end{cases}$$

ist offenbar S'_Y -meßbar, ferner gilt wegen (22), (14) und (20) für jede Menge aus S'_Y , d. h. für jede Menge der Form $X \times B$ ($B \in S_Y$)

$$(26) \quad \begin{aligned} \int_{X \times B} \xi(x, y) \mathbf{Q}^*(dx, dy) &= \int_{(X - X_0) \times B} \frac{p(x)}{q(x)} \mathbf{Q}^*(dx, dy) = \int_{X - X_0} \frac{p(x)}{q(x)} \nu(B | x) \mathbf{Q}(dx) = \\ &= \int_{X - X_0} \nu(B | x) \mathbf{P}(dx) = \overline{\mathbf{P}}_1(B) = \overline{\mathbf{P}}_1(B - Y_0) = \int_{B - Y_0} \frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} \overline{\mathbf{Q}}(dy) = \\ &= \int_{X \times (B - Y_0)} \frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} \mathbf{Q}^*(dx, dy) = \int_{X \times B} \eta(x, y) \mathbf{Q}^*(dx, dy). \end{aligned}$$

⁶ In (24) wurde darum nur \int_0^∞ statt $\int_{-\infty}^{+\infty}$ geschrieben, weil die Funktion ξ nach ihrer Definition nichtnegativ ist.

Hier folgt die Gleichheit $\bar{\mathbf{P}}_1(B) = \bar{\mathbf{P}}_1(B - Y_0)$ daraus, daß wegen (19)

$$\int_{X-X_0} \nu(Y_0|x) q(x) \lambda(dx) = \int_X \nu(Y_0|x) \mathbf{Q}(dx) = \bar{\mathbf{Q}}(Y_0) = 0,$$

also $\nu(Y_0|x) = 0$ λ -f. ü. auf $X - X_0$ gilt, woraus man

$$(27) \quad \bar{\mathbf{P}}_1(Y) = \int_{X-X_0} \nu(Y_0|x) \mathbf{P}(dx) = 0$$

erhält. Da aus (26) $\mathbf{E}(\xi | S'_Y) = \eta(x, y)$ (\mathbf{Q}^* -f. ü., also $\bar{\mathbf{Q}}$ -f. ü.) folgt, ist (25) bewiesen.

Nun gilt

$$(28) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) &= \int_{X-X_0} q(x) f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \lambda(dx) + \int_{X_0} q(x) f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \lambda(dx) = \\ &= \mathbf{E}(f(\xi)) + \mathbf{P}(X_0) \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u}, \end{aligned}$$

wobei, wegen (24), (9) und (25)

$$(29) \quad \begin{aligned} \mathbf{E}(f(\xi)) &= \mathbf{E}(\mathbf{E}(f(\xi) | S'_Y)) = \mathbf{E}\left(\int_0^\infty f(u) \mathbf{Q}_0(du|y)\right) \geq \mathbf{E}\left(f\left(\int_0^\infty u \mathbf{Q}_0(du|y)\right)\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(f\left(\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)}\right)\right) = \int_{Y-Y_0} f\left(\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)}\right) \bar{\mathbf{Q}}(dy) = \int_Y \bar{q}(y) f\left(\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)}\right) \bar{\lambda}(dy) \end{aligned}$$

gilt. (Die letzte Gleichheit folgt daraus, daß auf Y_0 wegen (27) auch $\bar{p}_1(y)$ verschwindet $[\bar{\lambda}]$.)

Ferner gilt nach (14), (20) und (3)

$$(30) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}(X_0) \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} &= \mathbf{P}^*(X_0 \times Y) \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} = \\ &= \bar{\mathbf{P}}_0(Y) \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} = \int_Y 0 \cdot f\left(\frac{\bar{p}_0(y)}{0}\right) \bar{\lambda}(dy). \end{aligned}$$

Aus (28), (29) und (30) folgt — Gebrauch machend auch von Hilfssatz 3 und (21) —

$$(31) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) &\geq \int_Y \bar{q}(y) f\left(\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)}\right) \bar{\lambda}(dy) + \int_Y 0 \cdot f\left(\frac{\bar{p}_0(y)}{0}\right) \bar{\lambda}(dy) \geq \\ &\geq \int_Y \bar{q}(y) f\left(\frac{\bar{p}_0(y) + \bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)}\right) \bar{\lambda}(dy) = \mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}), \end{aligned}$$

wodurch Satz 1 bewiesen ist.

Um auch die Ergänzung zu verifizieren, bemerken wir, daß man in (31) nach dem obigen Beweis dann und nur dann an beiden Stellen die Gleichheit statthat (vorausgesetzt $\mathcal{I}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) < +\infty$), wenn

$$(32) \quad \int_0^\infty f(u) \mathbf{Q}_0(du|y) = f\left(\int_0^\infty u \mathbf{Q}_0(du|y)\right) \quad [\bar{\mathbf{Q}}]$$

und

$$(33) \quad 0 \cdot f\left(\frac{\bar{p}_0(y)}{0}\right) + \bar{q}(y) f\left(\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)}\right) = \bar{q}(y) f\left(\frac{\bar{p}_0(y) + \bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)}\right) \quad [\bar{\lambda}]$$

gilt. Für ein streng konvexes $f(u)$ besteht (32) — nach Hilfssatz 1 und (25) — genau im Falle

$$\mathbf{Q}_0\left(\left\{\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)}\right\} | y\right) = 1 \quad [\bar{\mathbf{Q}}],$$

was nach (23) mit

$$(15') \quad \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} \quad [\mathbf{Q}^*]$$

gleichbedeutend ist.

Ferner ist (33) nach Hilfssatz 3 mit $\bar{p}_0(y) \bar{q}(y) = 0$ $[\bar{\lambda}]$ also mit

$$(34) \quad \bar{p}_0(y) = 0 \quad [\bar{\mathbf{Q}}]$$

äquivalent.

Aus (15') und (34) folgt bereits (15). Gilt umgekehrt (15), so ist $\xi(x, y)$ bei fast jedem y mit (bedingter) Wahrscheinlichkeit 1 gleich $\frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)}$, also sind

fast alle Maße $\mathbf{Q}_0(\cdot | y)$ auf die Punkte $\frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)}$ konzentriert. Daraus folgt aber

(32) und auch $\frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} = \frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)}$ $[\bar{\mathbf{Q}}]$, also auch $\bar{p}(y) = \bar{p}_1(y)$ $[\bar{\mathbf{Q}}]$. Letztere Gleichung ist aber mit (34) gleichbedeutend, woraus (33) folgt.

Damit ist auch die Ergänzung vollständig bewiesen, da (15) und (16) offenbar äquivalent sind.

Wählt man alle Maße $\nu(\cdot | x)$ miteinander gleich, so ergibt sich aus dem bewiesenen Satz die Ungleichung

$$(35) \quad \mathcal{I}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) \geq f(1)$$

mit der Gleichheit — für streng konvexes f — genau im Falle $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$. Dies läßt sich selbstverständlich auch direkt leicht verifizieren.

Es seien noch einige interessantere und weniger triviale Folgerungen des Satzes 1 erwähnt. Die anschauliche Deutung der folgenden Aussagen ist klar.

Folgerung 1. *Haben die Maße $\nu(\cdot | x)$ die Eigenschaft, daß $\nu(\cdot | x_1)$ und $\nu(\cdot | x_2)$ für keine $x_1 \in X$ und $x_2 \in X$ zueinander orthogonal sind (diese Bedingung bedeutet, daß für den Kanal $(X, Y, \nu(\cdot | x))$ (kein Code — wohl auch der Länge 2 — mit Fehlerwahrscheinlichkeit 0 existiert), so gilt die Gleichheit*

$\mathcal{I}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathcal{I}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}})$ für eine streng konvexe Funktion $f(u)$ mit $\mathcal{I}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) < +\infty$ nur im Falle $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$.

In der Tat hat im Falle der Gleichheit die Menge

$$(36) \quad X' = \left\{ x : \nu \left(\left\{ y : \frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} = \frac{p(x)}{q(x)} \right\} \mid x \right) = 1 \right\}$$

nach (16) das \mathbf{Q} -Maß 1. Wegen der vorausgesetzten Nichtorthogonalität der Maße $\nu(\cdot \mid x)$ gilt für jedes $x_0 \in X'$, $x \in X$

$$\nu \left(\left\{ y : \frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} = \frac{p(x_0)}{q(y_0)} \right\} \mid x \right) > 0,$$

woraus und aus (36) für $x \in X'$ $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$ folgt. Dies bedeutet wegen $\mathbf{Q}(X') = 1$ und (15), daß

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} = C \quad [\mathbf{Q}^*]$$

d. h.

$$(37) \quad p(x) = Cq(x) \quad [\mathbf{Q}], \quad \bar{p}(y) = C\bar{q}(y) \quad [\bar{\mathbf{Q}}]$$

gilt, woraus durch Integrieren

$$\mathbf{P}(X - X_0) = C\mathbf{Q}(X - X_0) = C, \quad \bar{\mathbf{P}}(Y - Y_0) = C\bar{\mathbf{Q}}(Y - Y_0) = C$$

folgt. Hieraus erhält man wegen (27) und (20)

$$\bar{\mathbf{P}}_1(Y - Y_0) = \bar{\mathbf{P}}_1(Y) = \mathbf{P}(X - X_0) = C,$$

also

$$C = \bar{\mathbf{P}}(Y - Y_0) = \bar{\mathbf{P}}_0(Y - Y_0) + \bar{\mathbf{P}}_1(Y - Y_0) = \int_{X_0} \nu(Y - Y_0 \mid x) \mathbf{P}(dx) + C,$$

d. h.

$$(38) \quad \int_{X_0} \nu(Y - Y_0 \mid x) \mathbf{P}(dx) = 0.$$

Da aber wegen $\int_{X_0} \nu(Y_0 \mid x) \mathbf{Q}(dx) = \bar{\mathbf{Q}}(Y_0) = 0$ \mathbf{Q} -f. ü. $\nu(Y_0 \mid x) = \text{gilt}$,

kann die Größe $\nu(Y - Y_0 \mid x)$ — wegen der vorausgesetzten Nichtorthogonalität der Maße $\nu(\cdot \mid x)$ — für kein $x \in X$ verschwinden, so daß (38) mit $\mathbf{P}(X_0) = 0$ äquivalent ist. Dies bedeutet, daß die erste Gleichung in (37) auch λ -f. ü. besteht, ferner daß $C = \mathbf{P}(X - X_0) = 1$ ist. Mit dem erhaltenen Relation

$$p(x) = q(x) \quad [\lambda]$$

ist Folgerung 1 bewiesen.

Folgerung 2. Läßt sich Y in der Form

$$Y = \bigcup_{x \in X} B_x \quad (B_x \in S_Y, \quad B_{x_1} \cap B_{x_2} = \emptyset \quad \text{für } x_1 \neq x_2)$$

mit $\nu(B_x \mid x) = 1$ darstellen (diese Bedingung bedeutet, daß $(X, Y, \nu(\cdot \mid x))$ einen Kanal ohne Verlust darstellt, also daß die Eingangssignale auf Grund

der empfangenen Signale eindeutig bestimmbar sind), so gilt $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}})$ für je zwei Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbf{P} und \mathbf{Q} .

Wähle man nämlich $\lambda^* = \mathbf{P}^* + \mathbf{Q}^*$; dann ist $\lambda = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$, $\bar{\lambda} = \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{Q}}$, also gilt für beliebiges $B \in S_Y$

$$\bar{\lambda}(B) = \int_X \nu(B|x) \lambda(dx) = \int_X \nu(B \cap B_x|x) \lambda(dx).$$

Man verifiziert dann leicht, daß man für $\bar{p}(y)$ und $\bar{q}(y)$ $\bar{p}(y) = p(r(y))$, $\bar{q}(y) = q(r(y))$ wählen kann, wobei $r(y)$ durch $r(y) = x$ für $y \in B_x$ definiert ist. Daraus folgt für $q(x) > 0$

$$\nu \left\{ y : \frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} = \frac{p(x)}{q(x)} \mid x \right\} \geq \nu(B_x|x) = 1$$

w. z. b. w.

Folgerung 3. Sind alle Maße $\nu(\cdot|x)$ auf je einen Punkt Tx konzentriert —haben wir also einen Kanal ohne Geräusch, oder, was dasselbe ist, eine meßbare Transformation T von (X, S_X) in (Y, S_Y) — so ergibt Satz 1 die Ungleichung $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \geq \mathcal{J}_f(\mathbf{P}T^{-1}, \mathbf{Q}T^{-1})$, wobei für die Gleichheit notwendig und hinreichend ist (bei streng konvexem $f(u)$ und endlichem $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}T^{-1}, \mathbf{Q}T^{-1})$), daß die Likelihood-Quotienten $\frac{p(x)}{q(x)}$ und $\frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)}$ \mathbf{Q} -f.ü. übereinstimmen. Letztere Bedingung ist äquivalent mit der Existenz einer S_X -meßbaren Funktion $r(x)$ mit

$$p(x) = \bar{p}(Tx) r(x), \quad q(x) = \bar{q}(Tx) r(x) \quad [\lambda],$$

was bedeutet, daß T eine erschöpfende Schätzfunktion bezüglich der Maße \mathbf{P} und \mathbf{Q} darstellt. Im Spezialfall $f(u) = u \log u$ erhalten wir also den wohlbekannten Satz von KULLBACK und LEIBLER [1] (vgl. auch [3]).

Folgerung 4. Es sei $F \subset S_X$ eine σ -Algebra von Teilmengen von X ; betrachte man die Abbildung T von (X, S_X) auf (X, F) definiert durch $Tx = x$. Dann ist offenbar $\mathbf{P}T^{-1} = \mathbf{P}_F$, $\mathbf{Q}T^{-1} = \mathbf{Q}_F$, wobei \mathbf{P}_F bzw. \mathbf{Q}_F die Einschränkung von \mathbf{P} bzw. \mathbf{Q} auf F bezeichnet. Folgerung 3 ergibt also die Ungleichung

$$(13') \quad \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \geq \mathcal{J}_f(\mathbf{P}_F, \mathbf{Q}_F)$$

wobei die Gleichheit (bei streng konvexem f und endlichem $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}_F, \mathbf{Q}_F)$) dann und nur dann besteht, wenn F eine erschöpfende σ -Algebra bezüglich der beiden Wahrscheinlichkeitsmaßen \mathbf{P} und \mathbf{Q} darstellt.⁷

Es sei noch bemerkt, daß auch umgekehrt, die Folgerung 4 den Satz 1 selbst zu Folge hat

Nämlich verifiziert man leicht, daß die f -Abweichung von \mathbf{P}^* und \mathbf{Q}^* immer gleich der f -Abweichung von \mathbf{P} und \mathbf{Q} ist, ferner daß $\bar{\mathbf{P}}$ und $\bar{\mathbf{Q}}$ als die Einschränkungen von \mathbf{P}^* und \mathbf{Q}^* auf S'_Y anzusehen sind (vgl. den Beweis von Satz 1). Wendet man also (13') anstatt $X, S_X, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ und F auf $X \times Y, S_X \times S_Y, \mathbf{P}^*, \mathbf{Q}^*$ und S'_Y an, so ergibt sich $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \mathcal{J}_f(\mathbf{P}^*, \mathbf{Q}^*) \geq \mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}})$, also (13).

⁷ Die erhaltene Behauptung ist für $f(u) = u \log u$ wohlbekannt, und wird gewöhnlich in einer dem Beweis des Satzes 1 im wesentlichen ähnlichen Weise bewiesen (vgl. z. B. [3] oder auch [7]), wobei eine Vereinfachung bedeutet, daß man sich auf den Fall $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$ beschränken darf.

§ 3. Die Stabilitätsfrage der Ungleichung $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \geq \mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}})$ und die Verallgemeinerung der Ungleichung für nicht normierbare Maße

Im vorigen Paragraphen wurde die Ungleichung

$$(13) \quad \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \geq \mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}})$$

bewiesen, sowie die Bedingung der Gleichheit betrachtet. Nun wenden wir uns dem Problem zu, ob was sich über die Maße \mathbf{P} und \mathbf{Q} behaupten läßt, wenn in (13) nur annäherungsweise die Gleichheit besteht, also — mit anschaulichem Ausdruck — wenn die Übertragung die Abweichung der Verteilungen der Signale der beiden Quellen nur wenig vermindert. Diese Frage ist nicht nur an sich interessant, sondern auch für die Anwendungen (vgl. § 4) wichtig.

Satz 2. Ist die konvexe Funktion $f(u)$ ($0 < u < +\infty$) zweimal differenzierbar und gilt

$$(39) \quad \inf_{0 < u < b} f''(u) > 0 \quad \text{für jedes } 0 < b < +\infty$$

so kann zu jedem κ mit $0 < \kappa < 1$ eine nur von f und κ abhängende positive Zahl δ derart angegeben werden, daß für beliebiges $0 < \varepsilon < \frac{1}{\kappa}$ und für zwei beliebige Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbf{P}, \mathbf{Q} auf (X, S_X) mit endlichem $\mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}})$ und

$$(40) \quad \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) - \mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) < \delta \varepsilon^2$$

die Abschätzung

$$(41) \quad \mathbf{Q}^* \left(\left\{ (x, y) : \left| \frac{p(x)}{q(x)} - \frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} \right| \leq \varepsilon \right\} \right) \geq 1 - \kappa$$

gilt.

Bemerkung. Satz 2 bedeutet, daß sich die Abweichung der Verteilungen nur in dem Falle in kleinem Maße vermindert, wenn die Likelihood-Quotienten $\frac{p(x)}{q(x)}$ und $\frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)}$ mit großer \mathbf{Q}^* -Wahrscheinlichkeit fast übereinstimmen.

Beweis. Wir benützen dieselbe Bezeichnungen wie im Beweis des Satzes 1. Man setze $\tau = \tau(\kappa) = \inf_{0 < u < \frac{5}{\kappa}} f''(u)$; dann ist nach Voraussetzung $\tau > 0$.

Bezeichnen wir mit N_0, N_1, N_2 die folgenden Mengen aus S_Y :

$$(42) \quad N_0 = \left\{ y : \int_0^\infty u \mathbf{Q}_0(du | y) \neq \frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} \right\}$$

$$(43) \quad N_1 = \left\{ y : \begin{aligned} & \int_0^\infty f(u) \mathbf{Q}_0(du | y) - f \left(\int_0^\infty u \mathbf{Q}_0(du | y) \right) \geq \frac{\tau \kappa}{16} \varepsilon^2 \quad \text{oder} \\ & 0 \cdot f \left(\frac{p_0(y)}{0} \right) + \bar{q}(y) f \left(\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} \right) - \bar{q}(y) f \left(\frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} \right) \geq \frac{\tau \kappa}{16} \varepsilon^2 \bar{q}(y) \end{aligned} \right\}$$

$$(44) \quad N_2 = \left\{ y : \frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} \geq \frac{4}{\kappa} \right\}.$$

Dann gilt nach (25)

$$(45) \quad \overline{\mathbf{Q}}(N_0) = 0;$$

nach dem Beweis von Satz 1 — vgl. (29) und (31) — folgt aus (40)

$$\overline{\mathbf{Q}}(N_1) \cdot \frac{\tau \varkappa}{16} \varepsilon^2 \leq \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) - \mathcal{J}_f(\overline{\mathbf{P}}, \overline{\mathbf{Q}}) < \delta \varepsilon^2$$

also

$$(46) \quad \overline{\mathbf{Q}}(N_1) < \frac{16 \delta}{\tau \varkappa},$$

ferner folgt aus (44)

$$(47) \quad \mathbf{Q}(N_2) = \int_{N_2} \bar{q}(y) \bar{\lambda}(dy) \leq \frac{\varkappa}{4} \int_{N_2} \bar{p}_1(y) \bar{\lambda}(dy) = \frac{\varkappa}{4} \overline{\mathbf{P}}_1(N_2) \leq \frac{\varkappa}{4}.$$

Nun besteht für $y \notin N_0 \cup N_1 \cup N_2$ erstens

$$\int_0^\infty f(u) \mathbf{Q}_0(du | y) - f\left(\int_0^\infty u \mathbf{Q}_0(du | y)\right) < \frac{\tau}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \cdot \frac{\varkappa}{2},$$

wobei in der $\frac{\varepsilon}{2}$ -Umgebung von $\int_0^\infty u \mathbf{Q}_0(du | y) = \frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)}$ $f''(u) > \tau$ gilt, woraus

man nach Hilfssatz 2

$$(48) \quad \mathbf{Q}_0\left(\left[\left|\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} + \frac{\varepsilon}{2}\right| | y\right)\right) \geq 1 - \frac{\varkappa}{2} \quad (y \notin N_0 \cup N_1 \cup N_2)$$

erhält, und zweitens

$$0 \cdot f\left(\frac{\bar{p}_0(y)}{0}\right) + \bar{q}(y) f\left(\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)}\right) - \bar{q}(y) f\left(\frac{\bar{p}_0(y) + \bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)}\right) < \frac{\tau}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 \cdot \frac{\varkappa}{2} \bar{q}(y),$$

wobei in der $\frac{\varepsilon}{2}$ -Umgebung von $\frac{\bar{p}_0(y) + \bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} = \frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)}$ $f''(u) > \tau$ gilt, woraus sich nach Hilfssatz 3

$$(49) \quad \frac{\bar{p}_0(y)}{\bar{q}(y)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (y \notin N_0 \cup N_1 \cup N_2)$$

ergibt. Aus (48) und (49) folgt — vgl. (23) —, daß für $y \notin N_0 \cup N_1 \cup N_2$ mit Wahrscheinlichkeit 1 (also \mathbf{Q} -f. ü.)

$$\mathbf{Q}^*\left(\left|\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)}\right| \leq \varepsilon \mid S'_Y\right) \geq 1 - \frac{\varkappa}{2}$$

gilt.

Daraus erhält man, mit Rücksicht auf (45), (46) und (47)

$$(50) \quad \mathbf{Q}^* \left(\left\{ (x, y) : \left| \frac{p(x)}{q(x)} - \frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} \right| \leq \varepsilon \right\} \right) \geq \left(1 - \frac{\kappa}{2} \right) \left(1 - \frac{16\delta}{\tau\kappa} - \frac{\kappa}{4} \right).$$

Wählt man nun z. B. $\delta = \frac{\tau\kappa^2}{64}$, so folgt aus (50) die Abschätzung (41)

wodurch Satz 2 bewiesen ist.

Bemerkung. Dem obigen Beweis liegt die folgende Behauptung zugrunde: Für jede Funktion f mit der Eigenschaft (39) kann man zu jedem $0 < \kappa < 1$ eine nur von f und κ abhängende positive Zahl δ derart angeben, daß für jede Zufallsvariable ξ (mit endlichem Erwartungswert) und jede σ -Algebra $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ (wobei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ diejenige Wahrscheinlichkeitsalgebra bezeichnet, auf welcher ξ definiert ist) aus

$$(40') \quad \mathbf{E}(f(\xi)) - \mathbf{E}(f(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1))) < \delta\varepsilon^2$$

die Relation

$$(41') \quad \mathbf{P}(|\xi - \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1)| \leq \varepsilon) \geq 1 - \kappa$$

folgt.

Der Beweis dieser Aussage ist im wesentlichen in demselben des Satzes 2 enthalten. Auf diese Tatsache hat mich Herr Professor A. RÉNYI aufmerksam gemacht, und auch darauf, daß sich die obige Behauptung im Spezialfall $f''(u) \geq \tau > 0$ ($0 < u < +\infty$) auch folgendermaßen beweisen läßt:

Nach der Taylorschen Formel gilt

$$\begin{aligned} f(\xi) - f(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1)) &= f'(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1))(\xi - \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1)) + \\ &+ \frac{1}{2}f''(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1) + \vartheta(\xi - \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1)))(\xi - \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1))^2 \geq \\ &\geq f'(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1))(\xi - \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1)) + \frac{\tau}{2}(\xi - \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1))^2, \end{aligned}$$

woraus

$$\mathbf{E}(f(\xi)|\mathcal{F}_1) - f(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1)) \geq \frac{\tau}{2} \mathbf{E}((\xi - \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1))^2|\mathcal{F}_1).$$

und daraus

$$\mathbf{E}(f(\xi)) - \mathbf{E}(f(\mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1))) \geq \frac{\tau}{2} \mathbf{E}((\xi - \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1))^2)$$

folgt. Dies bedeutet, daß (40') die Ungleichung

$$\mathbf{E}((\xi - \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1))^2) \leq \frac{2\delta\varepsilon^2}{\tau}$$

zu Folge hat, woraus sich nach der Tschebyscheffschen Ungleichung

$$\mathbf{P}(|\xi - \mathbf{E}(\xi|\mathcal{F}_1)| \geq \varepsilon) \leq \frac{2\delta}{\tau},$$

also (41') — wenn man $\delta = \frac{\tau}{2}\kappa$ wählt — ergibt.

Es sei bemerkt, daß wenn statt (39) schwächer nur

$$(39') \quad \inf_{a < u < b} f''(u) > 0 \quad \text{für jede} \quad 0 < a < b < +\infty$$

vorausgesetzt wird, so braucht die Behauptung des Satzes 2 nicht mehr gültig zu bleiben. Dies ist bereits der Fall für die Funktionen $f_\alpha(u) = u^\alpha$ ($\alpha > 2$) — die nur (39') erfüllen, (39) aber nicht — wie es der folgende Beispiel zeigt.

Beispiel. Betrachten wir einen Übertragungskanal mit je drei Eingangs- und Ausgangssignale und mit dem Übergangswahrscheinlichkeit-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten, X bzw. Y bestehe aus je drei Punkten, die mit 0, 1, 2 bezeichnet werden können. S_X und S_Y bestehen aus allen Teilmengen von X bzw. Y und $\nu(\cdot | x)$ sei durch

$$(51) \quad \begin{aligned} \nu(0|0) &= 1, \quad \nu(1|0) = \nu(2|0) = 0, \quad \nu(0|1) = \nu(0|2) = 0, \\ \nu(1|1) &= \nu(2|1) = \nu(1|2) = \nu(2|2) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

definiert. Die Wahrscheinlichkeitsmaße \mathbf{P} und \mathbf{Q} auf (X, S_X) seien durch

$$(52) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}(0) &= 1 - 2\varepsilon_1, \quad \mathbf{P}(1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \mathbf{P}(2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ \mathbf{Q}(0) &= 2\varepsilon_1, \quad \mathbf{Q}(1) = \mathbf{Q}(2) = \frac{1}{2} - \varepsilon_1 \end{aligned}$$

angegeben, wobei $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 \ll 1$ vorausgesetzt wird. Dann gilt nach (51) und (52)

$$(53) \quad \bar{\mathbf{P}}(0) = 1 - 2\varepsilon_1, \quad \bar{\mathbf{P}}(1) = \bar{\mathbf{P}}(2) = \varepsilon_1, \quad \bar{\mathbf{Q}}(0) = 2\varepsilon_1, \quad \bar{\mathbf{Q}}(1) = \bar{\mathbf{Q}}(2) = \frac{1}{2} - \varepsilon_1$$

also

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{fa}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) &= \mathcal{J}_a(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (2\varepsilon_1)^{1-a} (1 - 2\varepsilon_1)^a + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_1\right)^{1-a} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^a + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_1\right)^{1-a} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^a \\ \mathcal{J}_{fa}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) &= \mathcal{J}_a(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) = (2\varepsilon_1)^{1-a} (1 - 2\varepsilon_1)^a + 2 \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_1\right)^{1-a} \varepsilon_2^a \end{aligned}$$

das heißt

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{fa}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) - \mathcal{J}_{fa}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) &= \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_1\right)^{1-a} [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^a + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^a - 2\varepsilon_1^a] \sim \\ &\sim 2^{a-1} \varepsilon_1^a \alpha(\alpha - 1) \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 = 2^{a-1} \alpha(\alpha - 1) \varepsilon_1^{a-2} \varepsilon_2^2. \end{aligned}$$

Ist nun $\alpha > 2$ und ist δ eine beliebig kleine positive Zahl, so folgt aus (54) — indem man die positive Zahl ε_1 so wählt, daß $2^{\alpha-1}\alpha(\alpha-1)\varepsilon_1^{\alpha-2} \ll \delta$ gelte, und $\varepsilon = \varepsilon_2$ setzt — daß zu beliebig kleinem $\delta > 0$ ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ und zwei Maße $\bar{\mathbf{P}}$ und $\bar{\mathbf{Q}}$ mit $\mathcal{I}_{fa}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) - \mathcal{I}_{fa}(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) < \delta\varepsilon^2$ derart angegeben werden können, daß die Menge $\left\{ (x, y) : \left| \frac{p(x)}{q(x)} - \frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} \right| \leq \varepsilon \right\}$ nicht nur keine Menge von \mathbf{Q}^* -Maß nahe zu Eins, sondern — da sie nach (52) und (53) aus dem einzigen Punkt $(0, 0)$ besteht — gerade eine Menge von beliebig kleinem \mathbf{Q}^* -Maß darstellt.

Obwohl — wie eben gezeigt wurde — aus der Voraussetzung (39') die Behauptung des Satzes 2 nicht folgt, eine schwächere Behauptung kann auch auf Grund von (39') bewiesen werden. Es gilt nämlich der folgende

Satz 2'. Ist die konvexe Funktion $f(u)$ ($0 < u < +\infty$) zweimal differenzierbar und gilt

$$(39) \quad \inf_{a < u < b} f''(u) > 0 \text{ für jede } 0 < a < b < +\infty,$$

so kann zu jedem κ mit $0 < \kappa < 1$ und $\varepsilon' > 0$ eine von f , κ und ε' abhängende positive Zahl δ' derart angegeben werden, daß aus dem Erfülltsein von

$$(55) \quad \mathcal{I}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) - \mathcal{I}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) < \delta' \quad (\mathcal{I}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) < +\infty)$$

die Ungleichung

$$(56) \quad \mathbf{Q}^* \left(\left\{ (x, y) : \left| \frac{p(x)}{q(x)} - \frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} \right| \leq \varepsilon' \right\} \right) \geq 1 - \kappa$$

folgt.

Beweis. Man kann das im Beweis von Satz 2 benützte Verfahren anwenden. Es seien δ und ε (vorläufig) beliebige positive Zahlen und setzen wir voraus, daß (40) gültig ist. Wir setzen

$$\tau = \inf_{\frac{\varepsilon}{2} < u < \frac{5}{\kappa}} f''(u),$$

sonst werden die Bezeichnungen des Beweises von Satz 2 unverändert benützt.

Für $y \in Y - (N_0 \cup N_1 \cup N_2)$ unterscheiden wir die zwei Fälle $\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} > \varepsilon$

und $\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} \leq \varepsilon$. Im ersten Falle gilt in der $\frac{\varepsilon}{2}$ -Umgebung von $\int_0^\infty u \mathbf{Q}_0(du|y) = \frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)}$ nach der Definition von τ $f''(u) \geq \tau$, so daß Hilfssatz 2 anwendbar ist, wodurch sich die Ungleichung (48) ergibt. Ähnlicherweise erhält man — benützend Hilfssatz 3 — auch die Ungleichung (49).

Im zweiten Falle ist Hilfssatz 2 nicht anwendbar. Doch folgt aus

$$\int_0^\infty u \mathbf{Q}_0(du|y) = \frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} \leq \varepsilon \text{ die Ungleichung}$$

$$\mathbf{Q}_0 \left(\left[0, \frac{\varepsilon'}{2} \right] | y \right) \geq 1 - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon'}$$

und für $\varepsilon < \frac{\varepsilon'}{2}$ um so mehr

$$(57) \quad \mathbf{Q}_0 \left[\left(\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} - \frac{\varepsilon'}{2}, \frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} + \frac{\varepsilon'}{2} \right) \middle| y \right] \geq 1 - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

Was nun die Ungleichung (49) anbetrifft, im Falle $\frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} > \varepsilon$ folgt ihr Erfülltsein wieder aus Hilfssatz 3; im Falle $\frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} \leq \varepsilon$ wird nur das triviale

$$(58) \quad \frac{\bar{p}_0(y)}{\bar{q}(y)} \leq \varepsilon$$

benützt.

Wählt man nun $\varepsilon < \frac{\kappa}{4} \varepsilon'$, so gelten nach den obigen (vgl. (48), (49), (57), (58)) für $y \in Y - (N_0 \cup N_1 \cup N_2)$ jedenfalls die Ungleichungen

$$(48') \quad \mathbf{Q}_0 \left[\left(\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} - \frac{\varepsilon'}{2}, \frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} + \frac{\varepsilon'}{2} \right) \middle| y \right] \geq 1 - \frac{\kappa}{2},$$

$$(49') \quad \frac{\bar{p}_0(y)}{\bar{q}(y)} \leq \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Diese sind mit (48) und (49) vollständig analogisch und haben — bei geeigneter Wahl von δ , z. B. bei $\delta = \frac{\tau\kappa^2}{64}$ — die Beziehung (56) zu Folge, ebenso wie (48) und (49) die Beziehung (50), also auch (41) zu Folge hatte. Dadurch ist Satz 2' bereits bewiesen, bloß soll man $\delta' = \delta\varepsilon^2$ setzen.

Bemerkung zum Satz 2'. Aus den obigen ist ersichtlich, daß bei der Voraussetzung (39') die Behauptung des Satzes 2 im Allgemeinen darum nicht gilt, weil für diejenige $y \in Y$, für welche $\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)}$ klein ist, der Hilfssatz 2 nicht angewendet werden kann.

Diese Schwierigkeit kommt aber nicht vor, wenn für \mathbf{Q} -fast alle $y \in Y$ etwa

$$(59) \quad \frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)} \geq \varepsilon_0 > 0$$

gilt. Dann folgt nämlich aus (49) für $y \in N_0 \cup N_1 \cup N_2$ auch $\frac{\bar{p}_1(y)}{\bar{q}(y)} \geq \frac{2}{3} \varepsilon_0$ — angenommen $\varepsilon \leq \frac{2}{3} \varepsilon_0$ — also läßt sich der Beweis von Satz 2 für $\varepsilon \leq \frac{2}{3} \varepsilon_0$ — mit $\tau = \inf_{\frac{\varepsilon_0}{3} < u < \frac{5}{\kappa}} f''(u)$ — wörtlich durchführen.

Eine für das Bestehen von (59) hinreichende Bedingung ist z. B.

$$(60) \quad \frac{v(B|x_1)}{v(B|x_2)} \geq \varepsilon_0 \quad \text{für jede } x_1 \in X, x_2 \in X \quad \text{und} \quad B \in S_Y.$$

Die Bedingung (60) läßt sich auch so formulieren, daß die Maße $\nu(\cdot | x)$ miteinander äquivalent sind und für ihre Dichtefunktionen $h(y | x)$ — bezüglich eines dominierenden Maßes auf (Y, S_Y) — bei jedem $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ fast überall $\frac{h(y | x_1)}{h(y | x_2)} \geq \varepsilon_0$ gilt.

Zum Schluß des vorliegenden Paragraphen möchte ich die Frage der Verallgemeinerung des Satzes 1 für nicht normierbare Maße betrachten.

Erstens bemerke man, daß die Mehrzahl der in den Paragraphen 1 und 2 angeführten Bezeichnungen auch dann sinnvoll sind, wenn \mathbf{P} und \mathbf{Q} statt Wahrscheinlichkeitsmaße beliebige σ -endliche Maße bedeuten (auf die möglichen Ausnahmen wird unten hingewiesen); daher werden wir sie auch in diesem allgemeinen Falle benützen.

Es ist klar, daß Satz 1 und seine Ergänzung auch dann gültig bleiben, wenn \mathbf{P} kein Wahrscheinlichkeitsmaß, sondern ein beliebiges endliches Maß auf (X, S_X) darstellt, nämlich wurde im Beweis kein Gebrauch von $\mathbf{P}(X) = 1$ gemacht. Ebenso könnte auch \mathbf{Q} ein beliebiges endliches Maß bedeuten, bloß

sollte man in diesem Falle im Beweis die Maße $\frac{1}{\mathbf{Q}(X)} \mathbf{Q}$, $\frac{1}{\mathbf{P}(X)} \mathbf{P}$ benützen, wobei $\frac{1}{\mathbf{Q}(X)} \mathbf{Q}$ bereits ein Wahrscheinlichkeitsmaß darstellt. Will man Satz 1

auch für nicht normierbares (allerdings σ -endliches) \mathbf{P} verallgemeinern, so betrifft man die Schwierigkeit, daß das Definitionsintegral (4) von $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ nicht mehr unbedingt sinnvoll, sowie $\bar{\mathbf{P}}$ nicht unbedingt σ -endlich zu sein braucht. Ist aber mit \mathbf{P} auch $\bar{\mathbf{P}}$ σ -endlich und sind $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ und $\mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}})$ beide sinnvoll, so läßt sich der Beweis von Satz 1 und seiner Ergänzung auch für nicht normierbares \mathbf{P} wörtlich durchführen (falls $\mathbf{Q}(X) \neq 1$ aber doch endlich ist, so soll man \mathbf{P} und \mathbf{Q} erstens durch $\frac{1}{\mathbf{Q}(X)} \mathbf{Q}$ und $\frac{1}{\mathbf{Q}(X)} \mathbf{P}$ ersetzen).

Ist schließlich auch \mathbf{Q} nur σ -endlich, so kann man folgendermaßen vorgehen (vorausgesetzt, daß auch $\bar{\mathbf{P}}$ und $\bar{\mathbf{Q}}$ σ -endlich sind):

Man stelle die Menge X in der Form $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$ ($X_i \in S_X$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ für $i \neq j$) mit $\mathbf{Q}(X_i) < +\infty$ dar,⁸ und setze

$$(61) \quad \mathbf{P}_i(A) = \mathbf{P}(A \cap X_i), \quad \mathbf{Q}_i(A) = \mathbf{Q}(A \cap X_i) \quad (A \in S_X; i = 0, 1, \dots)$$

$$(62) \quad \bar{\mathbf{P}}_i(B) = \int_X \nu(B|x) \mathbf{P}_i(dx) = \int_{X_i} \nu(B|x) \mathbf{P}(dx) \quad (B \in S_Y; i = 0, 1, \dots)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_i(B) = \int_X \nu(B|x) \mathbf{Q}_i(dx) = \int_{X_i} \nu(B|x) \mathbf{Q}(dx)$$

$$(63) \quad \bar{p}_i(y) = \frac{\bar{\mathbf{P}}_i(dx)}{\bar{\lambda}(dx)}, \quad \bar{q}_i(y) = \frac{\bar{\mathbf{Q}}_i(dx)}{\bar{\lambda}(dx)} \quad (i = 0, 1, \dots).$$

⁸ Wobei X_0 die durch (19) definierte Menge bedeutet (also gilt $\mathbf{Q}(X_0) = 0$).

Dann erhält man durch Anwendung der im Beweis des Satzes 1 benützten Methode — s. (28) und (29) — auf die Maße $\frac{1}{\mathbf{Q}(X_i)} \mathbf{Q}_i$ und $\frac{1}{\mathbf{P}(X_i)} \mathbf{P}_i$

$$(64) \quad \int_{X_i} q(x) f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \lambda(dx) \geq \int_Y \bar{q}_i(y) f\left(\frac{\bar{p}_i(y)}{\bar{q}_i(y)}\right) \bar{\lambda}(dy) \quad (i = 1, 2, \dots),$$

ferner gilt

$$(65) \quad \int_{X_0} q(x) f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \lambda(dx) = \mathbf{P}(X_0) \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} = \bar{\mathbf{P}}(Y_0) \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} = \int_Y 0 \cdot f\left(\frac{\bar{p}_0(y)}{0}\right) \bar{\lambda}(dy),$$

also besteht (64) auch für $i = 0$ (mit der Gleichheit).

Nun gilt nach Hilfssatz 1, angewandt für das diskrete Wahrscheinlichkeitsmaß definiert durch

$$\mu(\{u\}) = \sum_{i: \frac{\bar{p}_i(y)}{\bar{q}_i(y)} = u} \frac{\bar{q}_i(y)}{\bar{q}(y)},$$

die Ungleichung

$$(66) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \bar{q}_i(y) f\left(\frac{\bar{p}_i(y)}{\bar{q}_i(y)}\right) \geq \bar{q}(y) f\left(\frac{\bar{p}(y) - \bar{p}_0(y)}{\bar{q}(y)}\right)$$

(es wurden auch die aus (61), (62), (63) folgenden Relationen $\sum_{i=0}^{\infty} \bar{p}_i(y) = \bar{p}(y)$,

$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{q}_i(y) = \bar{q}(y)$, $\bar{q}_0(y) = 0$ benutzt), ferner gilt nach Hilfssatz 2

$$(67) \quad 0 \cdot f\left(\frac{\bar{p}_0(y)}{0}\right) + \bar{q}(y) f\left(\frac{\bar{p}(y) - \bar{p}_0(y)}{\bar{q}(y)}\right) \geq \bar{q}(y) f\left(\frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)}\right).$$

Aus (64), (65), (66), (67) ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) &= \int_X q(x) f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \lambda(dx) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{X_i} q(x) f\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) \lambda(dx) \geq \\ &\geq \int_Y \bar{q}(y) f\left(\frac{\bar{p}(y)}{\bar{q}(y)}\right) \bar{\lambda}(dy) = \mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}), \end{aligned}$$

vorausgesetzt, daß beide Integrale sinnvoll sind. Man erhält in dieser Weise die folgende Verallgemeinerung des Satzes 1:

Satz 3. Sind \mathbf{P} und \mathbf{Q} beliebige σ -endliche Maße auf (X, S_X) mit endlichem $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, sind ferner auch $\bar{\mathbf{P}}$ und $\bar{\mathbf{Q}}$ σ -endlich, so ist auch $\mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}})$ sinnvoll, und es gilt

$$\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \geq \mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}),$$

wobei die Gleichheit für ein streng konvexes $f(u)$ dann und nur dann gilt, wenn (15) (bzw. (16)) besteht.

§ 4. Eine Anwendung

Betrachten wir eine homogene Markoffsche Kette mit den m -stufigen Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(m)}$.

Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anfangszustände $\mathbf{P}^{(1)} = (p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \dots)$ bzw. $\mathbf{Q}^{(1)} = (q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, \dots)$ so bezeichne $p_k^{(n)}$ bzw. $q_k^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit des k -ten Zustandes im Zeitpunkt n , und man setze $\mathbf{P}^{(n)} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \dots)$, $\mathbf{Q}^{(n)} = (q_1^{(n)}, q_2^{(n)}, \dots)$. Dann bestehen offenbar die Gleichungen

$$(68) \quad p_k^{(n+m)} = \sum_i p_i^{(n)} p_{ik}^{(m)}, \quad q_k^{(n+m)} = \sum_i q_i^{(n)} p_{ik}^{(m)},$$

die bedeuten, daß $\mathbf{P}^{(n+m)}$ bzw. $\mathbf{Q}^{(n+m)}$ (für beliebige natürliche Zahlen n und m) auffaßbar sind als die Verteilungen bestimmter, durch einen Kanal mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ik}^{(m)}$ übertragener Signale, deren ursprüngliche Verteilung \mathbf{P} bzw. \mathbf{Q} war.

Es gilt also nach Satz 1 für eine beliebige konvexe Funktion $f(u)$

$$(69) \quad \mathcal{J}_f(\mathbf{P}^{(n)}, \mathbf{Q}^{(n)}) \geq \mathcal{J}_f(\mathbf{P}^{(n+m)}, \mathbf{Q}^{(n+m)}).$$

Ist $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{Q}^{(1)}) < +\infty$, so folgt aus (69) (mit der Wahl $m=1$) und aus (35), daß die Größen $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}^{(n)}, \mathbf{Q}^{(n)})$ für $n \rightarrow \infty$ einen endlichen Grenzwert haben, und infolge dessen

$$(70) \quad \mathcal{J}_f(\mathbf{P}^{(n)}, \mathbf{Q}^{(n)}) - \mathcal{J}_f(\mathbf{P}^{(n+m)}, \mathbf{Q}^{(n+m)}) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

— gleichmäßig in m — gilt.

Aus (70) folgt nach Satz 2' — falls die Funktion $f(u)$ die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt — die Beziehung

$$(71) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(i,j) \in N_{n,m}^e} q_i^{(n)} p_{ij}^{(m)} = 1, \quad N_{n,m}^e = \left\{ (i,j) : \left| \frac{p_i^{(n)}}{q_i^{(n)}} - \frac{p_j^{(n+m)}}{q_j^{(n+m)}} \right| \leq \varepsilon \right\}$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Als Anwendung der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit wollen wir nun auf Grund von (71) den Markoffschen Satz beweisen, daß jede homogene Markoffsche Kette mit endlich vielen möglichen Zuständen N , für die es ein m_0 und j_0 mit $p_{ij_0}^{(m_0)} > 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$) gibt, ergodisch ist.

Wählen wir also eine beliebige in $(0, +\infty)$ definierte zweimal differenzierbare Funktion $f(u)$ mit

$$(39') \quad \inf_{a < u < b} f''(u) > 0 \quad \text{für jede } 0 < a < b < +\infty$$

und $f(0) = \lim_{u \rightarrow +0} f(u) < +\infty$. Wählen wir ferner etwa $\mathbf{Q}^{(1)} = \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N} \right)$.

Dann ist die Endlichkeit von $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{Q}^{(1)})$ für beliebige Anfangsverteilung $\mathbf{P}^{(1)}$ gesichert, also gilt — nach den oben Gesagten — die Beziehung (71).

Setzen wir $K_n(\varepsilon) = \left\{ i : q_i^{(n)} \geq \frac{\varepsilon}{N} \right\}$ und

$$(72) \quad d = \min_{1 \leq i \leq N} p_{ij_0}^{(m_0)} > 0.$$

Dann muß nach (71) für jedes $i \in K_n(\varepsilon)$ und genügend großes n ($i, j_0 \in N_{n, m_0}^e$, d. h.

$$(73) \quad |p_i^{(n)} q_{j_0}^{(n+m_0)} - q_i^{(n)} p_{j_0}^{(n+m_0)}| \leq \varepsilon q_i^{(n)} q_{j_0}^{(n+m_0)} \quad \text{für } i \in K_n(\varepsilon)$$

gelten, woraus durch Summieren

$$(74) \quad \left| q_{j_0}^{(n+m_0)} \sum_{i \in K_n(\varepsilon)} p_i^{(n)} - p_{j_0}^{(n+m_0)} \sum_{i \in K_n(\varepsilon)} q_i^{(n)} \right| \leq \varepsilon q_{j_0}^{(n+m_0)} \sum_{i \in K_n(\varepsilon)} q_i^{(n)} \leq \varepsilon q_{j_0}^{(n+m_0)}$$

folgt. Hier besteht nach der Definition von $K_n(\varepsilon)$

$$(75) \quad \sum_{i \in K_n(\varepsilon)} q_i^{(n)} > 1 - \varepsilon;$$

um auch $\sum_{i \in K_n(\varepsilon)} p_i^{(n)}$ abschätzen zu können, multiplizieren wir (73) durch $p_{ij_0}^{(m_0)}$ und summieren nach i ; dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left| q_{j_0}^{(n+m_0)} \sum_{i \in K_n(\varepsilon)} p_i^{(n)} p_{ij_0}^{(m_0)} - p_{j_0}^{(n+m_0)} \sum_{i \in K_n(\varepsilon)} q_i^{(n)} p_{ij_0}^{(m_0)} \right| \leq \\ & \leq \varepsilon q_{j_0}^{(n+m_0)} \sum_{i \in K_n(\varepsilon)} q_i^{(n)} p_{ij_0}^{(m_0)} \leq \varepsilon (q_{j_0}^{(n+m_0)})^2 \end{aligned}$$

und hieraus — benützend (68) —

$$(76) \quad \left| q_{j_0}^{(n+m_0)} \sum_{i \notin K_n(\varepsilon)} p_i^{(n)} p_{ij_0}^{(m_0)} - p_{j_0}^{(n+m_0)} \sum_{i \notin K_n(\varepsilon)} q_i^{(n)} p_{ij_0}^{(m_0)} \right| \leq \varepsilon (q_{j_0}^{(n+m_0)})^2.$$

Aus (76) folgt nach der Definition von $K_n(\varepsilon)$ und nach (62)

$$(77) \quad \sum_{i \notin K_n(\varepsilon)} p_i^{(n)} \leq \frac{\sum_{i \notin K_n(\varepsilon)} p_i^{(n)} p_{ij_0}^{(m_0)}}{d} \leq \left(\frac{p_{j_0}^{(n+m_0)}}{q_{j_0}^{(n+m_0)}} + q_{j_0}^{(n+m_0)} \right) \frac{\varepsilon}{d}.$$

Berücksichtigt man (75) und (77), so erhält man aus (74)

$$(78) \quad \begin{aligned} |q_{j_0}^{(n+m_0)} - p_{j_0}^{(n+m_0)}| & \leq \varepsilon q_{j_0}^{(n+m_0)} + [p_{j_0}^{(n+m_0)} + (q_{j_0}^{(n+m_0)})^2] \frac{\varepsilon}{d} + \\ & + \varepsilon p_{j_0}^{(n+m_0)} \leq 2 \left(1 + \frac{1}{d} \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Auf Grund von (78) und (73) sieht man gleich, indem man auch die aus (68) und (72) folgende Beziehung $q_{j_0}^{(n)} \geq d$ berücksichtigt, daß $|p_i^{(n)} - q_i^{(n)}|$ bei genügend großem n für jedes $i \in K_n(\varepsilon)$ „klein“ sein muß. Dasselbe gilt aber offenbar — vgl. (77) — auch für $i \notin K_n(\varepsilon)$. Dadurch ist die Limesrelation

$$(79) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |p_i^{(n)} - q_i^{(n)}| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

für $\mathbf{Q}^{(1)} = \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N} \right)$ und beliebiges $\mathbf{P}^{(1)}$ bewiesen, woraus aber ihre Gültigkeit für beliebige $\mathbf{P}^{(1)}$ und $\mathbf{Q}^{(1)}$ folgt.

Es sei nun $\mathbf{P}^{(1)}$ eine beliebige Anfangsverteilung und setzen wir $\mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{P}^{(2)}$; dann gilt $\mathbf{Q}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n+1)}$ und (79) ergibt

$$(80) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |p_i^{(n)} - p_i^{(n+1)}| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Wählen wir also eine Folge n_1, n_2, \dots von natürlichen Zahlen derart, daß jede der Folgen $\{p_i^{n_k}\}_{k=1}^\infty$ ($i = 1, 2, \dots, N$) konvergent ist: $p_i^{n_k} \rightarrow p$ ($i = 1, 2, \dots, N$), so muß $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ nach (80) eine stationäre Verteilung der betrachteten Markoffschen Kette sein, und aus (79) folgt, indem man nun $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}$ setzt, daß die Verteilung $\mathbf{Q}^{(n)}$ für $n \rightarrow \infty$ bei beliebiger Anfangsverteilung $\mathbf{Q}^{(1)}$ gegen diese stationäre Verteilung \mathbf{P} strebt.

$$\text{Setzt man insbesondere } q_{ij}^{(1)} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so ergibt sich

$$(81) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ik}^{(n)} = p_k \quad \text{für jede } i \text{ und } k,$$

also die Ergodizität der betrachteten Markoffschen Kette.

Bemerkung. Die Homogenität der Markoffschen Kette wurde erst beim Beweis der Existenz einer stationären Verteilung benutzt. Also ist die Beziehung (79) auch für jede inhomogene Markoffsche Kette bewiesen, für welche die Voraussetzung (72) gültig ist (wobei nun m_0 und j_0 sowie die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}^{(m)} = p_{ij}^{(m)}(n)$ selbst von dem Ausgangszeitpunkt n abhängen dürfen, die Zahlen $d(n) = \inf_{1 \leq i \leq N} p_{i0}^{(m,n)}(n)$ aber eine positive untere Grenze haben sollen.)

Führt man den obigen Beweis mit der Wahl $f(u) = u \log u$ durch, so kann sie als ein rein informationstheoretischer Beweis angesehen werden, indem dann im Beweis nur Eigenschaften der relativen Information (von Ordnung 1) $I(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q})$ benützt werden.

Die oben benützte Methode scheint nicht nur für den Beweis der Ergodizität von Markoffschen Ketten, sondern auch für den Beweis von anderen Grenzverteilungssätzen geeignet zu sein. Da die Ungleichung (13) nicht nur für Wahrscheinlichkeitsmaße, sondern auch für bestimmte σ -endliche Maße gültig ist (vgl. Satz 3) kann man erwarten, daß mit Hilfe der in diesem Paragraphen angewandten Methode — nach entsprechender Verallgemeinerung von Satz 2 bzw. 2' — auch manche Sätze bezüglich nicht normierbaren bedingten Verteilungen (vgl. [8]) beweisbar werden.

(Eingegangen: 16. Januar, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] KULLBACK, S.—LEIBLER, R. A.: „On information and sufficiency“. *Annals of Mathematical Statistics* **22** (1951) 79—86.
- [2] RÉNYI, A.: „On measures of entropy and information.“ *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Probability and Statistics, I*, Berkeley, 1960, 547—561.
- [3] PÉREZ, A.: „Notions généralisées d'incertitude, d'entropie et d'information du point de vue de la théorie de martingales“. *Transactions of the First Prague Conference*, Prague, 1957, 183—208.
- [4] ПИНСКЕР, М. С.: *Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов*. Издательство Академии Наук СССР, Москва, 1960.
- [5] CSISZÁR, I.: „Informationstheoretische Konvergenzbegriffe im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen“. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **7** (1962) 137—158.
- [6] DOOB, J. L.: *Stochastic Processes*. Wiley, 1953.
- [7] РОЗАНОВ, Ю. А.: „О плотности одной гауссовской меры относительно другой“. *Теория Вероятностей и ее Применения* **7** (1962) 84—89.
- [8] RÉNYI, A.: „On a new axiomatic theory of probability“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **6** (1955) 285—355.

ОДНО ТЕОРЕТИКО-ИНФОРМАЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ЭРГОДИЧНОСТИ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

I. CSISZÁR

Резюме

Для некоторой выпуклой функции $f(u)$ и для вероятностных мер \mathbf{P} и \mathbf{Q} на некотором измеримом пространстве (X, S_X) мы обозначим через $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ величину $\int_X qf\left(\frac{p}{q}\right) \lambda(dx)$ где p и q — плотности мер \mathbf{P} и \mathbf{Q} относящиеся к σ -конечной мере λ на (X, S_X) . $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ является обобщением понятия относительной информации (энтропии), так как в случае $f(u) = u \log u$ мы имеем $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = I(\mathbf{P} \parallel \mathbf{Q}) = H_{\mathbf{Q}}(\mathbf{P})$.

Если мы толкуем \mathbf{P} и \mathbf{Q} как распределения сигналов при входе канала $(X, Y, v(\cdot | x))$, происходящих из двух различных источников, тогда распределения \mathbf{P} и \mathbf{Q} выходных сигналов получаются формулами $\mathbf{P}(E) = \int_X v(E|x) \mathbf{P}(dx)$, $\mathbf{Q}(E) = \int_X v(E|x) \mathbf{Q}(dx)$.

В настоящей работе доказывается, что $\mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) \leq \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ (теорема 1), кроме того даны условие равенства $\mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) = \mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ и его применения к некоторым частным случаям а также одна оценка в случае малости разности $\mathcal{J}_f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) - \mathcal{J}_f(\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}})$ (дополнение к теореме 1, теоремы 2 и 2'). Теорема 1 обобщается и для σ -конечных мер (теорема 3).

В качестве применения результатов статьи в § 3 автор дает теоретико-информационное доказательство эргодичности некоторых цепей Маркова; при этом он не пользуется соображениями теории матриц. Доказательство такого характера дается здесь впервые.

ON THE FUNDAMENTAL FREQUENCIES OF TWO AND THREE DIMENSIONAL MEMBRANES

by

E. MAKAI

1. Introduction

Let $\lambda(G)$ denote the first eigenvalue (square of the fundamental frequency) of a simply or doubly connected two dimensional domain (membrane) G fixed along its whole boundary. Let A be the area of G and L its perimeter. (L is the measure of two disconnected point sets if G is ring-shaped.) G. PÓLYA has recently shown [4] that

$$\lambda(G) \leq \left(\frac{\pi}{2} \frac{L}{A} \right)^2.$$

Another theorem, found by L. E. PAYNE and H. F. WEINBERGER [3] states the following. Let G be a two dimensional membrane fixed on its exterior boundary curve C_0 . This membrane is permitted to have holes bounded by the interior bounding curves C_1, C_2, \dots along which it is free. Among all such membranes with given area A and given length L of C_0 the highest fundamental frequency is attained when G is bounded by two concentric circles fixed along the perimeter of the outer circle, free along the perimeter of the inner circle.

In case of those domains where both theorems may be applied, i.e. when G is fixed along its whole boundary and is simply connected, the theorem of PAYNE—WEINBERGER yields a sharper appraisal than that of PÓLYA.

In this paper we deal with the following two questions.

1. Is PÓLYA's theorem capable of an extension to multiply connected two dimensional domains?

2. Does a three dimensional analogon of the theorem of PAYNE—WEINBERGER exist?

The second problem is not trivial since the principal tool of PAYNE and WEINBERGER is an inequality of B. SZÓKEFALVI-NAGY[5]¹ between areas and perimeters of plain point sets the three dimensional analogon of which is not true.

Our results are as follows.

¹ In particular they use the fact easily derivable from the result of [5] that if $L(t)$ and $A(t)$ are the perimeter and area of the inner parallel domain $G(t)$ of a given simply connected domain G , [$G(t)$ consists of the union of the centers of all open circular disks of radii t which lie entirely in G] then the isoperimetric deficit $L^2(t) - 4\pi A(t)$ is a nonincreasing function of t .

Theorem 1. *If λ , A , L are the first eigenvalue of the first boundary value problem, area, and whole perimeter, respectively, of a multiply connected two dimensional domain G then there does not exist any positive constant Γ for which*

$$\lambda \leq \Gamma \cdot \left(\frac{L}{A} \right)^2.$$

In other words there exists such a sequence $G_1, G_2, \dots, G_m, \dots$ of multiply connected domains with areas A_m , perimeters L_m and first eigenvalues $\lambda(G_m)$, fixed along their whole (inner and outer) boundaries, that

$$(1.1) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(G_m) A_m^2 L_m^{-2} = \infty.$$

In Theorems 2 and 3 we consider a three dimensional domain D the outer boundary of which will be denoted by S_0 i.e. the points of the surface S_0 can be connected with infinity by paths lying entirely outside of D . The domain D may have holes in it bounded by the surfaces S_1, S_2, \dots . Further we prescribe that S_0 be convex. We denote by $\mathcal{S}(V, S)$ the set of all these domains with given volume V and area S of the outer surface S_0 . (We suppose, of course, that $S^3 \geq 36 \pi V^2$.) Let $D_{V,S}$ be that uniquely determined particular element of $\mathcal{S}(V, S)$ which is bounded by two concentric spherical surfaces the area of the outer surface being S .

We consider the first eigenvalue $\lambda(D)$ of a domain $D \in \mathcal{S}(V, S)$ fixed along its outer boundary S_0 and free on the inner boundaries S_1, S_2, \dots (in case these latter exist) and state the following two theorems.

Theorem 2. *Among all three dimensional domains with a given volume V and given area S of their outer surface (where the outer surface is convex) the spherical symmetric one, bounded by two concentric spherical surfaces, has the greatest first eigenvalue:*

$$(1.2) \quad \lambda(D) \leq \lambda(D_{V,S}) \quad \text{if } D \in \mathcal{S}(V, S).$$

Theorem 3. *With the same assumptions as in Theorem 2*

$$(1.3) \quad \lambda(D) \leq \left(\frac{\pi}{2} \frac{S}{V} \right)^2 \quad \text{if } D \in \mathcal{S}(V, S).$$

Incidentally Theorem 2 yields a sharper estimation, than Theorem 3, yet in Theorem 3 the constant $\pi/2$ cannot be replaced by a less one.

Theorems 2 and 3 require the convexity of the outer bounding surface S_0 whereas in the theorems of PAYNE—WEINBERGER and PÓLYA no analogous restriction is necessary. It will be shown by way of an example that this restriction arises not from the different way of proof we use here as contrasted to that of PAYNE and WEINBERGER. This example which is based on Theorem 1 shows that Theorems 2 and 3 are not valid even for simply connected, not necessarily convex three dimensional domains.

2. Annular membranes

We begin by considering two dimensional membranes bounded by two concentric circles of radii α and β ($\alpha < \beta$) fixed along the periphery of the inner

circle and free along the periphery of the outer circle. We denote by $\lambda(\alpha, \beta)$ the corresponding first eigenvalue:

$$(2.1) \quad \lambda(\alpha, \beta) = \min_{u(r, \varphi)} \int_0^{2\pi} \int_\alpha^\beta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 \right] r \, dr \, d\varphi \bigg/ \int_0^{2\pi} \int_\alpha^\beta u^2 r \, dr \, d\varphi$$

($u(\alpha, \varphi) = 0$, u , $\partial u / \partial r$, $\partial u / \partial \varphi$ continuous in $\alpha \leq r \leq \beta$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) or by a known property of circular symmetric domains

$$(2.2) \quad \lambda(\alpha, \beta) = \min_{f(r)} \int_\alpha^\beta [f'(r)]^2 r \, dr \bigg/ \int_\alpha^\beta [f(r)]^2 r \, dr$$

($f(\alpha) = 0$, $f(r)$, $f'(r)$ continuous in $\alpha \leq r \leq \beta$).

If now the first eigenvalue is 1, then it is known that the first eigenfunction is of the form

$$M_0(r) = J_0(r) + k Y_0(r)$$

or, exceptionally, of the form $Y_0(r)$ where

$$J_0(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} \left(\frac{r}{2} \right)^{2n}$$

and

$$Y_0(r) = 2 \left(\gamma + \log \frac{r}{2} \right) J_0(r) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} \left(\frac{r}{2} \right)^{2n} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

are Bessel functions of order 0 and of first and second kind, respectively;² γ is the constant of EULER—MASCHERONI and k is an appropriate constant.

The function $M_0(r)$ satisfies the boundary conditions

$$M_0(\alpha) = 0, \quad M_0'(\beta) = 0$$

and it vanishes nowhere in the interval $\alpha < r < \beta$.

Further it is known that if

$$M_1(r) = J_1(r) + k Y_1(r)$$

where

$$J_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+1)!} \left(\frac{r}{2} \right)^{2n+1}$$

and

$$Y_1(r) = 2 \left(\gamma + \log \frac{r}{2} \right) J_1(r) - \frac{2}{r} - \frac{r}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (n+1)!} \left(\frac{r}{2} \right)^{2n+1} \left(\frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

² The notations are the same as in WATSON: *Theory of Bessel functions*, 2nd ed., Cambridge, 1952.

are Bessel functions of order 1 and of first and second kind, respectively, then

$$M'_0(r) = -M_1(r).$$

It is also known that for $k > 0$ the function $M_0(r)$ has a unique root $r_0(k)$ in $0 < r < j_0$ where $j_0 = 2.40 \dots$ is the least positive root of $J_0(r)$.

We consider in the following the case when $k > 0$ and $\alpha = r_0(k)$. Then it is known that $\beta = r_1(k)$ where $r_1(k)$ is the least positive root of $M_1(r)$ and each other positive root of $M_1(r)$ is greater than j_0 . It is known, too, that if $k > 0$ then for $i = 0, 1$

$$(2.3) \quad M_i(r) < 0 \quad \text{if} \quad 0 < r < r_i(k), \quad M_i(r) > 0 \quad \text{if} \quad r_i(k) < r < j_0.$$

We state now that if k is a sufficiently small positive quantity, then

$$(2.4) \quad r_0(k) < 2 \exp - \frac{1}{2k} \quad \text{and} \quad r_1(k) > 2 \sqrt{k}.$$

Indeed

$$(2.5) \quad \begin{aligned} M_0 \left(2 \exp - \frac{1}{2k} \right) &= \left[1 + 2k \left(\gamma - \frac{1}{2k} \right) \right] J_0 \left(2 \exp - \frac{1}{2k} \right) + \\ &+ 2k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!^2} \left(\exp - \frac{1}{2k} \right)^{2n} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \\ &= 2k \left[\gamma J_0 \left(2 \exp - \frac{1}{2k} \right) + R \left(2 \exp - \frac{1}{2k} \right) \right] \end{aligned}$$

where

$$R \left(2 \exp - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!^2} e^{-n/k} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

The series expansions of $J_0 \left(2 \exp - \frac{1}{2k} \right)$ and $R \left(2 \exp - \frac{1}{2k} \right)$ are both of the type

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_m e^{-m/k}$$

with

$$a_0 > a_1 > \dots > a_m > 0$$

and since $\exp -1/(2k) < 1$, both terms of the right hand side of (2.5) are positive. Hence $M_0(2 \exp -1/(2k)) > 0$ which in view of (2.3) furnishes the first half of the assertion (2.4)

Further we shall show that $M_1(2 \sqrt{k}) < 0$ if $k < e^{-2\gamma}$ which combined with (2.3) yields the second half of the assertion (2.4). For

$$M_1(2 \sqrt{k}) = k [2(\gamma + \log \sqrt{k})] J_1(2 \sqrt{k}) - S(k),$$

where

$$S(k) = \frac{3}{2} k^{\frac{3}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{n+\frac{3}{2}}}{n! (n+1)!} \left[2 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n+2} \right]$$

and both $k J_1(2 \sqrt{k})$ and $S(k)$ are of the form

$$k^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n k^n$$

with

$$c_0 > c_1 k > c_2 k^2 > \dots > c_n k^n > \dots > 0$$

further $\gamma + \log \sqrt{k} < 0$.

Summing up the foregoing, we have shown that to every k between the limits 0 and $e^{-2\gamma}$ there exist two quantities $r_0(k)$ and $r_1(k)$ satisfying the inequalities (2.4) such that with the notation (2.2)

$$\lambda(r_0(k), r_1(k)) = 1.$$

Combining this with the elementary relation

$$(2.6) \quad \lambda(\varrho\alpha, \varrho\beta) = \frac{1}{\varrho^2} \lambda(\alpha, \beta)$$

we have for every positive quantity $\varrho(k)$

$$(2.7) \quad \lambda(\varrho(k) r_0(k), \varrho(k) r_1(k)) = \frac{1}{[\varrho(k)]^2}.$$

3. Construction of a series of membranes of finite areas and perimeters and of fundamental frequencies tending to infinity

Consider the following multiply connected two dimensional domain G_m . Of the square domain $0 \leq x, y \leq 1$ with periphery C_0 we cut out m^2 square domains of sides $2p(m)$. (Of the quantity $2p(m) < 1/m$ we shall dispose later.) The sides of the little squares are parallel to the x and y axes, respectively, and the centres of them are in the points

$$\left[\frac{1}{m} \left(i - \frac{1}{2} \right), \frac{1}{m} \left(j - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (i, j = 1, 2, \dots, m).$$

The peripheries of these square domains will be denoted by C_1, C_2, \dots, C_{m^2} . (Cf. Fig. 1. where $m=3$ and the point sets C_0, C_1, \dots, C_{m^2} are drawn with full lines.)

The total periphery and area of this domain are

$$(3.1) \quad L_m = 4 + 8 m^2 p(m)$$

and

$$(3.2) \quad A_m = 1 - 4 m^2 [p(m)]^2$$

respectively.

We denote by $\lambda(G_m)$ the first eigenvalue of the membrane G_m with fixed boundaries:

$$(3.3) \quad \lambda(G_m) = \min_u \int_{G_m} \text{grad}^2 u \, d\sigma / \int_{G_m} u^2 \, d\sigma$$

($u, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y$ continuous on G_m , $u(P) = 0$ if $P \in \bigcup_{i=0}^{m^2} C_i$.)

We omit now the fixed outer boundary C_0 and introduce the notation

$$\lambda'(G_m) = \min_u \int_{G_m} \text{grad}^2 u \, d\sigma / \int_{G_m} u^2 \, d\sigma$$

($u, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y$ continuous on G_m , $u(P) = 0$ if $P \in \bigcup_{i=1}^{m^2} C_i$.) Obviously

$$(3.4) \quad \lambda(G_m) \geq \lambda'(G_m)$$

as the boundary C_0 is in the second case a free boundary.

Now we cut up the domain G_m along the dotted lines of Fig. 1, i.e. along the straight lines

$$y = \frac{i}{m}; \quad x = \frac{i}{m}; \quad y = x \pm \frac{i}{m}, \quad y = x; \quad x + y = 1 \pm \frac{i}{m}, \quad x + y = 1$$

$$(i = 1, 2, \dots, m-1).$$

The totality of the intersections of the points at these straight lines with G_m

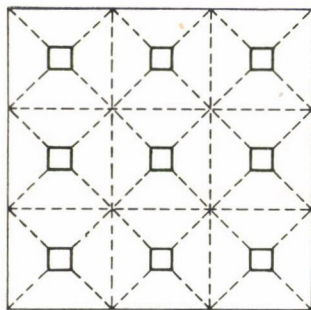


Fig. 1.

will be denoted by γ_m . We consider now the first eigenvalue of this dissected membrane consisting of $4 m^2$ congruent trapezoids, i.e.

$$\lambda''(G_m) = \min_u \int_{G_m} \text{grad}^2 u \, d\sigma / \int_{G_m} u^2 \, d\sigma$$

($u, \partial u / \partial x, \partial u / \partial y$ continuous in G_m except possibly at the points of γ_m , $u(P) = 0$ if $P \in \bigcup_{i=1}^{m^2} C_i$.) Again we have

$$(3.5) \quad \lambda''(G_m) \leq \lambda'(G_m).$$

If we denote by $\lambda(T_m)$ the first eigenvalue of the trapezoid $T_m = ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB = 1/m = 2q$, $CD = 2p(m) = 2p$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBA = 45^\circ$, cfr. Fig. 2.) fixed at the side CD and freely vibrating at its other sides then by a known theorem

$$(3.6) \quad \lambda''(G_m) = \lambda(T_m) = \min_u \int_{T_m} \text{grad}^2 u \, d\xi \, d\eta / \int_{T_m} u^2 \, d\xi \, d\eta$$

with $u, \partial u / \partial \xi, \partial u / \partial \eta$ continuous in T_m , $u(p, \eta) = 0$.

We state now that

$$\lambda(T_m) \geq \lambda(\sqrt{2} p, \sqrt{2} q)$$

where $\lambda(\alpha, \beta)$ has the same meaning as in Section 2. Indeed for every function $u(\xi, \eta)$ defined on the trapezoid T_m and satisfying the conditions

$$(3.7) \quad u, \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \varphi} \text{ continuous on } T_m, u(p, \eta) = 0$$

($r^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\operatorname{tg} \varphi = \eta/\xi$) the inequality

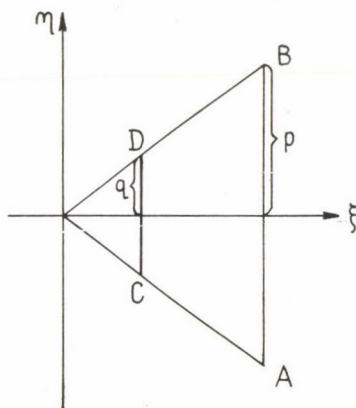


Fig. 2. (The letters p and q should be interchanged.)

$$(3.8) \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{p}{\cos \varphi}}^{\frac{q}{\cos \varphi}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 \right] r dr \geq \lambda(T_m) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{p}{\cos \varphi}}^{\frac{q}{\cos \varphi}} u^2 r dr$$

holds.

Further we have from (2.2) and (2.6) that

$$(3.9) \quad \int_{cp}^{cq} f'^2(r) r dr \geq \left(\frac{\sqrt{2}}{c} \right)^2 \lambda(\sqrt{2} p, \sqrt{2} q) \int_{cp}^{cq} f^2(r) r dr$$

if $f(cp) = 0$, $f(r)$ and $f'(r)$ are continuous in $cp \leq r \leq cq$. Now for every function u satisfying the conditions (3.7) we have by (3.9) that

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{p}{\cos \varphi}}^{\frac{q}{\cos \varphi}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 \right] r dr \geq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{p}{\cos \varphi}}^{\frac{q}{\cos \varphi}} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 r dr \geq \\ & \geq \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi (\sqrt{2} \cos \varphi)^2 \lambda(\sqrt{2} p, \sqrt{2} q) \int_{\frac{p}{\cos \varphi}}^{\frac{q}{\cos \varphi}} u^2 r dr \geq \lambda(\sqrt{2} p, \sqrt{2} q) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{p}{\cos \varphi}}^{\frac{q}{\cos \varphi}} u^2 r dr. \end{aligned}$$

Comparing this with inequality (3.8) we conclude, that

$$\lambda(T_m) \geq \lambda(\sqrt{2} p, \sqrt{2} q)$$

and by (3.4), (3.5), (3.6)

$$(3.10) \quad \lambda(G_m) \geq \lambda(\sqrt{2} p, \sqrt{2} q) = \lambda\left(\sqrt{2} p(m), \frac{1}{\sqrt{2} m}\right).$$

Now we dispose of the function $p(m)$ and of the quantities k and $\varrho(k)$ introduced in Section 2. We choose

$$(3.11) \quad k = \frac{1}{2m}, \quad \varrho(k) r_1(k) = \frac{1}{\sqrt{2} m}, \quad \sqrt{2} p(m) = \varrho(k) r_0(k)$$

and have for the eigenvalues $\lambda(G_m)$ by (3.10), (2.7) and (2.4) that

$$\begin{aligned} \lambda(G_m) &\geq \lambda\left(\sqrt{2} p(m), \frac{1}{\sqrt{2} m}\right) = \frac{1}{[\varrho(k)]^2} = \\ &= [\sqrt{2} m r_1(k)]^2 > \left(\sqrt{2} m \cdot 2 \sqrt{\frac{1}{2m}}\right)^2 = 4m \end{aligned}$$

which shows that the sequence

$$\lambda(G_2), \lambda(G_3), \dots$$

diverges to ∞ .

Further one has

$$\begin{aligned} p(m) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varrho(k) r_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varrho(k) r_1(k) \cdot \frac{r_0(k)}{r_1(k)} \\ &< \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} m} \cdot e^{-m} \cdot \sqrt{2m} = \frac{1}{\sqrt{2m}} e^{-m} \end{aligned}$$

by (3.11) and (2.4). Hence (cf. (3.1) and (3.2))

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} L_m &= 4 + 2^{5/2} \lim_{m \rightarrow \infty} m^{3/2} e^{-m} = 4, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} A_m &= 1 - 2 \lim_{m \rightarrow \infty} m e^{-m} = 1 \end{aligned}$$

and so (1.1) is established for the particular series of domains $G_2, G_3, \dots, G_m, \dots$

4. A geometrical lemma

For proving Theorem 2 we consider a connected three dimensional domain D of volume V and of *convex* outer surface S_0 . The domain may have holes in it bounded by the surfaces S_1, S_2, \dots

We consider further the simply connected convex domain \bar{D} of volume \bar{V} and of surface area S bounded by S_0 . Its inner parallel domains $\bar{D}(t)$ are defined as the set of the centres of all open spheres of radii t lying entirely in \bar{D} . Here t is any number between 0 and r_i , the radius of the greatest sphere

inscribed in \bar{D} . The volumes and surfaces of the domains $\bar{D}(t)$ (and their respective measures) will be denoted by $\bar{V}(t)$ and $\bar{S}(t)$, respectively, and we state that the difference

$$(4.1) \quad \Delta(t) = \left(\frac{\bar{S}(t)}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3 \bar{V}(t)}{4\pi}$$

corresponding to the isoperimetric deficit in footnote 1 is a non-increasing function of t .

The functions $\Delta(t)$, $\bar{V}(t)$ and $\bar{S}(t)$ are defined and continuous for $0 \leq t \leq r_i$ and have a right derivative in $0 \leq t < r_i$. [1, p. 62.]. So for showing the statement it suffices to prove that

$$(4.2) \quad \Delta'(t) = \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{\bar{S}(t)} \bar{S}'(t) - \frac{3}{4\pi} \bar{V}'(t) \leq 0$$

($0 \leq t < r_i$) where the primes denote right hand derivatives, or as $-\bar{V}'(t) = -\bar{S}'(t)$ [1, formula 80]

$$\sqrt{4\pi \bar{S}(t)} \leq -\frac{1}{2} \bar{S}'(t).$$

This however is true, since from the convexity of \bar{D} follows the convexity of $\bar{D}(t)$, [1, p. 17] and if $\bar{M}(t)$ denotes the Minkowski constant of the convex domain $\bar{D}(t)$ then

$$\sqrt{4\pi \bar{S}(t)} \leq \bar{M}(t) \quad \text{and} \quad \bar{M}(t) \leq -\frac{1}{2} \bar{S}'(t)$$

[1, formulae (70) and (79b)].

We need now the inequality

$$\Delta(0) \geq \Delta(t) \quad (0 \leq t < r_i)$$

or

$$(4.3) \quad \left(\frac{S}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\bar{S}(t)}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \geq 3 \frac{\bar{V} - \bar{V}(t)}{4\pi}.$$

If we denote by $V(t)$ and $S(t)$ those portions of $\bar{V}(t)$ and $\bar{S}(t)$ which lie in $D(t)$, then we have

$$S(t) \leq \bar{S}(t) \quad \text{and} \quad \bar{V} - \bar{V}(t) \geq V - V(t)$$

and (4.3) implies

$$(4.4) \quad \left(\frac{S}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{S(t)}{4\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \geq 3 \frac{V - V(t)}{4\pi}$$

or with the notation

$$(4.5) \quad \tau = V - V(t),$$

$$(4.6) \quad [S(t)]^{3/2} \leq S^{3/2} - 3 \sqrt{4\pi} \tau.$$

Here the sign of equality is valid, if D is the domain $D_{V,S}$ bounded by two concentric spheres and S is the surface of the outer sphere.

5. Proof of Theorems 2 and 3

In the foregoing section we let to every point P inside or on the convex surface S_0 correspond a number $t = t(P)$, its shortest distance from S_0 . If S_0 is a polyhedral surface, the function $t(P)$ is continuous and piecewise continuously differentiable. The discontinuities of the derivatives are situated on planes whose points are equally distant from two planes of the polyhedral surface S_0 .

In this section we restrict ourselves to the subset $\mathcal{S}_1(V, S)$ of $\mathcal{S}(V, S)$ consisting (a) of all those elements of $\mathcal{S}(V, S)$ whose outer surface is polyhedral, (b) of the spherical symmetric element $D_{V,S} \in \mathcal{S}(V, S)$ and prove formulae (1.2) and (1.3) only in the case when $D \in \mathcal{S}_1(V, S)$.

In this case a simple geometrical consideration shows that $\text{grad } t(P)$ is piecewise continuous in D and

$$(5.1) \quad |\text{grad } t(P)| = 1$$

save for a point set of three dimensional measure 0.

The first eigenvalue $\lambda(D)$ belonging to the eigenvalue problem dealt with in Theorems 2 and 3 is defined by

$$\lambda(D) = \min_u \frac{\iiint_D \text{grad}^2 u \, dV}{\iiint_D u^2 \, dV}$$

(u continuous, its first partial derivatives piecewise continuous in D , $u = 0$ on S_0 .)

If we restrict ourselves to continuous functions $u = f(t)$ only, where $t = t(P)$, $f(0) = 0$, $f'(t)$ is piecewise continuous, then

$$(5.2) \quad \lambda(D) \leq \min_{f(t)} \frac{\iiint_D \text{grad}^2 f(t) \, dV}{\iiint_D f^2(t) \, dV} = \lambda'(D).$$

The sign \leq arises from the fact that the set of the functions $f(t)$ form a subset of the functions u admitted to variation. Note that the sign of equality is valid in (5.2) in the case when $D = D_{V,S}$ since the first eigenfunction is in this case of the form

$$\frac{\sin \mu(r_1 - r)}{\sqrt{r}} = \frac{\sin \mu t}{\sqrt{r_1 - t}},$$

where $r = r(P)$ is the distance of the variable point P from the common centre of the bounding spherical surfaces.

Since $f(t)$ and $\text{grad}^2 f(t)$ are constant (if defined) along the inner parallel surfaces of D we may write in view of (5.1)

$$(5.3) \quad \lambda'(D) = \min_{f(t)} \frac{\int_0^{r_1} f'^2(t) S(t) \, dt}{\int_0^{r_1} f^2(t) S(t) \, dt}.$$

We introduce now the new variable

$$\tau = V - V(t)$$

for which we have $d\tau = S(t)dt$. If we write $f(t) = g(\tau)$ then (5.3) is transformed into

$$(5.4) \quad \lambda'(D) = \min_{g(\tau)} \frac{\int_0^V \left(\frac{dg}{d\tau} \right)^2 [S(t)]^2 d\tau}{\int_0^V [g(\tau)]^2 d\tau}.$$

[$g(0) = 0$, $g(\tau)$ continuous, $g'(\tau)$ piecewise continuous.]

Again we may write in view of (4.6) that

$$(5.5) \quad \lambda'(D) \leq \min_{g(\tau)} \frac{\int_0^V \left(\frac{dg}{d\tau} \right)^2 [S^{3/2} - 3\sqrt{4\pi}\tau]^{4/3} d\tau}{\int_0^V [g(\tau)]^2 d\tau} = \lambda''(D).$$

Note that the sign of equality is again valid in the case if $D = D_{V,S}$, further that the right hand side of (5.5) depends only on S and V but on no other data of the domain D .

Summing up we have

$$\lambda(D) \leq \lambda'(D) \leq \lambda''(D)$$

and $\lambda(D) = \lambda''(D)$ if $D = D_{V,S}$, hence

$$\lambda(D) \leq \lambda(D_{V,S})$$

which is the content of Theorem 2 in our particular case.

To obtain Theorem 3 we start with (5.5) and write

$$(5.6) \quad \lambda''(D) \leq \min_{g(\tau)} S^2 \frac{\int_0^V \left(\frac{dg}{d\tau} \right)^2 d\tau}{\int_0^V [g(\tau)]^2 d\tau} = S^2 \left(\frac{\pi}{2V} \right)^2 \quad (D \in \mathcal{S}_1(V, S))$$

[2, p. 184.] This reasoning is the same as PÓLYA's in the two dimensional case.

The constant $\pi/2$ cannot be improved in the inequality

$$\lambda(D) \leq \left(\frac{\pi}{2} \frac{S}{V} \right)^2,$$

since in the case of an infinite rectangular slab of edges a, b, c with a and b tending to infinity

$$\lambda(D) = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \sim \left(\frac{\pi}{c} \right)^2 \sim \left(\frac{\pi}{2} \frac{S}{V} \right)^2.$$

6. Proof of Theorems 2 and 3 (continued)

We proceed now to the proof of Theorems 2 and 3 for an arbitrary three dimensional domain $D \in \mathcal{S}(V, S)$. Since S_0 is convex we can always find a

series of simply connected domains $\{D^{(l)}\}$, $l = 1, 2, \dots$ with volumes and surfaces $V^{(l)}, S^{(l)}$, respectively, fulfilling the following requirements:

$$D^{(l)} \in \mathcal{S}_1(V^{(l)}, S^{(l)}), \bigcup_{l=1}^{\infty} D^{(l)} = D, \lim_{l \rightarrow \infty} V^{(l)} = V, \lim_{l \rightarrow \infty} S^{(l)} = S.$$

Now $\lambda(D) \leq \lambda(D^{(l)})$ for $D^{(l)} \subseteq D$, further $\lambda(D^{(l)}) \leq \lambda(D_{V^{(l)}, S^{(l)}})$ and since $\lambda(D_{V^{(l)}, S^{(l)}}) \rightarrow \lambda(D_{V, S})$ we have the statement of Theorem 2:

$$\lambda(D) \leq \lim \lambda(D^{(l)}) \leq \lim \lambda(D_{V^{(l)}, S^{(l)}}) = \lambda(D_{V, S}).$$

Since by (5.6)

$$\lambda(D_{V, S}) \leq \left(\frac{\pi}{2} \frac{S}{V} \right)^2$$

Theorem 3 is also proved.

7. Impossibility of the extension of Theorems 2 and 3 to nonconvex domains

It will be shown now that Theorems 2 and 3 are not valid without the assumption of the convexity of S_0 even in the case of simply connected domains containing no holes.

For this purpose we shall construct a series $\{D_m\}$ ($m = 1, 2, \dots$) of simply connected three dimensional domains with surface areas and volumes S_m and V_m respectively, for which

$$\lambda(D_m) \cdot S_m^{-2} V_m^2 \rightarrow \infty \quad \text{if } m \rightarrow \infty$$

where $\lambda(D_m)$ is the first eigenvalue of the first boundary value problem of the domain D_m :

$$\lambda(D_m) = \min_u \iint\limits_{D_m} \text{grad}^2 u \, dV / \iint\limits_{D_m} u^2 \, dV$$

(u continuous, $\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial u / \partial z$ piecewise continuous in D_m , $u = 0$ on the whole surface of D_m .) This involves that the appraisal (1.3) of Theorem 3, hence the sharper estimation of Theorem 2, too, are not true, for at least one domain D_m .

We construct the domains D_m as follows. We take a cube of unit volume the coordinates of its points satisfying the inequalities $0 \leq x, y, z \leq 1$.

From this cube we cut out m^2 parallelepipeds of height 1 the bases of which are squares of sides $2p(m)$ so that each horizontal cut of the body shows the pattern of Fig. 1. We now dissect this body by the horizontal plane $z = 1/2$ and move the upper half in the direction of the vector $[-1, -1, 0]$ by a quantity $3p(m)$. If $m > m_0$, where m_0 is an appropriate integer, the resulting body D_m will be simply connected (See Fig. 3 for the case $m = 2$.)

The surface of D_m may be divided in two parts. The first part, say S'_m , which is an open point set, consists of all those points of the surface the z coordinates of which are either 0 or 1 and where the normal is vertical. The second part, the closed point set S''_m consists of all the other points of the surface of D_m .

We define now

$$\lambda_1(D_m) = \min_v \iiint_{D_m} \text{grad}^2 v \, dV / \iiint_{D_m} v^2 \, dV$$

(v continuous, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$, $\partial v/\partial z$ piecewise continuous in D_m , $v=0$ on S_m'' .) Obviously

$$(7.1) \quad \lambda_1(D_m) \leq \lambda(D_m).$$

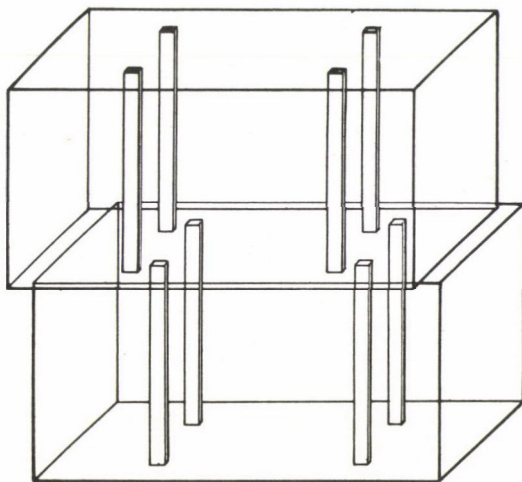


Fig. 3.

Further if

$$\lambda_2(D_m) = \min_v \iiint_{D_m} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dV / \iiint_{D_m} v^2 \, dV$$

where v is subject to the same restrictions as above, then

$$(7.2) \quad \lambda_2(D_m) \leq \lambda_1(D_m).$$

Now if p_z is the set of points the third coordinates of which are z , then we may write

$$(7.3) \quad \lambda_2(D_m) = \min_v \int_0^1 dz \iint_{p_z \cap D_m} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy / \int_0^1 dz \iint_{p_z \cap D_m} v^2 \, dx \, dy.$$

But for any fixed z and any function v satisfying the continuity and boundary conditions we have by (3.3)

$$(7.4) \quad \iint_{p_z \cap D_m} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx \, dy \geq \lambda(G_m) \iint_{p_z \cap D_m} v^2 \, dx \, dy$$

where $\lambda(G_m)$ has the same meaning as in section 3. Integrating the last inequality in $0 \leq z \leq 1$ we conclude that

$$(7.5) \quad \int_0^1 dz \iint_{p_z \cap D_m} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq \lambda(G_m) \int_0^1 dz \iint_{p_z \cap D_m} v^2 dx dy$$

which shows in connection with (7.3) that

$$\lambda_2(D_m) \geq \lambda(G_m).$$

Summing up we have

$$\lambda(D_m) \geq \lambda(G_m)$$

and as

$$\frac{S_m}{V_m} > \frac{L_m}{A_m}$$

where L_m and A_m have the same meaning as in section 3 we infer that

$$\lambda(D_m) \left(\frac{S_m}{V_m} \right)^2 > \lambda(G_m) \left(\frac{L_m}{A_m} \right)^2$$

and hence by (1.1)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(D_m) \left(\frac{S_m}{V_m} \right)^2 = \infty.$$

(Received January 18, 1963.)

REFERENCES

- [1] HADWIGER, H.: *Altes und Neues über konvexe Figuren*. Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1955.
- [2] HARDY, G. H.—LITTLEWOOD, J. E.—PÓLYA, G.: *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, 1934.
- [3] PAYNE, L. E.—WEINBERGER, H. F.: „Some isoperimetric inequalities for membrane frequencies and torsional rigidity”. *Journal of Mathematical Analysis and its Applications* **2** (1961) 210—216.
- [4] PÓLYA, G.: „Two more inequalities between physical and geometrical quantities”. *Journal of the Indian Mathematical Society* (2) **24** (1960) 413—419.
- [5] SZÓKEFALVI-NAGY, B.: „Über Parallelmengen nichtkonvexer ebener Bereiche”. *Acta Scientiarum Math.* **20** (1959) 36—47.

ОСНОВНОЙ ТОН ДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫХ МЕМБРАН

Е. МАКАИ

Резюме

Пусть G связная плоская область, A — ее площадь и L — суммарная длина граничных кривых. Рассмотрим первое собственное значение той мембраны, которая закреплена вдоль границы области G . ПÓЛҮА доказал, что если G не более чем двухсвязная область, тогда $\lambda \leq \left(\frac{\pi}{2} \frac{L}{A} \right)^2$. В первой

части статьи автор доказывает, что неравенство Рóблѳа нельзя распространить на многосвязные области, даже если константа $\pi/2$ замечается другой константой Γ , величина которой заранее не ограничивается.

Пусть D — многосвязная пространственная область, ограниченная выпуклой поверхностью S_0 , внутри которой находятся и остальные ограничивающие D поверхности и пусть V — ее объем и S — ее внешняя поверхность. Основной тон трехмерной мембраны закрепленной по поверхности S_0 — не более, чем основной тон трехмерной мембраны ограниченной двумя концентрическими шарами, закрепленной по внешнему шару и объем которой равен V и внешняя поверхность (поверхность внешнего шара) которой равна S .

IRRFahrtsPROBLEME MIT EINER SPIEGELNDEN WAND

von

PÁL BÁRTFAI

Einleitung

Die vorliegende Arbeit enthält die Betrachtung des folgenden Irrfahrtsproblems: Es seien $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ unabhängige zufällige Variablen mit derselben Verteilung $\mathbf{P}(\xi_i = k) = p_k, (k = 0, 1, 2, \dots)$. Der wandernde Punkt befinde sich im Zeitpunkt $t = 0$ im Punkte Null, und im ersten Schritt gelange er im Punkt ξ_1 der Zahlengerade. Die folgenden Schritte des wandernden Punktes seien folgendermassen angegeben: ist er nach dem $(n - 1)$ -ten Schritt im Punkte k , so gelange er im n -ten Schritt in den Punkt $|k - \xi_n|, (k = 0, 1, 2, \dots)$. Mit anderen Worten soll der wandernde Punkt immer Schritte in die Richtung der Nullpunktes von Länge ξ_n machen, aber derart, als ob sich im Ursprung eine spiegelnde Wand befinde.

Im folgenden wird oft bequemer sein mit einem anderen, dem vorigen äquivalenten Modell zu arbeiten (dies wird das »zweiseitige« Modell genannt werden, um es vom vorigen, »spiegelnden« Modell zu unterscheiden). Dieses Modell entsteht aus dem vorigen durch Weglassen der spiegelnden Wand im Ursprung: befindet sich also der wandernde Punkt im $(n - 1)$ -ten Schritt im Punkte k , so gelangt er im Sinne des zweiseitigen Modells im n -ten Schritt in den Punkt $k - \xi_n$ bzw. $k + \xi_n$, je nachdem $k \geq 0$ oder $k < 0$ gilt. Wollen wir in den folgenden das zweiseitige Modell benützen, so werden wir es immer ausdrücklich sagen, andernfalls soll man an das spiegelnde Modell denken.

Das eben beschriebene Modell stammt von einem — bisher ungelösten — Problem von A. RÉNYI. Dieses Problem lautet folgendermassen: zerlegen wir die Menge der ganzen Zahlen in zwei disjunkte Teilmengen A und B , und der sich nach dem $(n - 1)$ -ten Schritte im Punkte k befindende wandernde Punkt schreite in $k - \xi_n$ bzw. in $k + \xi_n$ je nachdem $k \in A$ oder $k \in B$ gilt; bei welcher Wahl von A und B wird der Erwartungswert der Zeit während der der wandernde Punkt zuerst in den Ursprung wiederkehrt minimal? Mit anderen Worten: falls man abhängig vom Befindungsort des wandernden Punktes entscheiden dar, in welcher Richtung der folgende Schritt erfolgen soll, bei welcher Strategie wird die mittlere Zeit des Wiederkehrens des wandernden Punktes am kleinsten.

Der obige »zweiseitige« Modell entspricht der Wahl $A = \{0, 1, 2, \dots\}$ $B = \{-1, -2, \dots\}$ und wir werden die mittlere Zeit des Wiederkehrens in diesem Falle berechnen.

Das in des vorliegenden Arbeit betrachtete Problem kann ausser seinem theoretischen Interesse und Schönheit auch aus praktischem Hinsicht nützlich sein, da derartige Probleme auch bei bestimmten regelungstechnischen Metho-

den auftreten. Kann nämlich bei der Kontrolle eines Systems nur die Richtung nicht aber die Grösse — des etwaigen Fehlers beobachtet werden, erfolgt also die Korrektur in der beobachteten Richtung durch eine zufällig gewählte Grösse so kann die Situation durch unseren zweiseitigen Modell beschrieben werden. Die Verteilung der Korrektur ξ_n kann dann im allgemeinen auch stetig sein, welcher Fall in § 4 betrachtet wird.

§ 2 enthält die Lösung des gestellten Problems sowie die Berechnung der Grenzverteilung des wandernden Punktes für den Fall $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\xi_n) < \infty$. In § 3 wird bewiesen, dass diese Voraussetzung für die Existenz der Grenzverteilung nicht nur hinreichend sondern auch notwendig ist. In § 4 werden manche weiteren Probleme erwähnt.

§ 2. Der Fall $\mathbf{M}(\xi_n) < +\infty$

Im folgenden wird stets vorausgesetzt, dass der grösste gemeinsame Teiler der Zahlen k mit $p_k > 0$ gleich 1 ist. Geht die Irrfahrt aus dem Nullpunkt aus — und wir beschäftigen uns nur mit diesem Fall, was aber keinen wesentlichen Unterschied im Vergleich mit dem allgemeinen Fall bedeutet — so stellt die obige Voraussetzung keine Beschränkung der Allgemeinheit dar. Ist nämlich der obige grösste gemeinsame Teiler gleich d , so findet die Irrfahrt auf den Punkten ld ($l = 0, 1, \dots$) statt und das Erfülltsein der obigen Voraussetzung kann erreicht werden, indem man die Zustände einfach umnummeriert.

Vor allem beweisen wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Das Irrfahrtsproblem stellt eine irreduzible Markoffsche Kette dar. Die erreichbaren Zustände sind die folgenden: $0, 1, 2, \dots, a$, $a = \max \{k : p_k > 0\}$; ist $a = +\infty$, so ist jeder der Zustände $0, 1, 2, \dots$ erreichbar.*

Beweis. Wähle man eine so grosse ganze Zahl N , dass bereits die Zahlen k aus $0, 1, 2, \dots, N$ mit positivem p_k den grössten gemeinsamen Teiler 1 haben. Diese k -Werte seien mit k_1, k_2, \dots, k_l bezeichnet, wobei $k_l = N$ vorausgesetzt werden darf.

Nach einem bekannten zahlentheoretischen Satz kann man ganze Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ mit

$$(1) \quad \sum_{i=1}^l \alpha_i k_i = 1$$

finden.

Wir beweisen, dass der Ursprung aus jedem Punkt $0 \leq j \leq N$ erreichbar ist. Multipliziert man (1) mit j , so ergibt sich

$$(2) \quad \sum_{i=1}^l j \alpha_i k_i = j.$$

Benützen wir nun das »zweiseitige« Modell; machen wir, ausgegangen von j , $j \alpha_1$ Schritte von Länge k_1 nach links bzw. nach rechts, je nachdem ob das Vorzeichen von $j \alpha_1$ positiv, bzw. negativ ist. Dieses Vorgehen ist aber nicht immer ohne weiteres möglich; ist z. B. $\alpha_1 > 0$ so kann es vorkommen, dass man z. B. mit dem zweiten Schritt an den negativen Teil der Zahlengerade gelangt, in welchem Falle ein dritter Schritt nach links nicht möglich ist. Diese Schwierigkeit kann mit Hilfe von einem »Temposchritt« der Länge N behoben werden, wodurch man den positiven Teil der Zahlengerade erreicht, von wo

man wieder nach links schreiten kann. Mit Einschaltung solcher »Tempo-schritte« kann man die $j\alpha_1$ Schritte in der entsprechenden Richtung durchführen; nach diesen machen wir $j\alpha_2$ Schritte von Länge k_2 in der dem Vorzeichen von $j\alpha_2$ entsprechenden Richtung — falls nötig, mit Einschaltung von »Temposchritten« — u. s. w., am Ende sollen $j\alpha_l$ Schritte von Länge k_l durchgeführt werden. Dann wird mit dem letzten Schritt notwendigerweise der Ursprung erreicht. Die Irreduzibilität der Markoffschen Kette ist dadurch bereits bewiesen, da nach den obigen der Ursprung aus jedem vom Ursprung erreichbaren Zustand j erreichbar ist.

Die zweite Behauptung des Hilfsatzes, also das jeder Zustand $0 < j \leq a$ vom Ursprung erreichbar ist, kann mit demselben Gedankengang bewiesen werden, nur kann es vorkommen, das man nach dem letzten Schritt statt j in $j - N \leq 0$ gelangt, von wo aber j bereits mit einem Schritt erreichbar ist.

Hilfssatz 2. *Die betrachtete Markoffsche Kette ist entweder aperiodisch oder hat die Periode zwei. Die notwendige und hinreichende Bedingung für ihre Aperiodizität ist die Existenz einer geraden Zahl k mit positivem p_k .*

Beweis. Bekanntlicherweise hat jeder Zustand einer irreduziblen Markoffschen Kette die gleiche Periode. Da die Wiederkehr in den Ursprung mit zwei Schritten immer möglich ist, muss die Periode ein Teiler von zwei sein, womit die erste Behauptung bewiesen ist.

Nehmen wir nun $p_{2k_0} > 0$ (mit irgendwelchem ganzen k_0) an; um die Aperiodizität der vorliegenden Markoffschen Kette zu zeigen, genügt einzusehen das der wandernde Punkt auch mit einer ungeraden Anzahl von Schritten in den Ursprung wiederkehren kann, also das der Ursprung aus $2k_0$ auch mit einer geraden Zahl von Schritten erreichbar ist. Der Beweis verläuft demselben des Hilfsatzes 1 ähnlich. Wähle man die Zahl N derart, dass neben den dortigen Voraussetzungen auch noch $N \geq 2k_0$ gilt. Zu den Zahlen $2k_0, k_1, k_2, \dots, k_l$ ($p_{k_i} > 0, i = 1, 2, \dots, l; (2k_0, k_1, k_2, \dots, k_l) = 1$) seien die ganze Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ bestimmt, dass

$$\alpha_0 2k_0 + \sum_{i=1}^l \alpha_i k_i = 1,$$

d. h.

$$(3) \quad 2k_0 \alpha_0 \cdot 2k_0 + \sum_{i=1}^l 2k_0 \alpha_i \cdot k_i = 2k_0$$

gilt. Führe man die in (3) vorgeschriebene Schritte — mit den nötigen »Tempo-schritte« — durch (ebenso wie es bei (2) gemacht wurde).

Die Zahl der gemachten Schritte wird dann gerade sein — da auch eine gerade Anzahl von Temposchritten nötig ist — wodurch die Erreichbarkeit des Ursprungs aus $2k_0$ mit einer endlichen Anzahl von Schritten also auch die Aperiodizität der vorliegenden Markoffschen Kette bewiesen ist. Gilt umgekehrt für jede ganze Zahl $kp_{2k} = 0$, so hat die Markoffsche Kette offenbar die Periode zwei.

Bemerkung. Das eben behandelte Problem führt zu einer interessanten zahlentheoretischen Aufgabe, wenn man nach der minimalen ungeraden Anzahl der Schritte fragt, mit denen der vom Ursprung ausgehende wandernde Punkt in den Ursprung wiederkehren kann. Im Falle $l = 1$, wenn also nur Schritte von Länge $2k_0$ und k_1 (k_1 ungerade) möglich sind, ist diese minimale

ungerade Anzahl von Schritten gleich $2k_0 + k_1$. Für $l \geq 2$ ist die Lösung unbekannt.

Satz 1. Im Falle $\mathbf{M}(\xi_n) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = M < \infty$ ist jeder Zustand der betrachteten Markoffschen Kette oft wiederkehrend also sind sie wiederkehrende Zustände mit endlicher mittlerer Wiederkehrszeit.

Beweis. $P_k^{(n)}$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit dafür, das sich der wandernde Punkt nach dem n -ten Schritt im Punkte k befindet. Dann gelten offenbar die folgenden rekursiven Formeln:

$$(4) \quad P_0^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j^{(n-1)} p_j,$$

$$(5) \quad P_k^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j^{(n-1)} p_{j+k} + \sum_{j=k}^{\infty} P_j^{(n-1)} p_{j-k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Setzen wir

$$(6) \quad Q_N^{(n)} = \sum_{k \geq N} P_k^{(n)}.$$

Erstens werden wir

$$(7) \quad Q_N^{(n)} < \varepsilon, \quad \text{wenn } N > N_0(\varepsilon)$$

beweisen, wobei N_0 von n unabhängig ist. Aus (5) erhält man durch Summieren

$$Q_N^{(n)} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j^{(n-1)} \sum_{k=j+N}^{\infty} p_k + \sum_{k=0}^{\infty} p_k \sum_{j=k+N}^{\infty} P_j^{(n-1)}.$$

Daraus ergibt sich für $Q_N^{(n)}$ die folgende Abschätzung — mit der Bezeichnung $R_k = \sum_{i=k}^{\infty} p_i$ —

$$(8) \quad Q_N^{(n)} \leq R_N + \sum_{k=0}^{\infty} p_k Q_{k+N}^{(n-1)}.$$

Indem man die Ungleichungen der Form (8) ineinander substituiert, erhält man

$$\begin{aligned} Q_N^{(n)} &\leq R_N + \sum_{k=0}^{\infty} p_k R_{k+N} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_k p_l Q_{k+l+N}^{(n-2)} \leq \\ &\leq R_N + \sum_{k=0}^{\infty} p_k R_{k+N} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_k p_l R_{k+l+N} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_k p_l p_j R_{k+l+j+N} + \dots \end{aligned}$$

Also, die Glieder mit R_{N+v} zusammenfassend,

$$(9) \quad Q_N^{(n)} \leq R_N + \sum_{v=0}^{\infty} R_{N+v} (p_v + \sum_{k+l=v} p_k p_l + \sum_{k+l+j=v} p_k p_l p_j + \dots).$$

Für die Glieder (9) führen wir neue Bezeichnungen ein:

$$A_k^{(v)} = \sum_{i_1 + \dots + i_k = v} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}$$

und

$$B_k^{(v)} = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = v \\ i_k > 0}} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}.$$

Dann gilt

$$A_k^{(v)} = \sum_{j=1}^k B_j p_0^{k-j},$$

also

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(v)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k B_j p_0^{k-j} = \frac{1}{1-p_0} \sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(v)}.$$

Die Grösse $\sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(v)}$ hat die folgende Bedeutung: betrachten wir das Irrfahrtsproblem, wenn der wandernde Punkt im n -ten Schritt um eine Strecke ξ_n nach rechts geht (im ersten Schritt vom Ursprung aus); dann ist $\sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(v)}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, das der wandernde Punkt nach irgendwelchem Schritt in den Punkt v gelangt. Es gilt also

$$(11) \quad \sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(v)} \leq 1.$$

Aus (10) und (11) folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(v)} \leq \frac{1}{1-p_0},$$

und infolgedessen aus (9)

$$Q_N \leq R_N + \sum_{v=0}^{\infty} R_{N+v} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(v)} \leq R_N + \frac{1}{1-p_0} \sum_{v=0}^{\infty} R_{N+v}.$$

Da die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} R_k$ nach Voraussetzung konvergent ist (benützend $\sum_{k=0}^{\infty} R_k = M$)

strebt für $N \rightarrow \infty$ ebenso R_N wie $\sum_{v=0}^{\infty} R_{N+v}$ nach Null, womit (7) bewiesen ist.

Die Behauptung des Satzes folgt nun folgendermassen: hat die betrachtete Markoffsche Kette einen Zustand, der nicht oft wiederkehrend ist, so kann keiner ihrer Zustände oft wiederkehrend sein, also gilt, wie bekannt, $P_k^{(n)} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Das widerspricht aber der eben bewiesenen Ungleichung $\sum_{k=0}^{N-1} P_k^{(n)} \geq 1 - \varepsilon$, also muss jeder Zustand oft wiederkehrend sein, w. z. b. w.

Der folgende Satz sagt etwas mehr, er gibt die mittlere Wiederkehrzeit und auch die Grenzverteilung der Markoffschen Kette an.

Satz 2. *Auf Grund von Hilfssatz 2 kann entschieden werden ob die Markoffsche Kette aperiodisch oder von der Periode zwei ist. Ist sie aperiodisch, so hat sie eine Grenzverteilung und zwar*

$$(12) \quad P_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{(n)} = \frac{R_1}{2M},$$

$$(13) \quad P_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_j^{(n)} = \frac{R_j + R_{j+1}}{2M} \quad (j = 1, 2, \dots),$$

also ist die mittlere Zeit des Wiederkehrens in den Ursprung

$$\tau = \frac{1}{P_0} = \frac{2M}{R_1}.$$

Hat die Markoffsche Kette die Periode zwei, so gilt

$$P_{2k+1}^{(2n)} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0^{(2n)} = \frac{R_1}{M} = \frac{1}{M},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2k}^{(2n)} = \frac{R_{2k} + R_{2k+1}}{M} = \frac{2R_{2k+1}}{M} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

ferner

$$P_{2k}^{(2n+1)} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{2k+1}^{(2n+1)} = \frac{R_{2k+1} + R_{2k+2}}{M} = \frac{R_{2k+1} + R_{2k+3}}{M} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Die mittlere Zeit des Wiederkehrens in den Ursprung ist $\tau = 2M$.

Beweis. Bekanntlich hat jede aperiodische Markoffsche Kette mit oft wiederkehrenden Zuständen eine Grenzverteilung, welche als die einzige Lösung eines (unendlichen) Gleichungssystems darstellbar ist, die in unserem Falle — nach (4) und (5) — folgendermassen lautet:

$$(14) \quad P_0 = \sum_{j=0}^{\infty} P_j p_j,$$

$$(15) \quad P_k = \sum_{j=0}^{\infty} P_j p_{j+k} + \sum_{j=k}^{\infty} P_j p_{j-k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Es genügt also zu zeigen, das (12) und (13) eine Lösung dieses Gleichungssystems darstellt und dass $\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$ gilt, was man aber durch Einsetzen unmittelbar verifizieren kann. Z. B. ist das Erfülltsein von (15) mit (12) und (13) folgendermassen einzusehen: multipliziert man beide Seiten von

(15) mit $2M$ und setzt man (12) und (13) ein, ergibt sich an der rechten Seite

$$2MP_k = \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_{j+k} R_j + \sum_{j=0}^{\infty} p_{j+k} R_{j+1} \right) + \left(\sum_{j=k}^{\infty} p_{j-k} R_j + \sum_{j=k}^{\infty} p_{j-k} R_{j+1} \right) = A + B,$$

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=k}^{\infty} p_{j-k} \sum_{i=j}^{\infty} p_i + \sum_{j=k}^{\infty} p_{j-k} \sum_{i=j+1}^{\infty} p_i = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (1 - R_{j+1}) p_{j+k} + \sum_{j=1}^{\infty} (1 - R_j) p_{j+k}, \end{aligned}$$

also $A + B = R_k + R_{k+1}$, was mit der linken Seite übereinstimmt.

Ähnlicherweise — durch Einsetzen — kann die Behauptung für den periodischen Fall verifiziert werden.

Bemerkung. Nach (12) und (13) befindet sich der wandernde Punkt im aperiodischen Fall am wahrscheinlichsten im Punkte 1.

Satz 3. Die mittlere Anzahl pro Schritt der Spiegelungen im Ursprung ist

$$T = \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^{\infty} R_k (R_k + R_{k+1})$$

(wobei das Erreichen des Ursprunges als eine Spiegelung gerechnet wird, das Ausgehen vom Ursprung jedoch nicht).

Beweis. Die Wahrscheinlichkeit dafür, das im n -ten Schritt eine Spiegelung stattfindet, ist offenbar

$$T_n = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{(n-1)} R_k,$$

woraus sich die Behauptung durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt.

§ 3. Der Fall $M(\xi_n) = +\infty$

Satz 4. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} kp_k$ divergent, also der Erwartungswert von ξ_n unendlich, so hat die betrachtete Markoffsche Kette keine oft wiederkehrende Zustände.

Beweis. Bezeichne $P_{k0}^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der wandernde Punkt in n Schritten von k in den Ursprung gelangt. Dann gilt die folgende Rekursionsformel:

$$(16) \quad P_{k0}^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{\infty} P_{j0}^{(n)} p_{k+j} + \sum_{j=1}^{\infty} P_{j0}^{(n)} p_{k-j} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Führen wir noch die Bezeichnungen

$$(17) \quad X_0 = R_1,$$

$$(18) \quad X_j = R_j + R_{j+1}$$

ein. Dann folgt aus (16), durch Multiplizieren mit X_k und Summieren nach k

$$(19) \quad \sum_{k=0}^{\infty} P_{k0}^{(n+1)} X_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_{k0}^{(n)} X_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k X_k = R_k \leq 1,$$

indem man benützt, dass die Zahlen X_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) eine Lösung des Gleichungssystems (14), (15) darstellen.

Setzen wir nun vor, dass der vorliegende Markoffsche Kette aperiodisch ist. Dann folgt aus der Existenz eines oft wiederkehrenden Zustandes, dass alle Zustände oft wiederkehrend sind, und dass es eine, von der Ausgangsverteilung unabhängige Grenzverteilung gibt, also gilt $P_{k0}^{(n)} \rightarrow c_0 > 0$.

Das widerspricht aber (19), da wegen $\sum_{i=0}^{\infty} R_i = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = +\infty$, $\sum_{i=0}^{\infty} x_i = +\infty$ gilt. Der periodische Fall kann auf ähnliche Weise erledigt werden.

§ 4. Der stetige Fall und andere Probleme

Der Fall, dass die ξ_n stetig verteilt sind, wird nicht ausführlich behandelt; wir beschränken uns darauf, das folgende Analogon des Satzes 2 auszusagen.

Satz 5. *Haben die Zufallsveränderlichen ξ_n die Dichtefunktion $\varphi(x)$, dann hat der durch die ξ_n in der obigen Weise definierte Markoffsche Prozess eine stationäre Verteilung mit der Dichtefunktion*

$$(20) \quad f(x) = \frac{1}{M} \int_x^{\infty} \varphi(x) dx,$$

wenn

$$M = \int_0^{\infty} x \varphi(x) dx < \infty.$$

Beweis. Bezeichnet $f(x)$ die Dichtefunktion der Verteilung des wandernden Punktes nach dem n -ten Schritt, so gilt

$$(21) \quad f_{n+1}(y) = \int_0^{\infty} f_n(x+y) \varphi(x) dx + \int_y^{\infty} f_n(x-y) \varphi(x) dx.$$

Die Behauptung des Satzes ergibt sich durch Einsetzen von (20) in (21).

Am Ende möchten wir manche offene Probleme erwähnen.

Es ist unbekannt, ob die betrachtete Irrfahrt im Falle $M = +\infty$ wiederkehrend ist, oder bei welchen Bedingungen wird es wiederkehrend. Im Falle $M < +\infty$ wäre es von Interesse, die mittlere Anzahl der zum Erreichen des Nullpunktes aus einem Punkt $k > 0$ nötigen Schritte zu bestimmen. Eine andere Frage besteht darin, ob was sich über die betrachteten Probleme sagen lässt, wenn die ξ_n auch negative (etwa einer negativen Konstante grössere) Werte annehmen dürfen.

LITERATURVERZEICHNIS

CHUNG, K. L.: *Markov Chains*. Springer Verlag, 1960.

О ЗАДАЧАХ БЛУЖДЕНИЯ С ОТРАЖАЮЩЕЙ СТЕНОЙ

P. BARTFAI

Резюме

В статье исследуется следующая задача блуждания: Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ независимые, одинаково распределенные случайные величины $P(\xi_i = k) = p_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Блуждающая точка, отправляющаяся из нулевой точки числовой прямой, движется по следующим правилам: если она была в точке k после $(n-1)$ -ого шага, то она будет шагать в точку $|k - \xi_n|$ (в n -ом шаге). Цепь Маркова, получаемая таким способом, несократима (Лемма 1), непериодична, или имеет период длиной два (Лемма 2). Если $M(\xi_n) < +\infty$, тогда математическое ожидание времени возвращения в нулевую точку является конечным (Теорема 1); в аperiodическом случае предельное распределение времени возвращения получается в виде формул (12) и (13).

Математическое ожидание времени возвращения в этом случае равно $\frac{2 M(\xi_n)}{1 - p_0}$

(Теорема 2). Если $M(\xi_n) = \infty$, тогда математическое ожидание времени возвращения является бесконечным (Теорема 4), а неизвестно, при каких условиях блуждающая точка будет возвращаться с вероятностью 1. Теорема 5 дает стационарное распределение цепи Маркова (20) в том случае, если функция плотности величины ξ_n существует, а $M(\xi_n) < +\infty$.



NEUER BEWEIS EINES TUTTE'SCHEN SATZES

von

T. GALLAI

Paul Erdős zum 50. Geburtstag

Unseres Wissens nach gibt es im wesentlichen zwei verschiedene Beweise des bemerkenswerten Satzes von TUTTE über die Existenz von 1-Faktoren endlicher Graphen. Der eine beruht auf der Anwendung der hyperprimen Graphen (s. [12] und [7]), der andere gebraucht die Methode der alternierenden Züge (s. [1], [3], [13], [2] und [9]). In der vorliegenden Note wollen wir einen neuen Beweis mitteilen, der sich auf den folgenden bekannten Satz über paare Graphen¹ stützt ([8] Theorem 7., s. auch [2] S. 92 und [10] S. 112.)

(I) Es seien die Punkte des (paaren) Graphen² Γ so in zwei Klassen A und B zerlegt, daß jede Kante von Γ einen A -Punkt³ mit einem B -Punkt verbindet. Ist für eine jede Teilmenge A' von A die Anzahl derjenigen B -Punkte, die durch Kanten von Γ mit A' -Punkten verbunden sind, nicht kleiner als die Anzahl der A' -Punkte, so kann man sämtliche A -Punkte durch Kanten von Γ mit je einem verschiedenen B -Punkt paaren, d. h. man kann zu jedem A -Punkt eine zu diesem Punkt inzidente Kante von Γ so auswählen, daß die ausgewählten Kanten paarweise keinen gemeinsamen Punkt enthalten.

Unser Beweisverfahren kann auch auf andere Probleme angewendet werden. Auf diese möchten wir in einer anderen Arbeit zurückkommen.

Wir führen einige Bezeichnungen ein und geben einige Erklärungen.

Mit Γ werden wir immer einen Graphen bezeichnen, mit $\Phi(\Gamma)$ die Menge der Punkte von Γ . Ist $A \subseteq \Phi(\Gamma)$, so soll $\Gamma - A$ denjenigen Graphen bezeichnen, der aus Γ durch Weglassen der A -Punkte und der zu den A -Punkten inzidenten Kanten von Γ entsteht. Für eine beliebige Menge M soll mit $\nu(M)$ die Anzahl der Elemente von M bezeichnet werden.

Unter einem 1-Faktor von Γ versteht man eine Menge F von Kanten von Γ , die folgende Eigenschaften besitzt: Je zwei Kanten von F haben keinen

¹ Dieser Satz, der mit bekannten Sätzen von KÖNIG, HALL und RADO (s. [6] S. 232—235, [4] und [11]) in enger Beziehung steht, wurde zuerst von ORE formuliert [8]. Kürzlich hat A. J. HOFFMAN [5] eine Reihe kombinatorischer Sätze auf den eben erwähnten Hall'schen Satz zurückgeführt. Er stellte ferner die Frage, ob das gleiche auch für die Faktorisierungssätze ungerichteter Graphen möglich ist. Da man nach TUTTE [14] die Existenzsätze bezüglich beliebiger Faktoren auf diejenigen der 1-Faktoren zurückführen kann, gibt unser Beweis eine bejahende Antwort auf die gestellte Frage.

² Die vorkommenden Graphen sind stets endlich und ungerichtet, und erhalten keine Schlingen. Statt Knotenpunkte sagen wir kurz nur Punkte.

³ d. h. einen Punkt von A

gemeinsamen Punkt und jeder Punkt von Γ ist mit einer Kante von F inzident. Wir wollen sagen, daß der leere Graph den 1-Faktor $F = \emptyset$ besitzt. Einen Graphen, der keinen 1-Faktor besitzt, werden wir *prim* nennen und die Anzahl der primen Komponenten von Γ mit $\lambda(\Gamma)$ bezeichnen.

Nun kann man den zu beweisenden Tutte'schen Satz folgendermassen formulieren:

Satz von Tutte. *Der Graph Γ besitzt dann und nur dann einen 1-Faktor, wenn für jede beliebige Menge B von Punkten aus Γ die Anzahl derjenigen Komponenten von $\Gamma - B$, die eine ungerade Anzahl von Punkten enthalten, $\leq v(B)$ ist.*

Den Beweis führen wir in mehreren Schritten durch.

(II) Ist Γ prim, so ist $\lambda(\Gamma) > 0$.

(III) Ein Graph mit ungerader Anzahl von Punkten ist prim.

Diese beiden Aussagen sind trivial.

(IV) Besitzt Γ einen 1-Faktor, so gilt für ein jedes $B \subseteq \Phi(\Gamma)$

$$\lambda(\Gamma - B) \leq v(B).$$

Beweis. Wir können $\lambda(\Gamma - B) > 0$ annehmen. Es sei F ein 1-Faktor von Γ und $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ ($k \geq 1$) die primen Komponenten von $\Gamma - B$. Da Γ_i ($1 \leq i \leq k$) prim ist, können diejenigen Kanten von F , die mit Punkten von Γ_i inzident sind, nicht alle Γ_i angehören. Es gibt also für jedes i ($1 \leq i \leq k$) eine Kante von F , von deren Endpunkten der eine Γ_i , der andere B angehört. Daraus folgt die Behauptung.

Wir beweisen nun die Notwendigkeit der Tutte'schen Bedingung. Es sei Γ ein Graph, für den ein solches $B \subseteq \Phi(\Gamma)$ existiert, daß die Anzahl derjenigen Komponenten von $\Gamma - B$, die eine ungerade Anzahl von Punkten enthalten, $> v(B)$ ist. Nach (III) ist dann $\lambda(\Gamma - B) > v(B)$, und daraus folgt nach (IV), daß Γ prim ist.

Die Behauptung (IV) gibt Anlaß zur folgenden Begriffsbildung:

(V) **Definition.** Ein Graph Γ heißt *kritisch*, falls Γ prim und zusammenhängend ist, und für jedes *nichtleere* $B \subseteq \Phi(\Gamma)$

$$\lambda(\Gamma - B) \leq v(B)$$

besteht.

So ist z. B. ein Graph, der aus einem einzigen Punkt besteht, kritisch.

(VI) Ist Γ prim, so gibt es ein solches $B \subseteq \Phi(\Gamma)$, daß $\lambda(\Gamma - B) > v(B)$ gilt und sämtliche prime Komponenten von $\Gamma - B$ kritisch sind.

Beweis. Es sei Γ prim. Dann existieren Mengen $B \subseteq \Phi(\Gamma)$ mit $\lambda(\Gamma - B) > v(B)$ (nach (II) ist $B = \emptyset$ eine solche Menge). Es soll B_0 ein solches B mit maximaler Anzahl von Punkten bezeichnen. Es seien $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ die primen Komponenten von $\Gamma - B_0$ ($k > v(B_0)$). Es genügt zu zeigen, daß sämtliche Γ_i ($1 \leq i \leq k$) kritisch sind. Nehmen wir an, daß z. B. Γ_1 nicht kritisch ist. Dann existiert ein nichtleeres $B_1 \subseteq \Phi(\Gamma_1)$ mit $\lambda(\Gamma_1 - B_1) > v(B_1)$. Sind $\Gamma_{11}, \dots, \Gamma_{1j}$ die primen Komponenten von $\Gamma_1 - B_1$ ($j > v(B_1)$), so sind für $B' = B_0 \cup B_1$ $\Gamma_{11}, \dots, \Gamma_{1j}, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ die primen Komponenten von $\Gamma - B'$. Die Anzahl dieser ist $j + k - 1 > v(B_1) + v(B_0) = v(B') > v(B_0)$. Dies widerspricht jedoch der Definition von B_0 .

(VII) Ist Γ kritisch und ist x ein beliebiger Punkt von Γ , so besitzt der Graph $\Gamma - \{x\}$ einen 1-Faktor.

Beweis. Wir führen den Beweis mit Induktion bezüglich der Anzahl der Punkte von Γ durch. Enthält Γ nur einen Punkt, so ist die Behauptung richtig. Nehmen wir an, daß sie für sämtliche solche Graphen richtig ist, die weniger als n ($n > 1$) Punkte enthalten, und es sei Γ ein kritischer Graph mit n Punkten. Es sei x ein Punkt von Γ und nehmen wir an, daß $\Gamma' = \Gamma - \{x\}$ prim ist. Nach (VI) gibt es dann ein solches $B' \subseteq \Phi(\Gamma')$, daß die primen Komponenten von $\Gamma' - B' : \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ sämtlich kritisch sind und $k > v(B')$ gilt. Setzen wir $B' \cup \{x\} = B$. Es gilt $\Gamma - B = \Gamma' - B'$ und

$$(*) \quad k \geq v(B).$$

Die Behauptung » Γ_i ($1 \leq i \leq k$) ist mit dem Punkt $b \in B$ verbunden« soll bedeuten: Es gibt in Γ_i einen Punkt, der mit b durch eine Kante von Γ verbunden ist.

Wir betrachten nun eine beliebige Teilmenge H_1 der Menge $H = \{\Gamma_1, \dots, \Gamma_k\}$ und bezeichnen mit B_1 die Menge derjenigen B -Punkte, die mit wenigstens einem Element von H_1 verbunden sind.

Wir behaupten, daß $v(B_1) \geq v(H_1)$ ist. Die Elemente⁴ von H_1 sind nämlich auch Komponenten des Graphen $\Gamma - B_1$. Es ist also $\lambda(\Gamma - B_1) \geq v(H_1)$. Die Behauptung $v(H_1) > v(B_1)$ widerspricht daher im Falle $B_1 \neq \emptyset$ unmittelbar der Annahme, daß Γ kritisch ist. Im Falle $B_1 = \emptyset$ gelangen wir gleichfalls in Widerspruch mit dieser Annahme, da ein kritischer Graph zusammenhängend sein muß, und in diesem Falle $\Gamma = \Gamma - B_1$ mindestens zwei Komponenten besitzt: eine solche, die Element von H_1 ist und eine andere, die den Punkt x enthält.

Da $v(B_1) \geq v(H_1)$ für jedes $H_1 \subseteq H$ gilt, so kann man nach (I) aus B die verschiedenen Punkte b_1, \dots, b_k so auswählen, daß b_i mit Γ_i ($i = 1, \dots, k$) verbunden ist.⁵ Wegen (*) muß dann $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ bestehen, und wir können in Γ_i einen Punkt c_i finden, der durch eine Kante e_i von Γ mit b_i verbunden ist ($i = 1, \dots, k$). Da Γ_i kritisch ist, besitzt nach der Induktionsannahme $\Gamma_i - \{c_i\}$ einen 1-Faktor F_i ($i = 1, \dots, k$). Bezeichnet ferner F_0 einen 1-Faktor desjenigen Teilgraphen von Γ , der durch die Vereinigung der nichtprimen Komponenten von $\Gamma' - B'$ zustandekommt, so bildet die Vereinigung der Mengen F_0, F_1, \dots, F_k und $\{e_1, \dots, e_k\}$ einen 1-Faktor von Γ . Dieser Widerspruch beweist die Behauptung (VII).

Aus (VII) folgt unmittelbar die Behauptung:

(VIII) Die Anzahl der Punkte eines kritischen Graphen ist ungerade.

Jetzt beweisen wir, daß die Tutte'sche Bedingung hinreichend ist. Nehmen wir an, daß Γ prim ist. Es gibt dann nach (VI) ein solches $B \subseteq \Phi(\Gamma)$, daß $\lambda(\Gamma - B) > v(B)$ gilt und sämtliche prime Komponenten von $\Gamma - B$ kritisch sind. Nach (VIII) enthält jede dieser Komponenten eine ungerade Anzahl von Punkten. Γ genügt also nicht der Tutte'schen Bedingung. Damit haben wir den Beweis des Tutte'schen Satzes beendet.

⁴ Wir dürfen $H_1 \neq \emptyset$ annehmen.

⁵ Zur formalen Anwendung von (I) betrachte man denjenigen paaren Graphen Γ^* , deren Punktklassen H und B sind, und ein »Punkt« Γ_i von H dann und nur dann mit einem Punkt $b \in B$ durch eine Kante von Γ^* verbunden ist, falls die Komponente Γ_i in Γ mit b verbunden ist.

Um die Bezeichnung »kritisch« zu rechtfertigen, wollen wir noch die folgende einfache Behauptung beweisen:

(IX) Ist Γ prim und besitzt für jeden Punkt x von Γ der Graph $\Gamma - \{x\}$ einen 1-Faktor, so ist Γ kritisch.

Beweis. Nehmen wir an, daß Γ den gestellten Bedingungen genügt. Γ ist dann zusammenhängend. Im entgegengesetzten Falle gäbe es nämlich nach (II) eine prime Komponente Γ_1 und eine von Γ_1 verschiedene Komponente Γ_2 von Γ . Ist x ein Punkt von Γ_2 , so müßte $\Gamma - \{x\}$ — entgegen unserer Annahme — prim sein. Ist nun der zusammenhängende Graph Γ nicht kritisch, so gibt es ein nichtleeres $B \subseteq \Phi(\Gamma)$ mit $\lambda(\Gamma - B) > \nu(B)$. Es sei $x \in B$, $B' = B - \{x\}$ und $\Gamma' = \Gamma - \{x\}$. Dann gilt $\Gamma' - B' = \Gamma - B$ und daher $\lambda(\Gamma' - B') > \nu(B) > \nu(B')$. Nach (IV) ist also Γ' prim, was unserer Annahme widerspricht.

Nach (VII) und (IX) lassen sich die kritischen Graphen folgendermaßen charakterisieren:

(X) Ein kritischer Graph ist ein solcher primer Graph, der durch Weglassung eines beliebigen Punktes nichtprim wird.

Endlich wollen wir noch folgendes bemerken: In jenen Beweisen des Tutte'schen Satzes, welche die Methode der alternierenden Züge gebrauchen, kommen gewisse »Blöcke« vor (s. z. B. [3] S. 137 oder [9] S. 123). Man kann nun leicht zeigen, daß diese Blöcke kritische Graphen sind, und umgekehrt, daß jeder kritische Graph, der mehr als einen Punkt enthält, als ein solcher Block aufgefasst werden kann.

(Eingegangen: 6. Februar, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BELCK, H. B.: "Reguläre Faktoren von Graphen". *Journal für die reine und angew. Math.* **188** (1950) S. 228—252.
- [2] BERGE, C.: *Théorie des graphes et ses applications*. (Paris, 1958.)
- [3] GALLAI, T.: "On factorization of graphs". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **1** (1950) S. 133—153.
- [4] HALL, P.: "On representatives of subsets". *Journal London Math. Soc.* **10** (1953) S. 26—30.
- [5] HOFFMAN, A. J.: "Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis". *Proc. of Symposia in Applied Math.*, vol. 10 S. 113—127.
- [6] KÖNIG, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. (Leipzig, 1936).
- [7] MAUNSELL, F. G.: "A note on Tutte's paper: 'The factorization of linear graphs'". *Journal London Math. Soc.* **27** (1952) S. 127—128.
- [8] ORE, O.: "Graphs and matching theorems". *Duke Math. Journal* **22** (1955) S. 625—639.
- [9] ORE, O.: "Graphs and subgraphs". *Trans. Amer. Math. Soc.* **84** (1957) S. 109—136.
- [10] ORE, O.: *Theory of graphs*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **38** (1962).
- [11] RADO, R.: "Factorization of even graphs". *Quarterly Journal of Math.* **20** (1949) S. 95—104.

- [12] TUTTE, W. T.: "The factorization of linear graphs". *Journal London Math. Soc.*, **22** (1947) S. 107—111.
- [13] TUTTE, W. T.: "The factors of graphs". *Canadian Journal of Math.* **4** (1952) S. 314—328.
- [14] TUTTE, W. T.: "A short proof of the factor theorem for finite graphs". *Canadian Journal of Math.* **6** (1954) S. 347—352.

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ TUTTE

T. GALLAI

Резюме

Автор дает новое доказательство знаменитой теоремы TUTTE [12] относящейся к существованию 1-множителей. Доказательство основано на одной известной теореме о четных графах ([8], теорема 7).

SUR UNE FORME SYMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS DE BELTRAMI

par

LÁSZLÓ ALPÁR

1. On doit à E. BELTRAMI l'idée d'une théorie des fonctions à variable complexe réalisée sur une surface S donnée par les équations paramétriques

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y), \quad Z = Z(x, y)$$

en supposant que ces fonctions possèdent des dérivées partielles des deux premiers ordres par rapport à x et y [1]. Il définit l'élément d'arc par l'expression

$$ds^2 = E dx^2 + 2 F dx dy + G dy^2 = (U dx + V dy) (U dx + \bar{V} dy),$$

où $U^2 = E$, $V = U^{-1}(F + iH)$, $\bar{V} = U^{-1}(F - iH)$, avec $H^2 = EG - F^2 > 0$, $V\bar{V} = G$. Il choisit une fonction $\kappa(x, y)$ telle que

$$\kappa(x, y) (U dx + V dy) = dp(x, y) + i dq(x, y) = dt(x, y)$$

soit une différentielle totale exacte dans un domaine D , et cherche des fonctions

$$h(x, y) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y)$$

ayant des dérivées totales dans D et jouissant de la propriété que $\frac{dh}{dt}$ a une

valeur unique indépendante de $\frac{dy}{dx}$ en chaque point de D . Il montre que $h(x, y)$

répond à cette exigence si, et seulement si $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ forment un système de solutions du système d'équations différentielles suivantes:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{E \frac{\partial \psi}{\partial y} - F \frac{\partial \psi}{\partial x}}{H}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{G \frac{\partial \psi}{\partial x} - F \frac{\partial \psi}{\partial y}}{H},$$

qui sont les homologues des équations de Cauchy-Riemann des fonctions analytiques. C'est N. S. BERNSTEIN qui a remarqué [2] qu'en écrivant (1.1) sous la forme

$$(1.2) \quad \varphi_x = \beta \psi_x + \gamma \psi_y, \quad \varphi_y = -\alpha \psi_x - \beta \psi_y,$$

on a

$$(1.3) \quad \alpha \gamma - \beta^2 = 1.$$

Les équations (1.1) resp. (1.2) portent le nom: *équations de Beltrami*.

Le fait que $\frac{dh}{dt}$ a une valeur unique se traduit, outre (1.1), par une relation entre les dérivées partielles du premier ordre de h , notamment:

$$(1.4) \quad \Delta_1 h = \frac{1}{H^2} \left[E \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 - 2 F \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial x} + G \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] = 0.$$

Δ_1 est le *premier différentiateur de Beltrami*.

En éliminant $\psi(x, y)$ entre les deux équations (1.1), on obtient la relation

$$(1.5) \quad \Delta_2 \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial x} - F \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial y} - F \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{H} \right) = 0$$

analogue à l'équation de Laplace des fonctions harmoniques. Δ_2 s'appelle le *second différentiateur de Beltrami*.

BELTRAMI introduit encore le *différentiateur intermédiaire* défini par l'expression:

$$(1.6) \quad \Delta_1 \varphi \psi = \frac{1}{H^2} \left[E \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} - F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + G \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = 0.$$

L'équation $\Delta_1 \varphi \psi = 0$ n'est évidemment valable que si φ et ψ vérifient le système (1.1).

Dans cette note nous allons donner une forme symétrique et une interprétation quelque peu modifiée aux équations de Beltrami et des expressions plus concises à ses différentiateurs. C'est cette symétrie et l'écriture particulière des formules qui rendent frappante l'analogie de nos équations avec celles de Cauchy-Riemann et prêtent aux trois différentiateurs des formes plus nettes. Nous obtiendrons ces relations à l'aide des moyens très simples; malgré cela, tant que nous pouvons en juger, elles ne sont pas encore connues (voir p.e. l'ouvrage de synthèse [3]).

2. Désignons par

$$z = z(x, y) = a(x, y) + ib(x, y)$$

l'application homéomorphe du domaine D du plan $x + iy$ sur le domaine Δ du plan $a + ib$ où, pour $x + iy \in D$, les fonctions $a(x, y)$ et $b(x, y)$ possèdent des dérivées partielles continues du premier ordre par rapport à x et y , et $\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)} > 0$.

Soit ensuite

$$w = w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

une fonction définie dans D . Nous nous proposons de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent être remplies par $u(x, y)$ et $v(x, y)$ pour que w soit une fonction analytique de z , soit $w = f(z)$, de sorte que la dérivée

$$f'(z) = \lim_{z' \rightarrow z} \frac{f(z) - f(z')}{z - z'}$$

existe en chaque point $z \in \Delta$ quelque soit la manière dont z' se rapproche de z . Ces conditions s'expriment par la proposition ci-après:

Théorème 1. — Soit

$$(2.1) \quad z = z(x, y) = a(x, y) + ib(x, y)$$

une application homéomorphe du domaine D du plan $x + iy$ sur le domaine Δ du plan $a + ib$ où, pour $x + iy \in D$, $a(x, y)$ et $b(x, y)$ ont des dérivées partielles continues du premier ordre par rapport à x et y , et

$$(2.2) \quad J = \frac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)} > 0.$$

Pour que la fonction

$$(2.3) \quad w = w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

définie dans D soit simultanément une fonction analytique de z , notée $w = f(z)$, il faut et il suffit que le couple de fonctions $u(x, y)$, $v(x, y)$ forme un système de solutions du système d'équations différentielles

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial(u, a)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial(v, b)}{\partial(x, y)}, \\ \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)} &= -\frac{\partial(v, a)}{\partial(x, y)}, \end{aligned}$$

qui s'écrit avec la notation complexe sous la forme

$$(2.5) \quad \frac{\partial(f, z)}{\partial(x, y)} = 0,$$

et que $\frac{\partial(u, a)}{\partial(x, y)}$, $\frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)}$, $\frac{\partial(v, a)}{\partial(x, y)}$, $\frac{\partial(v, b)}{\partial(x, y)}$ soient des fonctions continues de x et y . $f(z)$ possède alors dans Δ une dérivée unique par rapport à z :

$$(2.6) \quad f'(z) = \frac{pf_x + qf_y}{pz_x + qz_y}$$

où p et q sont des constantes arbitraires avec $p^2 + q^2 \neq 0$. Enfin si w n'est pas constante et les équations (2.4) sont vérifiées, w et z sont toutes les deux ou bien des fonctions analytiques ou bien des fonctions non analytiques de $\zeta = x + iy$.

Démonstration. — Nous allons montrer d'abord que les conditions (2.4) sont nécessaires. Admettons donc que $\frac{df}{dz}$ ait une valeur unique pour $z \in \Delta$.

Par conséquent, en posant

$$(2.7) \quad w = f(z) = u[a(x, y), b(x, y)] + iv[a(x, y), b(x, y)],$$

les dérivées partielles u_a, u_b, v_a, v_b existent et sont continues dans Δ ($u_a = v_b$, $u_b = -v_a$), et l'on a

$$(2.8) \quad \begin{aligned} u_a a_x + u_b b_x &= u_x, & u_a a_y + u_b b_y &= u_y; \\ v_a a_x + v_b b_x &= v_x, & v_a a_y + v_b b_y &= v_y. \end{aligned}$$

L'existence (et la continuité) de u_x, u_y, v_x, v_y étant ainsi vérifiée, il est légitime d'écrire

$$(2.9) \quad \frac{df}{dz} = \frac{(u_x + iv_x)dx + (u_y + iv_y)dy}{(a_x + ib_x)dx + (a_y + ib_y)dy}.$$

Le membre droit de (2.9) est, par hypothèse, indépendant de $\frac{dy}{dx}$, ce qui entraîne

$$(2.10) \quad (u_x + iv_x)(a_y + ib_y) - (u_y + iv_y)(a_x + ib_x) = 0.$$

(2.10) n'est autre que la forme explicite de la relation (2.5). En séparant dans (2.10) les parties réelles et imaginaires, on obtient les équations

$$(2.11) \quad \begin{aligned} u_x a_y - u_y a_x &= v_x b_y - v_y b_x, \\ u_x b_y - u_y b_x &= -v_x a_y + v_y a_x, \end{aligned}$$

et c'est justement le système (2.4). Les expressions (2.11) indiquent de plus que $\frac{\partial(u, a)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(v, a)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(v, b)}{\partial(x, y)}$ sont des fonctions continues de x et y .

Il est d'ailleurs évident que le système (2.4) a une infinité de solutions, car si l'on donne d'avance une fonction analytique quelconque, soit $f(z)$, et que l'on y remplace z par son expression (2.1), on obtient les fonctions $u(x, y)$ et $v(x, y)$ qui figurent dans (2.7) et qui, par conséquent, vérifient les équations (2.4).

Pour établir la suffisance de nos conditions, nous admettons que u et v vérifient les équations (2.4) et que $\frac{\partial(u, a)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(v, a)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(v, b)}{\partial(x, y)}$ sont des fonctions continues de x et y . Cela implique d'une part que u_x, u_y, v_x, v_y existent, d'autre part que ces déterminants fonctionnels sont aussi des fonctions continues de a et b , car l'application de D sur Δ étant homéomorphe, $x = x(a, b)$ et $y = y(a, b)$ sont des fonctions continues de a et b . Ceci posé, notons que, d'après (2.8),

$$(2.12) \quad \begin{aligned} u_a &= \frac{1}{J} \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)}, & u_b &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(u, a)}{\partial(x, y)}, \\ v_a &= \frac{1}{J} \frac{\partial(v, b)}{\partial(x, y)}, & v_b &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(v, a)}{\partial(x, y)}. \end{aligned}$$

En tenant compte de (2.4), nous pouvons donc constater que $u_a = v_b, u_b = -v_a$ et que u_a, u_b, v_a, v_b sont des fonctions continues de a et b , et ce sont là les conditions suffisantes bien connues pour que la fonction $f(z) = u(a, b) + iv(a, b)$ soit différentiable par rapport à $z = a + ib$.

Posons ensuite $dx = p, dy = q$ dans (2.9), nous aurons la formule (2.6) déjà obtenu par BELTRAMI. Il est aisé de voir que $px + qy \neq 0$ pour $z \in \Delta$. En effet, $px + qy = 0$ signifierait que $a_x p + a_y q = 0, b_x p + b_y q = 0$. Or, selon (2.2) le déterminant J de ce système d'équations linéaires en p et q est positif. Il en résulte que $p = 0, q = 0$ représente le seul système de solutions possible, mais qui est exclu par la condition $p^2 + q^2 \neq 0$.

Pour démontrer la dernière proposition du théorème, supposons que $z(\xi)$ soit une fonction régulière et que $w(\xi)$ ne le soit pas, donc $a_x = b_y, a_y = -b_x$,

mais $u_x \neq v_y$ ou $u_y \neq -v_x$. Les équations (2.11) prennent alors la forme

$$(u_y + v_x) a_x - (u_x - v_y) a_y = 0,$$

$$(u_x - v_y) a_x + (u_y + v_x) a_y = 0.$$

C'est un système d'équations linéaires et homogènes en a_x et a_y . Le système de solutions $a_x = 0$, $a_y = 0$ est écarté par la condition (2.2), et il vient

$$(u_x - v_y)^2 + (u_y + v_x)^2 = 0.$$

Ce qui revient à dire que $w(\zeta)$ est aussi analytique, contrairement à notre hypothèse. Ce dernier fait est le cas particulier d'un théorème plus général de C. B. MORREY ([3], p. 115).

Remarque 1. — On voit bien que pour $z = \zeta$ les expressions (2.4) se réduisent aux équations de Cauchy-Riemann; il est donc tout justifié de les appeler: *équations généralisées de Cauchy-Riemann*. D'autre part on vérifiera facilement qu'en écrivant le système (2.4) sous la forme (1.2), les coefficients ainsi obtenus de v_x et v_y satisfont à la relation (1.3). De plus, en posant

$$(2.13) \quad E = a_x^2 + b_x^2, \quad F = a_x a_y + b_x b_y, \quad G = a_y^2 + b_y^2,$$

on retrouve directement le système (1.1). Il s'agit donc bien d'une forme symétrique des équations de Beltrami.

Observons encore qu'avec les notations (2.13), $H = J$.

Corollaire 1. — *Le premier différentiateur de Beltrami prend maintenant la forme*

$$(2.14) \quad \Delta_1 f = \frac{1}{J^2} \frac{\partial(f, z)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(f, \bar{z})}{\partial(x, y)} = 0.$$

En appliquant les notations (2.13), un calcul simple montre que les expressions (2.14) et (1.4) de Δ_1 sont identiques. Il découle ensuite de (2.5) que $\Delta_1 f = 0$.

Remarque 2. — L'expression (1.4) s'écrit aussi sous la forme d'un produit

$$\Delta_1 h = \frac{1}{H^2} \left(U \frac{\partial h}{\partial v} - V \frac{\partial h}{\partial u} \right) \left(U \frac{\partial h}{\partial v} - \bar{V} \frac{\partial h}{\partial u} \right) = 0,$$

et la relation

$$U \frac{\partial h}{\partial v} - V \frac{\partial h}{\partial u} = 0,$$

correspondant à (2.5), a déjà été obtenue par BELTRAMI.

Le facteur $\frac{\partial(f, \bar{z})}{\partial(x, y)}$, qui figure dans (2.14), a aussi un sens particulier.

Nous allons prouver que

$$(2.15) \quad f'(z) = \frac{1}{J} \frac{\partial(f, b)}{\partial(x, y)} = \frac{i}{J} \frac{\partial(f, a)}{\partial(x, y)} = \frac{i}{2J} \frac{\partial(f, \bar{z})}{\partial(x, y)}.$$

Au fait, il résulte de la régularité de $f(z)$ que

$$(2.16) \quad f'(z) = u_a + i v_a = -i(u_b + i v_b) = \frac{1}{2} (u_a - i u_b + i v_a + v_b).$$

Posons les formules (2.12) dans (2.16), nous aurons (2.15).

Corollaire 2. — *Le différentiateur intermédiaire de Beltrami s'écrit actuellement sous la forme*

$$(2.17) \quad \text{Im } \Delta_1 f = \Delta_1 u v = \frac{1}{J^2} \left[\frac{\partial(u, a)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(v, a)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(v, b)}{\partial(x, y)} \right] = 0.$$

Séparons dans (2.14) les parties réelles et imaginaires, en utilisant les notations (2.13), nous aurons, vu les formules (1.4) et (1.6), d'une part la relation (2.17), d'autre part

$$\begin{aligned} \text{Re } \Delta_1 f = \Delta_1 u - \Delta_1 v = & \frac{1}{J^2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial(u, a)}{\partial(x, y)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)} \right)^2 \right] - \right. \\ & \left. - \left[\left(\frac{\partial(v, a)}{\partial(x, y)} \right)^2 + \left(\frac{\partial(v, b)}{\partial(x, y)} \right)^2 \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Les deux équations $\text{Re } \Delta_1 f = 0$, $\text{Im } \Delta_1 f = 0$ sont aussi les conséquences évidentes des équations (2.4).

3. — Les résultats obtenus permettent d'établir des relations analogues à l'équations de Laplace et donner par là une forme plus simple au second différentiateur de Beltrami. Dans ce but il faut admettre que $a(x, y)$ et $b(x, y)$ ont aussi des dérivées partielles du second ordre par rapport à x et y .

Théorème 2. — *Supposons que les conditions du théorème 1 soient réalisées et de plus que $a(x, y)$ et $b(x, y)$ possèdent aussi des dérivées partielles du second ordre par rapport à x et y . Alors le second différentiateur de Beltrami s'exprime par la formule:*

$$(3.1) \quad \Delta_2 u = \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(u, a)}{\partial(x, y)} = 0, \quad \Delta_2 v = \frac{\partial(v, b)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(v, a)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Les équations (3.1) correspondent aux équations de Laplace

$$(3.2) \quad u_{aa} + u_{bb} = 0, \quad v_{aa} + v_{bb} = 0.$$

Subsistent en outre les relations suivantes:

$$(3.3) \quad \frac{\partial(u, a)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)} = 0, \quad \frac{\partial(v, a)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, b)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Démonstration. — L'hypothèse supplémentaire ainsi que les équations (2.8) assurent que $u(x, y)$ et $v(x, y)$ aient des dérivées partielles du second ordre par rapport à x et y . Les membres gauches des relations (3.1) et (3.3) ont donc un sens formel. En utilisant les notations (2.13), on trouve que les expressions (3.1) sont vraiment $\Delta_2 u$ et $\Delta_2 v$ [cf. (1.5)]. Il reste à montrer que leurs valeurs sont nulles.

Appliquons les formules (2.12) sur les parties réelle et imaginaire de $f'(z)$ [cf. (2.16)], nous obtenons

$$(3.4) \quad \begin{aligned} u_{aa} &= \frac{1}{J} \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)}, & u_{bb} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)}, \\ v_{aa} &= \frac{1}{J} \frac{\partial(v, b)}{\partial(x, y)}, & v_{bb} &= -\frac{1}{J} \frac{\partial(v, b)}{\partial(x, y)}. \end{aligned}$$

J étant différent de zéro, (3.2) et (3.4) fournissent les équations (3.1).

Les relations (3.3) découlent aussi des équations (2.16) en écrivant

$$u_{ab} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(u_a, a)}{\partial(x, y)} = u_{ba} = \frac{1}{J} \frac{\partial(u_b, b)}{\partial(x, y)},$$

$$v_{ab} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(v_a, a)}{\partial(x, y)} = v_{ba} = \frac{1}{J} \frac{\partial(v_b, b)}{\partial(x, y)}.$$

Remarque 3. — En admettant de plus que $a(x, y)$ et $b(x, y)$ sont indéfiniment dérivables par rapport à x et y , ce qui entraîne, d'après (2.8), que $u(x, y)$ et $v(x, y)$ jouissent de la même propriété, les formules (3.1) et (3.3) se prêtent à des généralisations simples pour $n > 2$.

$f(z)$ étant régulière, elle a des dérivées d'ordre supérieur, c'est-à-dire que $f^{(n)}(z)$ existe et est une fonction régulière de z pour tout n . On peut donc démontrer, comme nous l'avons fait dans le cas de $f(z)$, que les dérivées partielles $f_x^{(n)}$ et $f_y^{(n)}$ existent pour chaque n . La formule (2.14) peut donc être généralisée:

$$(3.5) \quad f^{(n)}(z) = \frac{1}{J} \frac{\partial(f^{(n-1)}, b)}{\partial(x, y)} = \frac{i}{J} \frac{\partial(f^{(n-1)}, a)}{\partial(x, y)} = \frac{i}{2J} \frac{\partial(f^{(n-1)}, \bar{z})}{\partial(x, y)}.$$

D'autre part, il vient également de la régularité de $f(z)$ que

$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^{n-1} f}{\partial a^{n-1}} = (-i)^{n-1} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial b^{n-1}}.$$

Posons ces deux expressions de $f^{(n)-1}(z)$ successivement dans (3.5), nous aurons

$$(3.6) \quad f^{(n)}(z) = \frac{1}{J} \frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial a^{n-1}}, b\right)}{\partial(x, y)} = \frac{-(-i)^n}{J} \frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial b^{n-1}}, a\right)}{\partial(x, y)},$$

$$(3.7) \quad f^{(n)}(z) = \frac{(-i)^{n-1}}{J} \frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial b^{n-1}}, b\right)}{\partial(x, y)} = \frac{i}{J} \frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial a^{n-1}}, a\right)}{\partial(x, y)}.$$

Pour $n = 1$ ces quatre relations se réduisent aux deux équations (2.15). Pour $n = 2$ on pourrait avoir six relations, dont on ne retient que les deux fournies par (3.6) et (3.7). En séparant les parties réelles et imaginaires, on tire les formules (3.1) de (3.6) et celles de (3.3) de (3.7). Pour $n > 2$ et si $n \equiv 0$ ou $n \equiv 2 \pmod{4}$ on déduit facilement de (3.6) et (3.7) des relations analogues à (3.1) et (3.3). Dans les formules suivantes il faut lire le signe supérieur si $n \equiv 0$ et le signe inférieur si $n \equiv 2 \pmod{4}$:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial a^{n-1}}, b\right)}{\partial(x, y)} \pm \frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial b^{n-1}}, a\right)}{\partial(x, y)} = 0, \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial a^{n-1}}, a\right)}{\partial(x, y)} \mp \frac{\partial\left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial b^{n-1}}, b\right)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Pour $n > 2$ et $n \equiv 1$ ou $n \equiv 3 \pmod{4}$ on trouve des équations de même caractère, où il faut lire le signe supérieur pour $n \equiv 1$ et le signe inférieur pour $n \equiv 3 \pmod{4}$:

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial a^{n-1}}, b \right)}{\partial(x, y)} \mp \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial b^{n-1}}, a \right)}{\partial(x, y)} = 0, \quad \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial a^{n-1}}, a \right)}{\partial(x, y)} \mp \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial b^{n-1}}, b \right)}{\partial(x, y)} = 0.$$

*

Faisons encore deux brèves remarques: 1° En possession des dérivées d'ordre supérieur de $f(z)$, cette fonction peut être développée en série de Taylor autour de chaque point $z_0 \in \Delta$ suivant les puissances croissantes de $(z - z_0)$. 2° On peut définir l'intégrale de $f(z)$ le long de courbes appartenant à Δ telle que la valeur de cette intégrale ne dépende que des extrémités z_1 et z_2 du chemin d'intégration. On constate que la condition de l'existence d'une telle intégrale est que la partie réelle et imaginaire de $f(z)$ satisfassent aux équations (2.4).

(Reçu le 12 Mars 1963.)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BELTRAMI, E.: „Delle variabili complesse sopra una superfici qualunque.” *Annali di Matematica pura ed applicata* (serie II) **1** (1867) 329—366.
- [2] BERNSTEIN, S. N.: „Sur une généralisation des théorèmes de Liouville et de M. Picard”. *Comptes Rendus* **151** (1910) 636.
- [3] KÜNZI, H. P.: *Quasikonforme Abbildungen*. Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.

О СИММЕТРИЧЕСКОМ ВИДЕ УРАВНЕНИЙ BELTRAMI

L. ALPÁR

Резюме

Е. БЕЛТРАМИ построил такое обобщение теории функций комплексного переменного, которое можно реализовать на некоторой поверхности S [1]. Пусть поверхность S представляется через уравнений

$$X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y), \quad Z = Z(x, y)$$

где $X(x, y)$, $Y(x, y)$ и $Z(x, y)$ обладают непрерывными частными производными первого и второго порядка по параметрам x и y . БЕЛТРАМИ представляет элемент длины дуги в виде:

$$ds^2 = E dx^2 + 2 F dx dy + G dy^2 = (U dx + V dy) (\bar{U} dx + \bar{V} dy),$$

где

$$U^2 = E, \quad V = U^{-1}(F + iH), \quad \bar{V} = U^{-1}(F - iH),$$

$$H^2 = EG - F^2 > 0 \text{ и } V\bar{V} = G \text{ и}$$

выбирает функцию $\kappa(x, y)$ так, чтобы

$$\kappa(x, y) (Udx + Vdy) = dt(x, y)$$

был полным дифференциалом в некоторой области D плоскости (x, y) . Он ищет функцию

$$h(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

обладающие в D полным дифференциалом и имеющие то свойство, что в каждой точке области D производное $\frac{dh}{dt}$ имеет независимое от $\frac{dy}{dx}$ значение.

Он показывает, что для выполнения этого требования необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ были решениями системы уравнений в частных производных:

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = H^{-1} \left(E \frac{\partial \psi}{\partial y} - F \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -H^{-1} \left(G \frac{\partial \psi}{\partial x} - F \frac{\partial \psi}{\partial y} \right).$$

Эти уравнения и являются уравнениями БЕЛТРАМИ.

БЕЛТРАМИ вводит еще три оператора: Δ_1 и Δ_2 , *первый и второй дифференциальный параметр* БЕЛТРАМИ, применение которых к функциям h , соотв. φ , удовлетворяющим уравнениям (1) дает следующие соотношения:

$$(2) \quad \Delta_1 h = \frac{1}{H^2} \left[E \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 - 2F \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + G \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right] = 0$$

$$(3) \quad \Delta_2 \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial x} - F \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{E \frac{\partial \varphi}{\partial y} - F \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{H} \right) = 0.$$

и таким же образом $\Delta_2 \psi = \Delta_2 h = 0$. Здесь уравнение (3) соответствует уравнению Лапласа. Далее, смешанный дифференциальный параметр

$$(4) \quad \Delta_1 \varphi \psi = \frac{1}{H^2} \left[E \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} - F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + G \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = 0$$

играет у него роль.

Автор этой статьи доказывает следующее: Пусть

$$z = z(x, y) = a(x, y) + ib(x, y)$$

представляет гомеоморфное отображение области D плоскости $x + iy$ на область Δ плоскости $a + bi$. Пусть, далее, функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$ обладают непрерывными частными производными первого порядка по x и по y в области D , где $J = \frac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)} > 0$ пусть

$$w = w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

функция, определенная в D . Для того, чтобы w была аналитической функцией переменного z ; $w = f(z)$ т. е., чтобы существовало $f'(z) = \frac{dw}{dz}$, одно-

значно определенного в каждой точке области D независимо от $\frac{dy}{dx}$ необходимо и достаточно, чтобы $u(x, y)$ и $v(x, y)$ представляли собой систему решений следующей системы уравнений в частных производных:

$$(5) \quad \frac{\partial(u, a)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(v, b)}{\partial(x, y)}, \quad \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)} = -\frac{\partial(v, a)}{\partial(x, y)},$$

что в сжатой форме может быть записано так:

$$\frac{\partial(f, z)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Легко подтверждается, что (5) является симметрическим видом уравнений (1).

Соотношения (2), (3) и (4) могут быть теперь записаны в следующем простом виде:

$$\begin{aligned} \Delta_1 f &= \frac{1}{J^2} \frac{\partial(f, z)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(f, \bar{z})}{\partial(x, y)} = 0 \\ \Delta_2 u &= \frac{\partial(u_a, b)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(u_b, a)}{\partial(x, y)} = 0, \quad \Delta_2 v = \frac{\partial(v_a, b)}{\partial(x, y)} - \frac{\partial(v_b, a)}{\partial(x, y)} = 0 \\ \Delta_1 uv &= \frac{1}{J^2} \left[\frac{\partial(u, a)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(v, a)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(u, b)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(v, b)}{\partial(x, y)} \right] = 0. \end{aligned}$$

Далее имеют силу следующие соотношения:

$$\frac{\partial(u_a, a)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(u_b, b)}{\partial(x, y)} = 0; \quad \frac{\partial(v_a, a)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v_b, b)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Множитель $\frac{\partial(f, \bar{z})}{\partial(x, y)}$ в выражении $\Delta_1 f$ имеет следующий смысл:

$$f'(z) = \frac{1}{J} \frac{\partial(f, b)}{\partial(x, y)} = \frac{i}{J} \frac{\partial(f, a)}{\partial(x, y)} = \frac{i}{2J} \frac{\partial(f, \bar{z})}{\partial(x, y)}.$$

Производное $f'(z)$ может быть записано еще в другом виде: пусть p и q две произвольные величины, такие, что $p^2 + q^2 \neq 0$; тогда

$$f'(z) = \frac{pf_x + qf_y}{pz_x + qz_y}.$$

Эта формула встречается еще у ВЕЛТРАМІ.

О БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ. I

L. LEINDLER¹

Пусть $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ — 2π -периодическая функция, ряд Фурье которой

$$(1) \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Ряд (1) будем называть безусловно сходящимся почти всюду на $[0, 2\pi]$, если он сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$, после любой перестановки его членов. При этом множество точек расходимости, вообще говоря, зависит от перестановки членов.

Пусть $E_n^{(2)}(f)$ — наилучшее приближение в метрике L^2 функции $f(x)$ посредством тригонометрических полиномов порядка не выше $(n-1)$, т. е.

$$E_n^{(2)}(f) = \min_{T_{n-1}} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x) - T_{n-1}(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

П. Л. Ульянов [5] доказал следующие теоремы:

Теорема А. Если $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ и для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\ln n (\ln \ln n)^{1+\varepsilon}}{n} \{E_n^{(2)}(f)\}^2 < \infty,$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ безусловно сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$.

Теорема Б. Если $f(x) \in L^2(0, 2\pi)$ и для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\ln t| |\ln |\ln t||^{1+\varepsilon}}{t} [f(x+t) - f(x-t)]^2 dt dx < \infty,$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ безусловно сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$.

В настоящей заметке мы обобщаем эти теоремы Ульянова. Именно, справедливы:

¹ Szeged. Университет.

Теорема 1. Пусть $\gamma(t)$ — неотрицательная функция, такая, что

$$(2) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k) \gamma(k)} < \infty.$$

Если

$$(3) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\ln k) \gamma(k)}{k} \{E_k^{(2)}(f)\}^2 < \infty,$$

то ряд (1) почти всюду сходится на отрезке $[0, 2\pi]$ при любом порядке членов.

Заметим, что утверждение теоремы 1 справедливо и для иных ортонормированных систем, при соответствующем изменении определения наилучших приближений $E_n^{(2)}(f)$.

Теорема 2.² Если неотрицательная функция $\varrho(t)$ такова, что

$$(4) \quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{t \left(\ln \left(\frac{1}{t} + 1 \right) \right) \varrho(t)} dt < \infty,$$

то условие

$$(5) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(\ln \left(\frac{1}{t} + 1 \right) \right) \varrho(t)}{t} [f(x+t) - f(x-t)]^2 dt dx < \infty$$

влечет безусловную сходимость почти всюду на $[0, 2\pi]$ ряда (1).³

Доказательство теоремы 1. Из условий (2) и (3) получаем, что справедливо неравенство

$$(6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} E_n^{(2)}(f) < \infty.$$

В самом деле

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} E_n^{(2)}(f) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(\ln n) \gamma(n)}} \frac{\sqrt{(\ln n) \gamma(n)} E_n^{(2)}(f)}{\sqrt{n}} \leq \\ &\leq \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n) \gamma(n)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma(n) \ln n}{n} [E_n^{(2)}(f)]^2 \right\}^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

² Из этой теоремы легко получается и следующая теорема ([2]): Если

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{t} \left\{ \int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x-t)]^2 dx \right\}^{1/2} dt < \infty,$$

то ряд (1) безусловно сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$.

³ Легко видеть, что условие (5) является достаточным для безусловной сходимости почти всюду ряда, сопряженного к ряду (1).

Условие (6) означает, что выполнено требование теоремы 1 работы [1], из которой вытекает, что ряд Фурье функции $f(x)$ безусловно сходится почти всюду на $[0, 2\pi]$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$\alpha(t) = \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{t} + 1\right)\right) \varrho(t)}{t}.$$

В силу равенства Парсеваля имеем

$$\int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x-t)]^2 dx = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \sin^2 kt;$$

следовательно

$$\begin{aligned} (7) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(t) [f(x+t) - f(x-t)]^2 dx dt &= \\ &= 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \int_0^{2\pi} \alpha(t) \sin^2 kt dt. \end{aligned}$$

Обозначим через I_k множество всех t отрезки $[0, 2\pi]$, таких, что $\sin^2 kt \geq \frac{1}{2}$.

В силу (5) и (7) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \int_{I_k} \alpha(t) dt < \infty.$$

Полагаем

$$\omega(k) = \int_{I_k} \alpha(t) dt.$$

Определим последовательность $\{k_m\}$ натуральных чисел следующим образом:

$$\omega(k_m) = \min_{2^{2^m} < k \leq 2^{2^{m+1}}} \{\omega(k)\}.$$

Мы докажем, что справедливо неравенство

$$(8) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m}}{\omega(k_m)} < \infty.$$

Сперва покажем, что

$$(9) \quad \omega(k_m) \geq \frac{1}{2^{10}} 2^{2m} \left(\int_{\frac{2\pi}{2^{2^m}}}^{\frac{2\pi}{2^{2^{m-1}}}} \frac{1}{t \left(\ln\left(\frac{1}{t} + 1\right)\right) \varrho(t)} dt \right)^{-1}.$$

Пусть $\Delta_m = \left[\frac{2\pi}{2^{2^m}}, \frac{2\pi}{2^{2^{m-1}}} \right]$. В силу неравенства Шварца получаем, что

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{\Delta_m \cap I_{km}} \frac{1}{t} dt \right)^2 &\leq \int_{\Delta_m \cap I_{km}} \frac{\left(\ln \left(\frac{1}{t} + 1 \right) \right) \varrho(t)}{t} dt \int_{\Delta_m \cap I_{km}} \frac{1}{t \left(\ln \left(\frac{1}{t} + 1 \right) \right) \varrho(t)} dt \leq \\
 (10) \quad &\leq \int_{I_{km}} \frac{\left(\ln \left(\frac{1}{t} + 1 \right) \right) \varrho(t)}{t} dt \int_{\Delta_m} \frac{1}{t \left(\ln \left(\frac{1}{t} + 1 \right) \right) \varrho(t)} dt.
 \end{aligned}$$

Но так как интеграл

$$\left(\int_{\Delta_m \cap I_{km}} \frac{1}{t} dt \right)^2 \geq \left[\frac{1}{2^4} \left(\log \frac{2^{2^m}}{2\pi} - \log \frac{2^{2^{m-1}}}{2\pi} \right) \right]^2 = \left[\frac{1}{2^4} (2^m - 2^{m-1}) \right]^2 = \frac{1}{2^{10}} 2^{2m},$$

то в силу (10) получается утверждение (9). Объединяя соотношения (4) и (9), мы заключаем, что выполнено неравенство (8). Таким образом остается доказать, что из условий

$$(11) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \omega(k) < \infty$$

и

$$(12) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m}}{\omega(k_m)} < \infty$$

вытекает безусловная сходимость почти всюду на $[0, 2\pi]$. Это непосредственно следует из метода доказательства Орлича.

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ — новое расположение ряда (1), так что $c_n = a_{s(n)}$ или $c_n = b_{r(n)}$ и $\varphi_n(x) = \cos(s(n)x)$ или $\varphi(x) = \sin(r(n)x)$. Разобьем члены этого нового ряда на группы, объединив в группу H_m такие члены $c_n \varphi_n(x)$, для которых $2^{2^m} < s(n), r(n) \leq 2^{2^{m+1}}$. Для членов входящих в группу H_m , положим $n = v_{im}$, где $i = 1, 2, \dots, 2(2^{2^{m+1}} - 2^{2^m})$ и v_{im} возрастают по i при фиксированном m . Тогда лемма Д. Е. Меншова [3] и Г. Радемахера [4] для $1 \leq j \leq l \leq 2(2^{2^{m+1}} - 2^{2^m})$ дает функции $\delta_m(x)$, для которых

$$\left| \sum_{i=j}^l c_{v_{im}} \varphi_{v_{im}}(x) \right| \leq \delta_m(x)$$

и

$$\int_0^{2\pi} \delta_m^2(x) dx < A \log^2 2 (2^{2^{m+1}} - 2^{2^m}) \sum_{k=2^{2^m}+1}^{2^{2^{m+1}}} (a_k^2 + b_k^2).$$

Следовательно из (11) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega(k_m)}{2^{2m}} \int_0^{2\pi} \delta_m^2(x) dx &\leq 8 A \sum_{m=1}^{\infty} \omega(k_m) \sum_{k=2^{2^m}+1}^{2^{2^{m+1}}} (a_k^2 + b_k^2) \leq \\ &\leq 8 A \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \omega(k) < \infty, \end{aligned}$$

что влечет за собой сходимость ряда

$$(13) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega(k_m)}{2^{2m}} \delta_m^2(x)$$

почти всюду. Пусть x_0 — точка сходимости последнего ряда. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=p}^q c_n \varphi_n(x_0) \right| &= \left| \sum_{m=m_1(p,q)}^{m_2(p,q)} \sum_{i=j_m}^{l_m} c_{v_{im}} \varphi_{v_{im}}(x_0) \right| \leq \\ &\leq \sum_{m=m_1(p,q)}^{m_2(p,q)} \delta_m(x_0) \leq \sum_{m=m_1(p,q)}^{\infty} \delta_m(x_0), \end{aligned}$$

где $1 \leq j_m \leq l_m \leq 2 (2^{2^{m+1}} - 2^{2^m})$. Далее,

$$\sum_{m=m_1(p,q)}^{\infty} \delta_m(x_0) \leq \left\{ \sum_{m=m_1(p,q)}^{\infty} \delta_m^2(x_0) \frac{\omega(k_m)}{2^{2m}} \sum_{m=m_1(p,q)}^{\infty} \frac{2^{2m}}{\omega(k_m)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

итак в силу (12) и (13)

$$\sum_{n=p}^q c_n \varphi_n(x_0)$$

при $p, q \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Тем самым сходимость почти всюду переставленного ряда установлена, что и завершает доказательство теоремы 2.

(Поступила 5 Апрель 1963 г.)

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] LEINDLER, L.: „Über unbedingte Konvergenz der der Orthogonalreihen mit strukturellen Bedingungen." *Studia Math.* **33** (1963) 113—117.
- [2] ЛЕЙНДЛЕР: „О безусловной сходимости тригонометрических рядов. II." *Успехи Мат. наук СССР* (в печати).
- [3] MENCHOFF, D.: „Sur les séries de fonctions orthogonales, I." *Fundamenta Math.* **4** (1923) 82—105.
- [4] RADEMACHER, H.: „Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen." *Math. Annalen* **87** (1922) 112—138.
- [5] УЛЬЯНОВ, П. Л.: „О рядах по переставленной тригонометрической системе." *Изв. АН, сер. матем.* **22** (1958) 515—542.

ÜBER UNBEDINGTE KONVERGENZ DER TRIGONOMETRISCHEN REIHEN. I

von

L. LEINDLER

Bezeichne $E_n^{(2)}(f)$ den besten Annäherungsgrad von $f(x)$ im Sinne der L^2 -Metrik mit trigonometrischen Polynomen $(n-1)$ -ter Ordnung.

In dieser Note haben wir zwei Sätze von P. L. ULJANOV verschärft. Unsere Ergebnisse sind die folgenden:

Satz 1. Es sei $\gamma(t)$ eine nicht-negative Funktion mit

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\gamma(k) k \ln k} < \infty.$$

Gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma(k) \ln k}{k} \{E_k^{(2)}(f)\}^2 < \infty,$$

dann konvergiert die Entwicklung

$$(I) \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

bei jeder Anordnung ihrer Glieder fast überall.

Satz 2. Es sei $\varrho(t)$ eine nicht-negative Funktion mit

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{t \left(\ln \left(\frac{1}{t} + 1 \right) \right)} \varrho(t) dt < \infty.$$

Gilt

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left(\ln \left(\frac{1}{t} + 1 \right) \right) \varrho(t)}{t} [f(x+t) - f(x-t)]^2 dt dx < \infty,$$

so ist die Reihe (I) unbedingt konvergent.

Ohne Beweis haben wir erwähnt, dass sich aus dem Satz 2 leicht ergibt, dass die Reihe (I) unter der Bedingung

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{t} \left\{ \int_0^{2\pi} [f(x+t) - f(x-t)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} dt < \infty$$

bei jeder Anordnung ihrer Glieder fast überall konvergiert.

HERMITE EXPANSION AND DISTRIBUTION OF ZEROS OF POLYNOMIALS

by

E. MAKAI—P. TURÁN

To Paul Erdős on his 50th birthday.

1. Some time ago one of us (see [1]) realised that in problems when reality of zeros are concerned the Hermite-expansion seems to be a more appropriate tool than power-series expansion. This fact lends interest to the general problem to study the functional algebra of the Hermite-expansion of polynomials, i.e., the influence of the coefficients of its Hermite-expansion upon the distribution of its zeros. Various results have been reached in this direction (see [2], [3], [4]) but to one problem, raised in [1], no progress was made. This refers to the interesting question, does there exist a theory of the Hermite-expansion corresponding to the LANDAU—FEJÉR—MONTEL-theory of polynomials (see [5]). In this paper we are going to give the first theorem in this direction. The Hermite-polynomials $H_\nu(z)$ are always meant with the normalisation

$$(1.1) \quad e^{-z^2} H_\nu(z) = (-1)^\nu (e^{-z^2})^{(\nu)}.$$

Writing $z = x + iy$ we assert the following

Theorem I. *The „Hermite-trinomial” equation (ζ arbitrary complex)*

$$(1.2) \quad f(x) \stackrel{\text{def.}}{=} 1 + H_1(z) + \zeta H_n(z) = 0$$

has always at least one of its zeros in the strip $|y| \leq A$ with a positive numerical constant A .

This will be a simple consequence of the following

Theorem II. *The equation (1.2) has for $n \geq 36$ at least one zero in the strip $|y| \leq e^3$.*

The proof of this theorem will not be very delightful; but a first proof can be as ugly as it wants to be.

This paper seems to us fit for dedication to P. ERDŐS who enriched the theory of polynomials by so many ingenious contributions.

2. For the proof we shall need some facts, more or less known from the theory of Hermite-polynomials. They satisfy the recurrence-formula

$$(2.1) \quad H_m(z) = 2zH_{m-1}(z) - 2(m-1)H_{m-2}(z),$$

further the formula

$$(2.2) \quad H'_m(z) = 2mH_{m-1}(z).$$

We shall need also the deeper fact, due to G. SZEGŐ (see [6] p. 128) (which we use in a slightly weaker form) according to which, if ξ_m stands for the maximal zero of $H_m(x) = 0$, then

$$(2.3) \quad \xi_m < (2m+1)^{1/2} - 1,8(2m+1)^{-1/6}$$

and also the inequality of Van VEEN (see [9])

$$\xi_m^2 \geq 2(m+1) - 6,1(m+1)^{1/3} \\ m \geq 2.$$

This last inequality we use in the slightly weaker form

$$(2.4) \quad \xi_m > \sqrt{2m+2} - \frac{4,4}{(m+1)^{1/6}}. \\ m \geq 5.$$

Applying (2.3) and (2.4) with $m = n$ resp. $n-1$ we obtain for $n \geq 6$

$$\begin{aligned} \xi_n - \xi_{n-1} &< (2n+1)^{1/2} - (2n)^{1/2} - \frac{1,8}{(2n+1)^{1/6}} + \\ &+ \frac{4,4}{n^{1/6}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}} + \left(\frac{4,4}{n^{1/6}} - \frac{1,8}{(2n+1)^{1/6}} \right) < \\ (2.5) \quad &< \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{n}} + n^{-1/6} \left(4,4 - \frac{1,8}{3^{1/6}} \right) < \\ &< \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{n}} + \frac{3}{n^{1/6}} = \frac{1}{n^{1/6}} \left(3 + \frac{\sqrt{2}}{4n^{1/3}} \right) < 3,2n^{-1/6} \end{aligned}$$

We shall further need two inequalities due to one of us (see [7]). The first of these asserts the inequality

$$(2.6) \quad |H_{m-1}(\xi_m)| \geq \frac{(m-1)! e^{\frac{1}{2}\xi_m^2}}{2 \left(\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor \right)!} \sqrt{2m+1 - \xi_m^2}$$

and the second, that for

$$-\sqrt{2m+1} \leq x \leq \sqrt{2m+1}$$

the inequality

$$(2.7) \quad |H_m(x)| \leq \frac{m!}{\left[\frac{m}{2} \right]!} (2m+1)^{1/4} \frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{(2m+1-x^2)^{1/4}}$$

holds. (We remark that the last one could have been replaced by a somewhat weaker inequality due to J. BALÁZS (see [8]) which can be deduced much

simpler.) Since from (2.3) we have evidently for $m \geq 1$ the inequality

$$2m + 1 - \xi_m^2 \geq (2m + 1)^{1/3}$$

and hence from (2.6) and (2.4) for $m \geq 5$

$$\begin{aligned} |H_{m-1}(\xi_m)| &\geq \frac{(m-1)!}{2 \left(\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor \right)!} (2m+1)^{1/6} \cdot e^{\frac{1}{2}\{2m+2-8,8\}^{1/2}(m+1)^{1/3}} > \\ &> \frac{(m-1)!}{2 \left(\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor \right)!} (2m+1)^{1/6} \cdot e^{m+1-6,3(m+1)^{1/3}}. \end{aligned}$$

Thus with $m = n - 1$, $n \geq 6$ this gives

$$|H_{n-2}(\xi_{n-1})| \geq \frac{(n-2)!}{2 \left[\frac{n}{2} \right]!} (2n-1)^{1/6} \cdot e^{n-6,3n^{1/3}}$$

and taking in account (2.1) with $m = n$

$$\begin{aligned} |H_n(\xi_{n-1})| &= 2(n-1) |H_{n-2}(\xi_{n-1})| \geq \\ (2.8) \quad &\geq \frac{(n-1)!}{\left[\frac{n}{2} \right]!} (2n-1)^{1/6} \cdot e^{n-6,3n^{1/3}}. \end{aligned}$$

As it is well-known we have $\xi_{n-1} < \xi_n$; let us consider $|H_n(z)|$ on the circle $|z - \xi_n| = \xi_n - \xi_{n-1}$. Let us observe that owing to the fact that all zeros of $H_n(z)$ are real, the minimum of $|H_n(z)|$ on our circle is attained only at $z = \xi_{n-1}$. Hence from (2.8) we get the

Lemma. On the circle $|z - \xi_n| = \xi_n - \xi_{n-1}$ the inequality

$$|H_n(z)| \geq \frac{(n-1)!}{\left[\frac{n}{2} \right]!} (2n-1)^{1/6} e^{n-6,3n^{1/3}}$$

holds, if only $n \geq 6$.

3. We shall need another inequality too, which is an easy deduction from (2.7) and (2.2). Let $K(\delta)$ stand for the circle $\left| z + \frac{1}{2} \right| = \delta$, $\delta > 0$ and we want to have an upper bound for $|H_n(z)|$ on $K(\delta)$. Repeated use of (2.2) gives

$$H_n^{(k)}(z) = 2^k \frac{n!}{(n-k)!} H_{n-k}(z)$$

and hence on $K(\delta)$

$$|H_n(z)| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} H_n^{(k)} \left(-\frac{1}{2} \right) \left(z + \frac{1}{2} \right)^k \right| \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2\delta)^k \left| H_{n-k} \left(-\frac{1}{2} \right) \right|.$$

Using (2.7) this gives on $K(\delta)$

$$\begin{aligned}
 |H_n(z)| &\leq n! \sum_{k=0}^n \frac{(2\delta)^k}{k! \left[\frac{n-k}{2}\right]!} \left(\frac{2n-2k+1}{2n-2k+\frac{3}{4}}\right)^{1/4} \cdot e^{1/8} < \\
 (3.1) \quad &< \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} e^{1/8} (1+2\delta)^n \cdot \max_k \frac{(n-k)!}{\left[\frac{n-k}{2}\right]!} < \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} e^{1/8} \frac{n!}{\left[\frac{n}{2}\right]!} \cdot e^{2\delta n}.
 \end{aligned}$$

This is what we shall need.

4. Now we turn to the proof of our theorem. On the circle $|z - \xi_n| = \xi_n - \xi_{n-1}$ we have from (2.3) and (2.5) for $n \geq 6$ the inequality

$$\begin{aligned}
 |1 + H_1(z)| &= |1 + 2z| \leq 1 + 2(2\xi_n - \xi_{n-1}) < \\
 (4.1) \quad &< 1 + 2\{(2n+1)^{1/2} - 1,8(2n+1)^{-1/6} + 3,2n^{-1/6}\} < 3\sqrt{2n+1}
 \end{aligned}$$

and hence, if only

$$(4.2) \quad \left| \zeta \right| \frac{n!}{\left[\frac{n}{2}\right]!} (2n-1)^{1/6} e^{n-6,3m/3} > 3n\sqrt{2n+1}$$

then owing to the lemma and (4.1) we have

$$|\zeta H_n(z)| > |1 + H_1(z)|.$$

But then Rouché's theorem gives at once the existence of a zero in the circle

$$|z - \xi_n| \leq \xi_n - \xi_{n-1}$$

i.e., owing to (2.5) in the strip

$$(4.3) \quad |Iz| \leq e^{\frac{3,2}{6^{1/6}}} < e^3.$$

On the other hand, if only

$$(4.4) \quad \left| \zeta \right| \frac{n!}{\left[\frac{n}{2}\right]!} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} e^{9/8} < \frac{1}{n}$$

then choosing $\delta = \frac{1}{2n}$ we have on the circle $K\left(\frac{1}{2n}\right)$, using (3.1),

$$\begin{aligned}
 |1 + H_1(z)| &= 2 \left| z + \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{n} > \\
 (4.5) \quad &> \left| \zeta \right| \frac{n!}{\left[\frac{n}{2}\right]!} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} e^{9/8} > \left| \zeta \right| |H_n(z)|
 \end{aligned}$$

i.e., again Rouché's theorem gives the existence of a zero in the circle

$$\left| z + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{2n}, \text{ i.e., a fortiori in the strip}$$

$$(4.6) \quad |Iz| \leq \frac{1}{12}.$$

Obviously (4.2) and (4.4) cover all ζ -values if

$$(4.7) \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} e^{-9/8} \frac{1}{n} > \frac{3n\sqrt{2n+1}}{(2n-1)^{1/6}} e^{-n+6,3n^{1/3}}$$

5. Since, as easy to see, we have even for $n \geq 1$

$$\frac{\sqrt{2n+1}}{(2n-1)^{1/6}} < 2n^{1/3},$$

(4.7) is true a fortiori if

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} e^{-9/8} > 6n^{7/3} e^{-n+6,3n^{1/3}},$$

or if

$$(5.1) \quad e^n > 6 \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} e^{9/8+6,3n^{1/3}} n^{7/3}.$$

Since

$$6 \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} < e^{2+\frac{1}{12}} \quad \text{and} \quad \frac{7}{3} \log n < 2,6n^{1/3}$$

(5.1) is in turn certainly true if

$$e^n > e^{3,22+9n^{1/3}}$$

resp.

$$n > 3,2 + 9n^{1/3}.$$

But this true for $n \geq 36$ and hence Theorem II is proved.

6. In order to prove Theorem I we have to consider the case

$$(6.1) \quad n \leq 35.$$

Hence if

$$(6.2) \quad |\zeta| < \frac{2}{\max_{|z+\frac{1}{2}|=1} |H_n(z)|} \leq c_1$$

(c_1 and later c_2, \dots being positive explicitly calculable numerical constants) then the equation (1.2) has owing to Rouché's theorem a zero in the circle

$\left| z + \frac{1}{2} \right| \leq 1$, i.e., in $|Iz| \leq 1$. Further if

$$(6.3) \quad |\zeta| > \frac{\max_{|z - \xi_{n-1}| = \xi_n - \xi_{n-1}} |1 + 2z|}{|H_n(\xi_{n-1})|} \geq c_2$$

(in consequence of (6.1.), then the equation (1.2) has at least one zero owing to Rouché's theorem in the circle

$$|z - \xi_{n-1}| \leq \xi_n - \xi_{n-1} \leq c_3$$

i.e., in $|Iz| \leq c_3$. If $c_1 > c_2$, we are ready and our strip is

$$(6.4) \quad |Iz| \leq \max(e^3, c_3).$$

If not, then the zeros of the equations (1.2) with

$$c_1 \leq |\zeta| \leq c_2, \quad n \leq 35$$

are certainly in a finite universal domain, i.e., with suitable c_4 in

$$|Iz| \leq c_4.$$

In this case the strip

$$|Iz| \leq \max(e^3, c_3, c_4)$$

fulfills our requirement. Hence Theorem I is proved too.

(Received April 19, 1963.)

REFERENCES

- [1] TURÁN, P.: „Sur l'algèbre fonctionnelle". *Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens Hongrois*, 1952, 279—290.
- [2] TURÁN, P.: „Hermite-expansion and strips for zeros of polynomials". *Archiv der Math.* **5** (1954) 148—152.
- [3] TURÁN, P.: „To the analytical theory of algebraic equations". *Izv. na. Matematicheskaja Inst. Sofia* **3** (1959) 123—137.
- [4] SPECHT, W.: „Algebraische Gleichungen mit reellen, oder komplexen Koeffizienten". *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Vol. I 1, fasc. 3, part 2, Stuttgart, Teubner, 1958.
- [5] DIEUDONNÉ, J.: „La théorie analytique des polynomes d'une variable". *Mémorial des Sciences Mathématiques*, fasc. 93, Paris, Gauthier-Villars, 1938.
- [6] SZEGŐ, G.: „Orthogonal polynomials". *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, Vol. XXIII (1939).
- [7] MAKAI, E.: „An estimation in the theory of Diophantine Approximations". *Acta Math. Hung.* **9** (1958) 299—307.
- [8] BALÁZS, J.: „Hermite-polinomokra vonatkozó egy egyenlőtlenség". *Mat. Lapok* **12** (1961) 72—74.
- [9] VAN VEEN, T. L.: „Asymptotische Entwicklung der Hermiteschen Funktionen". *Math. Ann.* (1931) 408—436.

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ПО МНОГОЧЛЕНАМ ЭРМИТА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ

Е. МАКАИ и Р. ТУРА́Н

Резюме

Если $H_n(z)$ является многочленом Эрмита, определенным формулой (1.1), тогда корни многочленов определенных формулой (1.2) размещаются вблизи действительной оси плоскости комплексного переменного. Точнее, существует постоянная величина A , независимая от n и от ζ такая, что мнимые части y корней удовлетворяют неравенству $|y| < A$.

KRITISCHE GRAPHEN I

von

T. GALLAI

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit kommen nur solche endliche Graphen vor, die weder Schlingen, noch mehrfache Kanten enthalten. Unter einer *zulässigen Färbung* des Graphen G verstehen wir eine Zuordnung von „Farben“ zu den Knotenpunkten (im folgenden kurz: Punkten) von G , wobei jeder Punkt eine Farbe bekommt, und je zwei durch eine Kante verbundenen Punkte stets verschiedene Farben erhalten. Die kleinste Anzahl von Farben, mit der eine zulässige Färbung des Graphen G durchgeführt werden kann, heißt die *chromatische Zahl* von G , die wir mit $\kappa(G)$ bezeichnen. Für den leeren Graphen G sei $\kappa(G) = 0$. Der Graph G heißt *kritisch*, wenn für jeden echten Teilgraphen G' von G $\kappa(G') < \kappa(G)$ gilt. G heißt *k-kritisch* ($k \geq 1$), wenn G kritisch ist und $\kappa(G) = k$ besteht. Der Begriff der kritischen Graphen wurde von G. A. DIRAC eingeführt, und er bewies auch eine Reihe interessanter Eigenschaften dieser Graphen (s. [2]—[8]). In der vorliegenden Arbeit zeigen wir einige weitere Eigenschaften der kritischen Graphen. Mehrere der Resultate sind Verschärfungen gewisser Ergebnisse von DIRAC und anderer Verfasser.

Man kann leicht zeigen (s. [2], [12]), daß in einem k -kritischen Graphen der Grad¹ eines jeden Punktes $\geq k-1$ ist. Der Kürze halber werden wir die Punkte $(k-1)$ -ten Grades eines k -kritischen Graphen die *Nebenpunkte*, alle übrigen Punkte die *Hauptpunkte* des Graphen nennen. Es existieren kritische Graphen, die nur Nebenpunkte besitzen. Die vollständigen Graphen² und die ungeraden Kreise³ sind solche Graphen, und man kann zeigen (s. (3.1)), daß außer diesen keine weitere existieren. Für $k = 1, 2, 3$ existieren überhaupt keine anderen k -kritischen Graphen (s. [12]). Die aus lauter Nebenpunkten bestehenden Graphen sind also von sehr einfacher Natur. Nun stellte sich heraus, daß die Nebenpunkte in jedem kritischen Graphen einen Teilgraphen von sehr einfacher Struktur spannen⁴, sowie daß dieser Teilgraph eben aus vollständigen Graphen und ungeraden Kreisen zusammengesetzt ist. Es gilt diesbezüglich der

¹ Der Grad eines Punktes ist die Anzahl der zu dem Punkt inzidenten Kanten.

² Ein vollständiger j -Graph ($j \geq 0$) besitzt j Punkte, und je zwei dieser sind durch eine Kante des Graphen verbunden. (Wir betrachten also den leeren Graphen als vollständigen 0-Graphen, den einpunktigen Graphen als vollständigen 1-Graphen.)

³ Ein Kreis heißt ungerade, wenn er eine ungerade Anzahl von Kanten besitzt.

⁴ Ist A eine Menge von Punkten des Graphen G , so besteht der durch A gespannte Teilgraph von G aus den Punkten von A und aus sämtlichen solchen Kanten von G , die Punkte von A verbinden.

Satz (E.1). *Es sei G ein k -kritischer Graph und G_N der durch die Nebenpunkte von G gespannte Teilgraph von G . Dann sind die Glieder⁵ von G_N vollständige j -Graphen ($0 \leq j \leq k$) und ungerade Kreise. (Enthält G keinen Nebenpunkt, so ist G_N der vollständige 0-Graph, d. h. der leere Graph.)*

Läßt man den vollständigen k -Graphen außer Betracht, so reicht im Falle $k \geq 4$ die in (E.1) ausgesprochene Eigenschaft, mit einer trivialen Ergänzung, zur Charakterisierung der Teilgraphen G_N aus. Dies besagt der

Satz (E.2). *Es sei $k \geq 4$ und G' ein Graph, dessen Glieder vollständige j -Graphen ($0 \leq j \leq k-1$) und ungerade Kreise sind und in dem jeder Punkt einen Grad $\leq k-1$ besitzt. Dann existiert ein solcher k -kritischer Graph G , in dem die Nebenpunkte einen mit G' isomorphen Graphen spannen.*

Satz (E.2) enthält auch die Behauptung, daß es für $k \geq 4$ k -kritische Graphen ohne Nebenpunkte existieren. Bei dem Beweis dieser Behauptung ist die Angabe eines 4-kritischen Graphen ohne Nebenpunkte die Hauptaufgabe. Man kann nämlich mit Hilfe eines solchen 4-kritischen Graphen in sehr einfacher Weise für jedes beliebige $k > 4$ einen k -kritischen Graphen ohne Nebenpunkte konstruieren (s. unter (2.1)). In (2.3) geben wir unendlich viele solche 4-kritischen Graphen an, in denen jeder Punkt den Grad 4 hat. Bezüglich diesen Graphen werden wir auch die folgende interessante Tatsache beweisen (s. (2.4)): Man kann unter den angegebenen Graphen unendlich viele solche Graphen finden, die keine „kleine“ ungerade Kreise enthalten, genauer gesagt deren ungerade Kreise mindestens \sqrt{n} Kanten enthalten, wobei n die Punktzahl der Graphen bezeichnet.⁶

Neben der Angabe k -kritischen Graphen ohne Nebenpunkte, beruht der Beweis von (E.2) auf solchen Konstruktionen, mit Hilfe derer man aus kritischen Graphen neue kritische Graphen herstellen kann. Zum Beweis von (E.1) wenden wir dieselbe Methode des Farbenwechsels an, mit welchem BROOKS seinen Färbungssatz bewiesen hat.

Wir zeigen mehrere Anwendungen des Satzes (E.1). Der vorher erwähnte Brooks'sche Satz ergibt sich als unmittelbare Folge (s. (3.2)). Wir stellen dann mit Hilfe (E.1) in direkter Form diejenigen kritischen Graphen dar, die genau einen Hauptpunkt besitzen (Satz (3.3)). Diese Graphen waren vorher von DIRAC durch ein rekurrentes Verfahren hergestellt worden (s. [8]). Unsere Darstellung gibt die Möglichkeit aus diesen Graphen solche auszuwählen, deren größte Kreise „klein“ sind. Wir können so bei jedem festen $k \geq 4$ für unendlich viele n solche n -punktigen k -kritischen Graphen angeben, deren größten Kreise weniger als $c_k \log n$ Kanten enthalten (c_k bezeichnet eine nur von k abhängige Konstante) (Satz (5.2)). Dies bedeutet eine Verschärfung früherer Resultate von J. B. KELLY und L. M. KELLY, DIRAC und R. C. READ ([10], [5], [13]). Es sei

⁵ Die Glieder eines zusammenhängenden, mehrpunktigen Graphen G sind durch die folgenden Eigenschaften bestimmt: Durch je zwei Kanten desselben Gliedes geht ein Kreis von G , durch zwei solche Kanten, die zu verschiedenen Gliedern gehören, geht kein Kreis von G . Der leere sowie der einpunktige Graph besitzt ein einziges Glied: den Graphen selbst. Man versteht unter den Gliedern eines nicht zusammenhängenden Graphen die Glieder seiner Komponenten (s. [11], [12]).

⁶ Siehe ERDŐS, P.: „On circuits and subgraphs of chromatic graphs“. *Mathematika* 9 (1962) S. 171.

noch erwähnt, daß man mit Hilfe von (E.1) auch jene kritischen Graphen herleiten kann, die genau zwei Hauptpunkte besitzen.

Der Satz (E.1) gibt auch die Möglichkeit zur Bestimmung einer unteren Schranke für die Kantenanzahl kritischer Graphen. Wir zeigen, daß ein k -kritischer ($k \geq 4$) Graph mit n ($n > k$) Punkten stets mehr als $n(k-1)/2 + n/(2(k+9))$ Kanten enthält (Satz (4.4)). Unsere Schranke ist zwar für "kleine" n kleiner, als die von DIRAC angegebene (s. [8] und (4.2)) — diese hat den Wert $n(k-1)/2 + (k-3)/2$ — sie hat jedoch die Eigenschaft, daß ihr Unterschied von der „trivialen Schranke“ $n(k-1)/2$ mit n ins Unendliche wächst.⁷

1. Beweis des Satzes (E.1)

In diesem Abschnitt führen wir zuerst mehrere Bezeichnungen ein und geben einige Erklärungen. Dann beweisen wir mehrere Hilfsätze und gelangen durch diese zum Beweis des Satzes (E.1).

(1.1) **Bezeichnungen und Erklärungen.** Ist M eine endliche Menge, so bezeichne $\mathcal{N}(M)$ die Anzahl der Elemente von M . Mit G (auch mit verschiedenen Zeichen versehen) werden wir immer Graphen bezeichnen. $\mathcal{P}(G)$ bzw. $\mathcal{K}(G)$ bezeichnet die Menge der Punkte bzw. Kanten von G ; $\pi(G)$ bzw. $\nu(G)$ die Anzahl der Punkte bzw. Kanten von G . Ist $\mathcal{P}(G) = \emptyset$ und $\mathcal{K}(G) = \emptyset$, so heißt G leer ($G = \emptyset$).

Der Graph $G_1 \cup G_2$, bzw. $G_1 \cap G_2$ ist durch $\mathcal{P}(G_1 \cup G_2) = \mathcal{P}(G_1) \cup \mathcal{P}(G_2)$, $\mathcal{K}(G_1 \cup G_2) = \mathcal{K}(G_1) \cup \mathcal{K}(G_2)$ bzw. $\mathcal{P}(G_1 \cap G_2) = \mathcal{P}(G_1) \cap \mathcal{P}(G_2)$, $\mathcal{K}(G_1 \cap G_2) = \mathcal{K}(G_1) \cap \mathcal{K}(G_2)$ definiert. Falls $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ ist, so sagen wir daß G_1 und G_2 *fremd* sind.

$\varrho_G(x)$ ist der Grad des Punktes x in G . Ist $\varrho_G(x) = 0$, so heißt x ein *isolierter Punkt* von G . xy oder yx bezeichnet die Kante, die die Punkte x und y verbindet. Sind A und B Punktmengen, dann nennen wir ihre Punkte kurz *A-bzw. B-Punkte*. Eine *AB-Kante* ist eine solche Kante, die einen *A-Punkt* mit einem *B-Punkt* verbindet. Ist $A = \{a\}$, so schreiben wir statt *AB-Kante* *aB-Kante*. $x \in G$ ist gleichbedeutend mit $x \in \mathcal{P}(G)$, $xy \in G$ mit $xy \in \mathcal{K}(G)$.⁸ Ist $xy \in G$, so sagen wir auch, daß x und y in G *verbunden* oder *benachbart* sind. Gilt $A \subseteq \mathcal{P}(G)$, $B \subseteq \mathcal{P}(G)$ und enthält G jede *AB-Kante*, dann sagen wir, daß A und B in G *vollständig verbunden* sind.

$G' \subseteq G$ drückt aus, daß G' ein Teilgraph von G ist ($G' \subset G$, daß G' ein echter Teilgraph ist). Ist $A \subseteq \mathcal{P}(G)$, so bezeichnet $[A]_G$ den durch A gespannten Teilgraphen von G . Wir setzen $G - A = [\mathcal{P}(G) - A]_G$ ($A \subseteq \mathcal{P}(G)$) und $G - x = G - \{x\}$ ($x \in \mathcal{P}(G)$). Ist $xy \in G$, dann bezeichnet $G - xy$ jenen Graphen, der aus G durch Weglassung der Kante xy entsteht.

Für den mit G bezeichneten Graphen werden wir von den Zeichen $\varrho_G(x)$ und $[A]_G$ den Index G meistens weglassen. Die Begriffe „Grad“ „benachbart“ u. s. w. beziehen sich — wenn anders nicht gesagt wird — gleichfalls auf den mit G bezeichneten Graphen.

⁷ Unseres Wissens nach hat auch DIRAC bewiesen, daß der Unterschied zwischen der Kantenanzahl und $n(k-1)/2$ mit n ins Unendliche wächst.

⁸ Die Punkte werden immer mit kleinen lateinischen Buchstaben, die Kanten mit Buchstabenpaaren bezeichnet.

Die Punktmenge A ist eine *trennende Punktmenge* des zusammenhängenden Graphen G , wenn $A \subseteq \mathcal{P}(G)$ besteht und $G - A$ nicht zusammenhängend ist. Ist $\{x\}$ eine trennende Menge von G , so heißt x ein *trennender Punkt* von G . Unter den trennenden Punkten eines nicht-zusammenhängenden Graphen G verstehen wir die trennenden Punkte der Komponenten von G . Ist x kein trennender Punkt von G , so gehört er zu genau einem Glied von G (s. die Fußnote⁵ der Einleitung). Wir nennen ein solches x einen *inneren Punkt* des Gliedes, dem es angehört. Ein Glied von G heißt *Endglied*, wenn es höchstens einen trennenden Punkt von G enthält. Jeder Graph besitzt mindestens einen Endglied, diejenigen mit trennenden Punkten mindestens zwei (s. [12] S. 88). Ist G zusammenhängend und mehrpunktig, so enthält jedes Endglied von G innere Punkte.

$W = (x_1 \dots x_n)$ ($n \geq 1$) bezeichnet im Falle $n \geq 2$ jenen Weg, der aus den (verschiedenen) Punkten x_1, \dots, x_n und aus den Kanten $x_1x_2, \dots, x_{n-1}x_n$ besteht; im Falle $n = 1$ den einpunktigen Graphen (Weg) (x_1) , der aus x_1 besteht. Wir werden W auch einen x_1x_n -Weg nennen.

$V = (x_1x_2 \dots x_nx_1)$ ($n \geq 3$) bezeichnet jenes Vieleck (Kreis), das aus den (verschiedenen) Punkten x_1, x_2, \dots, x_n und aus den Kanten $x_1x_2, \dots, x_{n-1}x_n, x_nx_1$ besteht. Zwei Punkte x_i und x_j von V zerlegen V in zwei Wege, diese heißen die *durch x_i und x_j bestimmten Bogen* von V . Die *Diagonalen* von V sind diejenigen Kanten, die Punkte von V verbinden, jedoch nicht zum Graphen V gehören.

Unter der *Größe (Länge)* eines Weges bzw. Kreises (Vielecks) verstehen wir die Anzahl seiner Kanten. Ein Weg bzw. ein Kreis heißt *gerade* oder *ungerade*, je nach dem seine Länge gerade oder ungerade ist.

Den Ausdruck „vollständiger j -Graph“ werden wir mehrmals durch das Zeichen $\langle j \rangle$ ersetzen. $G = \langle j \rangle$ bedeutet also, daß G ein vollständiger j -Graph ist.

Für die Färbung der Punkte sollen die nichtnegativen ganzen Zahlen benutzt werden. Ist f eine Färbung von G , ist ferner $x \in G$, $G' \subseteq G$ und $A \subseteq \mathcal{P}(G)$, dann bezeichnet $f(x)$ die Farbe von x in f , $f(G')$ bzw. $f(A)$ die Menge der in G' bzw. A vorkommenden Farben von f . Eine k -Färbung ($k \geq 1$) von G ist eine zulässige Färbung von G mit höchstens k Farben. G heißt k -färbbar, wenn er eine k -Färbung besitzt. (Ein k -färbbarer Graph ist also auch $(k+r)$ -färbbar ($r > 0$).) Ist $\kappa(G) = k$, so heißt G k -chromatisch. Gilt für jedes $x \in G$ $\kappa(G-x) < \kappa(G)$, so heißt G *punktkritisch*.

Es sei $\kappa(G) = k$ und $x \in G$. f heißt eine *zu x gehörige Färbung* (von G), wenn f eine solche k -Färbung von G ist, bei der die Farbe $f(x)$ in keinem von x verschiedenen Punkt vorkommt.

Die folgenden drei Behauptungen sind trivial:

(1.2) Zu jedem Punkt x des kritischen Graphen G existiert eine zu x gehörige Färbung von G .

(1.3) Es sei G k -kritisch ($k \geq 2$), x ein Nebenpunkt von G ($\varrho(x) = k-1$) und f eine zu x gehörige Färbung von G . Sind dann x_1, \dots, x_{k-1} die Nachbarpunkte von x in G , so sind $f(x_1), \dots, f(x_{k-1})$ verschieden.

(1.4) Es sei G kritisch, $x \in G$, f eine zu x gehörige Färbung von G und y ein solcher Nachbarpunkt von x , dessen Farbe $f(y)$ bei keinem anderen Nachbarpunkt

von x vorkommt. Vertauscht man dann die Farben von x und y , ohne die Farbe der übrigen Punkte zu ändern, so geht f in eine zu y gehörige Färbung über.

Aus (1.3) und (1.4) folgt unmittelbar

(1.5) *Es sei G k -kritisch ($k \geq 2$), x ein Nebenpunkt von G und f eine zu x gehörige Färbung von G . Ist y ein beliebiger Nachbarpunkt von x , so führt die Vertauschung der Farben von x und y , bei Festhaltung der Farben der übrigen Punkte, die Färbung f in eine zu y gehörige Färbung über.*

Der in (1.5) vorkommende Farbenwechsel wurde erst von BROOKS im Beweis seines Färbungssatzes angewendet [1].

(1.6) **Lemma.** *Es sei G k -kritisch ($k \geq 3$), x_0, x_1, \dots, x_l Nebenpunkte von G und $V = (x_0 x_1 \dots x_l x_0)$ ein Vieleck von G . Ferner sei f eine zu x_0 gehörige Färbung von G . Permutiert man dann die Farben von x_1, \dots, x_l in zyklischer Ordnung, ohne die Farbe der übrigen Punkte zu ändern, so gelangt man wieder zu einer zu x_0 gehörigen Färbung von G .*

Beweis. Es sei $f(x_0) = 0$ und $f(x_i) = \alpha_i$ ($i = 1, \dots, l$). Vertauscht man nacheinander die Farben von x_0 und x_1 , x_1 und x_2, \dots, x_{l-1} und x_l , und endlich diejenigen von x_l und x_0 , ohne die Farbe der übrigen Punkte zu ändern, so erhält man zufolge (1.5) der Reihe nach die zu den Punkten $x_1, x_2, \dots, x_l, x_0$ gehörigen Färbungen f_1, f_2, \dots, f_l und f' . In f_i ($1 \leq i \leq l-1$) erhalten die Punkte x_0, x_1, \dots, x_l die Farben $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_l$, in f_l diejenigen von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, 0$ und in f' die Farben $0, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_l, \alpha_1$.

(1.7) *Es sei G k -kritisch ($k \geq 3$) und V ein solches Vieleck von G , das nur Nebenpunkte von G enthält. Gibt es dann in V einen Punkt x_0 mit der Eigenschaft, daß G keine aus x_0 ausgehende Diagonale von V enthält, so muß V ein ungerades Vieleck sein.*

Beweis. Es sei $V = (x_0 x_1 \dots x_l x_0)$ ($l \geq 2$) und A die Menge jener Nachbarpunkte von x_0 , die nicht zu V gehören, also die Menge sämtlicher Nachbarpunkte mit Ausnahme von x_1 und x_l . Ferner sei f eine zu x_0 gehörige Färbung von G . Wir zeigen erst, daß keine der Farben $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_l)$ in $f(A)$ enthalten ist. Für $f(x_0)$ ist das trivial, für $f(x_1)$ und $f(x_l)$ folgt dies aus (1.3). Im Falle $l > 2$ sei $f(x_i) = \alpha$ ($1 < i < l$). Durch $(i-1)$ -malige zyklische Permutation der Farben von x_1, \dots, x_l (in den übrigen Punkten werden dabei die Farben festgehalten) bekommt man eine solche Färbung f' von G , für die $f'(x_1) = \alpha$ besteht. Nach (1.6) ist f' eine zu x_0 gehörige Färbung von G , und so ist nach (1.3) $\alpha \notin f'(A) = f(A)$.

Andererseits folgt nach (1.3) aus unsern Annahmen, daß $f(A)$ genau $k-3$ Farben enthält. Die Farbe $f(x_0)$ kann in keinem von x_0 verschiedenen Punkt vorkommen. Es bleiben also für die Punkte x_1, \dots, x_l nur zwei Farben. Diese müssen in der Folge $f(x_1), \dots, f(x_l)$ abwechselnd auftreten. Nach (1.3) ist jedoch $f(x_1) \neq f(x_l)$, und so muß l gerade sein.

(1.7) ist mit der folgenden Aussage gleichwertig:

(1.8) *Ist G k -kritisch ($k \geq 3$) und V ein solches gerades Vieleck von G , das nur Nebenpunkte von G enthält, dann läuft aus jedem Punkt von V mindestens eine zu G gehörige Diagonale von V aus.*

Zum Beweis des Satzes (E.1) wird nur von der in (1.8) formulierter Eigenschaft der kritischen Graphen Gebrauch gemacht. Es genügt sogar weniger: Wir werden nur benützen, daß der Graph G von (1.8) *mindestens zwei Diagonalen* des Vielecks von (1.8) enthält. Es gilt nämlich folgender Satz:

(1.9) **Satz.** *Es enthalte der Graph G zusammen mit jedem geraden Vieleck auch mindestens zwei Diagonalen dieses Vielecks. Dann sind sämtliche Glieder von G vollständige Graphen und ungerade Vielecke.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß ein beliebiges mehrkantiges Glied von G ein vollständiger Graph oder ein ungerades Vieleck ist.

I) Wir zeigen zuerst, daß G zusammen mit einem geraden Vieleck auch sämtliche Diagonalen des Vielecks enthält. Nehmen wir das Gegenteil an, und bezeichne $V = (x_1, \dots, x_l x_1)$ ein kleinstes gerades Vieleck von G , dessen Diagonalen nicht alle zu G gehören. Da mindestens zwei Diagonalen von V in G enthalten sind, muß $l \geq 6$ sein. Nennen wir in diesem Beweis eine Diagonale xy von V gerade oder ungerade, je nachdem ob die durch x und y bestimmten Bogen von V beide gerade oder beide ungerade sind. (Da l gerade ist, ist jede Diagonale von V entweder gerade oder ungerade.)

a) Wir beweisen, daß G auch ungerade Diagonalen von V enthält. G enthält zwei Diagonalen von V . Wir dürfen annehmen, daß $x_1 x_j \in G$, $x_g x_h \in G$ ($1 < g < j < l$, $g + 1 < h$) besteht. Es seien diese beiden Diagonalen gerade (sonst gibt es nichts zu beweisen). Es ist also $j \equiv 1$ und $h \equiv g \pmod{2}$, und so besteht

$$(*) \quad g - 1 \equiv h - j \pmod{2}.$$

Ist $h \leq j$, dann ist wegen (*) $V' = (x_1 x_2 \dots x_g x_h \dots x_j x_1)$ ein gerades Vieleck von G . Dieses ist kleiner als V , und so enthält nach unserer Annahme G alle Diagonalen von V' . Es ist also $x_2 x_j \in G$ und $x_2 x_j$ ist eine ungerade Diagonale von V .

Ist $h > j$, so sind wegen (*) die zu G gehörigen Vielecke $V_1 = (x_1 x_2 \dots x_g x_h x_{h-1} \dots x_j x_1)$ und $V_2 = (x_1 x_j x_{j-1} \dots x_g x_h x_{h+1} \dots x_l x_1)$ beide gerade. Die Summe der Längen von V_1 und V_2 ist $l + 4$. Da $l > 4$ ist, muß der eine von V_1 und V_2 kleiner als V sein. Wir dürfen annehmen, daß V_1 kleiner als V ist. G enthält dann sämtliche Diagonalen von V_1 . Es gilt also $x_2 x_j \in G$ und $x_1 x_{j+1} \in G$. Wegen $l > 4$ ist jedoch der eine von $x_2 x_j$ und $x_1 x_{j+1}$ sicher eine Diagonale von V , und zwar eine ungerade Diagonale.

b) Es sei nun $x_1 x_j$ eine zu G gehörige ungerade Diagonale von V . Dann sind die in G liegenden Vielecke $V_1 = (x_1 x_2 \dots x_j x_1)$ und $V_2 = (x_1 x_j x_{j+1} \dots x_l x_1)$ beide gerade und beide kleiner als V . G enthält also alle Diagonalen von V_1 und V_2 . Es sei $x_g x_h (\neq x_1 x_j)$ eine solche Diagonale von V , die weder Diagonale von V_1 noch von V_2 ist. Wir können $1 < g < j < h \leq l$ annehmen. Nach den obigen liegt das Viereck $V_3 = (x_1 x_g x_j x_h x_1)$ in G , und so enthält G beide Diagonalen von V_3 . Es ist also $x_g x_h \in G$. G enthält daher sämtliche Diagonalen von V . Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung.

II) Es sei jetzt $V = (x_1 x_2 \dots x_l)$ ein ungerades Vieleck von G und nehmen wir an, daß G eine Diagonale von V enthält. Z. B. sei $x_1 x_j \in G$ ($1 < j < l$). Wir zeigen, daß dann G sämtliche Diagonalen von V enthält. Da V ungerade ist, muß das eine der zu G gehörigen Vielecke $V_1 = (x_1 x_2 \dots x_j x_1)$ und $V_2 =$

$= (x_1 x_j x_{j+1} \dots x_l x_1)$ gerade sein. Es sei z. B. V_1 gerade. Dann enthält nach I) G sämtliche Diagonalen von V_1 . Daher gehört das gerade Vieleck $V_3 = (x_1 x_{j-1} x_j x_{j+1} \dots x_l x_1)$ zu G , und so enthält G auch sämtliche Diagonalen von V_3 . Für eine solche Diagonale von V , die weder Diagonale von V_1 , noch von V_3 ist, kann man in der gleichen Weise wie in I) b) beweisen, daß sie zu G gehört. G enthält also tatsächlich alle Diagonalen von V .

III) Es sei jetzt G_1 ein mehrkantiges Glied von G und $V = (x_1 \dots x_l)$ ein größtes Vieleck von G_1 .

a) Nehmen wir erst an, daß G_1 sämtliche Diagonalen von V enthält. Wir beweisen dann, daß jeder Punkt von G_1 zu V gehört, woraus $G_1 = \langle l \rangle$ folgt ($\langle l \rangle$ = vollständiger l -Graph). Es sei nämlich x ein solcher Punkt von G , der nicht zu V gehört. G_1 enthält ein solches Vieleck V_1 , das den Punkt x und eine Kante aus V enthält. Es sei $V_1 = (xx'_1 x'_2 \dots x'_m x)$ und g der kleinste, h der größte Wert jener Indizes i ($1 \leq i \leq m$) für die $x'_i \in V$ besteht. Dann ist $1 \leq g < h \leq m$ und von dem Bogen $W' = (x'_g \dots x'_1 x x'_m \dots x'_h)$ liegen nur x'_g und x'_h auf V . Wir dürfen annehmen, daß $x'_g = x_1$ und $x'_h = x_j$ ($1 < j \leq l$) besteht. Nach unseren Annahmen gehört der Weg $W = (x_1 \dots x_{j-1} x_1 \dots x_j)$ zu G_1 , und dann gehört auch das Vieleck $W \cup W'$ zu G_1 . $W \cup W'$ ist jedoch größer als V . Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung.

b) Nehmen wir jetzt an, daß G_1 und damit auch G nicht alle Diagonalen von V enthält. Nach I) und II) ist dann V ungerade und G_1 enthält keine der Diagonalen von V . Wir beweisen daß in diesem Fall $G_1 = V$ ist. Es genügt dazu zu zeigen, daß jeder Punkt von G_1 zu V gehört. Es sei $x \in G_1$ und $x \notin V$. Ferner sollen x'_g, x'_h, W', x_j dieselbe Bedeutung haben, wie in a). Es gilt $j \neq 2$ und $j \neq l$. Sonst wäre das zu G_1 gehörige Vieleck $W' \cup (x_2 \dots x_l x_1)$ bzw. $W' \cup (x_1 \dots x_l)$ größer als V . $x_1 x_j$ ist also eine Diagonale von V und es besteht daher $x_1 x_j \notin G_1$. Bezeichnen ferner W_1 und W_2 die durch x_1 und x_j bestimmten Bogen von V , so bildet (da V ungerade ist) W' entweder mit W_1 oder mit W_2 ein gerades Vieleck von G_1 . $x_1 x_j$ ist Diagonale dieses Vielecks, und daher gehört nach I) $x_1 x_j$ zu G , und damit auch zu G_1 . Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung. Damit haben wir den Beweis von Satz (1.9) beendet.

(1.10) Der Satz (E.1) der Einleitung ist nun eine unmittelbare Folge von (1.8) und (1.9). Man kann sogar mit Hilfe unseres Beweisverfahren zu einem schärferen Satz gelangen. Man kann nämlich bei jedem beliebigen (nicht unbedingt kritischen) Graphen von Neben- und Hauptpunkten sprechen: Der Punkt x des Graphen G heißt ein *kritischer Punkt* von G , wenn $\kappa(G-x) < \kappa(G)$ gilt. Ist $\kappa(G) = k$ und x ein kritischer Punkt von G , so gilt $\varrho(x) \geq k-1$. Der kritische Punkt x des k -chromatischen Graphen G heißt ein *Nebenpunkt* oder ein *Hauptpunkt* je nach dem ob $\varrho(x) = k-1$ oder $\varrho(x) > k-1$ besteht. Offensichtlich gibt es zu jedem kritischen Punkt x von G eine zu x gehörige Färbung von G (s. (1.2)) und man sieht, daß die Behauptungen (1.3), (1.4), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), und demzufolge auch der Satz (E.1), auch dann richtig bleiben, wenn man in diesen statt k -kritische Graphen beliebige k -chromatische Graphen nimmt.

2. Der Beweis des Satzes (E.2)

Verfahren, die aus kritischen Graphen kritische Graphen ergeben

Wir wollen uns zuerst mit der Herstellung k -kritischen Graphen ohne Nebenpunkte beschäftigen. Haben wir einen 4-kritischen Graphen ohne

Nebenpunkte, so kann man auf Grund des folgenden einfachen Satzes⁹ für jedes beliebige $k > 4$ leicht einen k -kritischen Graphen ohne Nebenpunkte angeben.

(2.1) Ist G_1 k_1 -kritisch, G_2 k_2 -kritisch und $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, so ist derjenige Graph, der aus $G_1 \cup G_2$ dadurch entsteht, daß man sämtliche Punkte von G_1 , mit sämtlichen Punkten von G_2 verbindet, $(k_1 + k_2)$ -kritisch.

Wählt man nämlich für G_1 den oben erwähnten 4-kritischen Graphen (dieser muß mehr als 4 Punkte enthalten), für G_2 einen $\langle k - 4 \rangle$ (d. h. einen vollständigen $(k - 4)$ -Graphen), so ergibt die Konstruktion von (2.1) einen k -kritischen Graphen mit lauter Hauptpunkten.

Wegen späteren Anwendungen soll hier auch derjenige 4-kritische Graph erwähnt werden, der durch das Verfahren (2.1) aus einem ungeraden Kreis (3-kritischer Graph) und aus einem einpunktigen Graph zustande kommt (s. [6]). Wir wollen diesen ein *ungerades Rad* nennen.

(2.2) Gleichfalls wegen späteren Anwendungen formulieren wir hier auch zwei triviale Umkehrungen von (2.1) und führen eine neue Benennung ein.

Ist G ein kritischer Graph, und besitzt $\mathcal{P}(G)$ eine solche Zerlegung in zwei nichtleere Teilmengen A_1 und A_2 , daß A_1 und A_2 in G vollständig verbunden sind, so sind $[A_1]$ und $[A_2]$ kritische Graphen und es gilt $\kappa([A_1]) + \kappa([A_2]) = \kappa(G)$.

Ist G ein kritischer Graph und gibt es eine solche Zerlegung von $\mathcal{P}(G)$ in zwei nichtleere Teilmengen A_1 und A_2 , daß $[A_1]$ und $[A_2]$ beide kritisch sind und $\kappa([A_1]) + \kappa([A_2]) = \kappa(G)$ besteht, so sind A_1 und A_2 in G vollständig verbunden.

Es sei bemerkt, daß die beiden Umkehrungen zusammen mit (2.1) ihre Gültigkeit auch dann erhalten, wenn man in diesen überall statt kritischen Graphen punktkritische Graphen nimmt.

Wir nennen einen kritischen (punktkritischen) Graphen G zerlegbar, wenn eine solche Zerlegung von $\mathcal{P}(G)$ in zwei nichtleere Teilmengen A_1 und A_2 existiert, daß A_1 und A_2 in G vollständig verbunden sind.

(2.3) Wir wollen jetzt solche 4-kritischen Graphen angeben, in denen jeder Punkt den Grad 4 hat. Es seien p und q ($p \geq 4$, $q \geq 3$) natürlich Zahlen und q sei ungerade: $q = 2q' + 1$. Betrachte man die Gitterpunkte

$$a_{ij} = (i, j) \quad (i = 0, 1, \dots, p; j = 0, 1, \dots, q)$$

der Ebene und die Strecken

$$a_{ij}a_{i'j'} \text{ mit } |i' - i| + |j' - j| = 1 \\ (i, i' = 0, 1, \dots, p; j, j' = 0, 1, \dots, q).$$

Diese Strecken zerlegen das Rechteck $Q = a_{00}a_{p0}a_{pq}a_{0q}$ in die Quadrate $Q_{ij} = a_{ij}a_{i+1,j}a_{i+1,j+1}a_{i,j+1}$ ($i = 0, 1, \dots, p-1; j = 0, 1, \dots, q-1$). Durch die Identifizierung der gegenüberliegenden Seiten stelle man aus Q einen Klein'schen Schlauch S her. Die Identifizierung soll in solcher Weise durchgeführt werden, daß a_{i0} mit a_{iq} ($i = 0, 1, \dots, p$) und a_{0j} mit $a_{p,q-j}$ ($j = 0, 1, \dots, q$) zusammenfalle.

⁹ Wir haben die Behauptung (2.1) von G. A. DIRAC kennengelernt. Die triviale Verifizierung von dieser wollen wir übergehen.

Es sei nun G derjenige Graph, dessen Knotenpunkte bzw. Kanten die in S vorkommenden Punkte a_{ij} bzw. „Strecken“ $a_{ij}a_{i'j'}$ ($|i'-i|+|j'-j|=1$) sind. Dann enthält G genau pq Knotenpunkte und jeder Knotenpunkt hat den Grad 4.

Wir beweisen zuerst, daß $\kappa(G) \geq 4$ ist. Nehmen wir das Gegenteil an, und es sei f eine 3-Färbung von G . Die in f vorkommenden Farben sollen mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bezeichnet werden. Betrachte man den eindimensionalen simplizialen Komplex

$$F = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_2\alpha_3\}$$

sowie jenen eindimensionalen simplizialen Komplex K , der aus den Knotenpunkten a_{ij} und aus den „gerichteten“ Kanten $a_{ij}a_{i'j'} = -a_{i'j'}a_{ij}$ von G besteht. Bilde man nachher die eindimensionalen Ketten

$$R_{ij} = a_{ij}a_{i+1,j} + a_{i+1,j}a_{i+1,j+1} + a_{i+1,j+1}a_{i,j+1} + a_{i,j+1}a_{ij}$$

(R_{ij} ist der „Rand“ von Q_{ij}) sowie die Kette

$$R = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} R_{ij}.$$

Offensichtlich gilt dann

$$(1) \quad R = -2 \sum_{j=0}^{q-1} a_{0j}a_{0,j+1}.$$

Wir wollen nun die Färbung f als eine simpliziale Abbildung von K in F auffassen. Es soll dann \hat{f} die durch f induzierte Abbildung der Ketten von K in den Ketten von F bezeichnen. Da man in jeder 3-Färbung eines Vierecks zwei solche nicht benachbarte Knotenpunkte finden kann, die die gleiche Farbe besitzen, gilt für jedes R_{ij} ($i = 0, 1, \dots, p-1; j = 0, 1, \dots, q-1$) $\hat{f}(R_{ij}) = 0$. In der Tat, ist z. B. $\hat{f}(a_{ij}) = \hat{f}(a_{i+1,j+1}) = \alpha_g$ ($1 \leq g \leq 3$), so ist mit $\hat{f}(a_{i+1,j}) = \alpha_h$ und $\hat{f}(a_{i,j+1}) = \alpha_{h'}$ ($1 \leq h \leq 3, 1 \leq h' \leq 3$)

$$\hat{f}(R_{ij}) = \alpha_g\alpha_h + \alpha_h\alpha_g + \alpha_g\alpha_{h'} + \alpha_{h'}\alpha_g = 0.$$

Daraus folgt

$$\hat{f}(R) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} \hat{f}(R_{ij}) = 0.$$

Andererseits ist nach (1), wenn wir $\hat{f}(a_{0j}) = \alpha_{i_j}$ ($1 \leq i_j \leq 3$) setzen

$$(2) \quad \hat{f}(R) = -2 \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_{i_j} \alpha_{i_{j+1}}.$$

Die auf der rechten Seite von (2) stehende Kette kann jedoch nicht gleich 0 sein, da wegen der Zulässigkeit von f $\alpha_{i_j} \neq \alpha_{i_{j+1}}$ und daher $\alpha_{i_j} \alpha_{i_{j+1}} \neq 0$ ($j = 0, 1, \dots, q-1$) gilt und q eine ungerade Zahl ist. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung $\kappa(G) \geq 4$.

Um zu beweisen, daß G 4-kritisch ist zeigen wir, daß die Weglassung einer jeden Kante von G einen 3-färbbaren Graphen ergibt (s. (2.6)). Wegen Symmetriegründen genügt es nur die Weglassung folgender Kanten zu untersuchen:

$$\begin{aligned} 1) & a_{1i} a_{2i} \quad (i = 0, 1, \dots, q'), \\ 2) & a_{2j} a_{2,j+1} \quad (j = 0, 1, \dots, q'). \end{aligned} \quad (q = 2q' + 1)$$

Wir wollen hier nur jenen Fall behandeln, wo p gerade ist: $p = 2p'$. (Im Falle wo p ungerade ist, kann man ähnlich schließen.)

Bezeichne G' jenen Graphen, der aus G durch die Weglassung einer der erwähnten Kanten zustandekommt. Die 3-Färbbarkeit von G' werden wir folgendermaßen beweisen: Wir geben eine solche Menge A von Knotenpunkten aus G' an, daß je zwei Knotenpunkte von A in G' nicht verbunden sind, und von der man (durch eine Skizze) einfach einsehen kann, daß der Graph $G' - A$ 2-färbbar ist. (Um die Schreibweise zu vereinfachen geben wir die Punkte a_{ij} in der Form (i, j) an.)

1) Die weggelassene Kante ist $a_{1i} a_{2i}$ ($0 \leq i \leq q'$).

Ist $i = 2i'$, so besteht A aus den Punkten:

$$\begin{aligned} (2, 2\alpha - 1), \quad (1, 2\alpha) \quad (\alpha = i' + 1, \dots, q'), \\ (2\beta - 1, 2q'), \quad (2\beta, 2q' + 1) \quad (\beta = 2, \dots, p') \end{aligned}$$

und im Falle $i' > 0$ außer diesen noch aus den Punkten

$$(2, 2\gamma), \quad (1, 2\gamma + 1) \quad (\gamma = 0, \dots, i' - 1).$$

Ist $i = 2i' - 1$, so besteht A aus den Punkten

$$\begin{aligned} (1, 2\alpha), \quad (2, 2\alpha + 1) \quad (\alpha = i', \dots, q'), \\ (2\beta - 1, 2q'), \quad (2\beta, 2q' + 1) \quad (\beta = 2, \dots, p') \end{aligned}$$

und im Falle $i' > 1$ außer diesen noch aus den Punkten

$$(1, 2\gamma - 1), \quad (2, 2\gamma) \quad (\gamma = 1, \dots, i' - 1).$$

2) Die weggelassene Kante ist $a_{2j} a_{2,j+1}$ ($0 \leq j \leq q'$).

Ist $j = 2j'$, so besteht A aus den Punkten

$$\begin{aligned} (2, 2j' + 1) \\ (1, 2\alpha), \quad (2, 2\alpha + 1) \quad (\alpha = j' + 1, \dots, q'), \\ (2\beta - 1, 2q'), \quad (2\beta, 2q' + 1) \quad (\beta = 2, \dots, p') \end{aligned}$$

und im Falle $j' > 0$ außer diesen noch aus den Punkten

$$(1, 2\gamma - 1), \quad (2, 2\gamma) \quad (\gamma = 1, \dots, j').$$

Ist $j = 2j' - 1$, so besteht A aus den Punkten

$$\begin{aligned} (0, 0), (1, 1) \\ (3, 2\alpha), \quad (2, 2\alpha + 1) \quad (\alpha = j', \dots, q'), \\ (2\beta, 2q' + 1), \quad (2\beta + 1, 2q') \quad (\beta = 1, \dots, p' - 1) \end{aligned}$$

und im Falle $j' > 1$ außer diesen noch aus den Punkten

$$(2, 2\gamma), \quad (1, 2\gamma + 1) \quad (\gamma = 1, \dots, j' - 1).$$

Damit haben wir im Falle $p = 2p'$ bewiesen, daß G ein 4-kritischer Graph ist.

(2.4) Wir wollen im Falle $p = 2q'$ noch eine interessante Eigenschaft des oben definierten Graphen G zeigen. Wir beweisen nämlich, daß die kleinsten ungeraden Kreise von G die Länge $2q' + 1$ besitzen. Betrachte man die Punktmenge

$$B = \{(0, q'), (1, q'), \dots, (2q' - 1, q'), (2q', q')\}.$$

Man kann dann den Graphen $G-B$ mit zwei Farben zulässig färben, woraus folgt, daß jeder ungerade Kreis von G einen B -Punkt enthalten muß. Es ist ferner $[B]$ ein Kreis mit der Länge $2q' + 1$. Man setze

$$C = \{(0, 0), (1, 0), \dots, (2q' - 1, 0)\}$$

und

$$D_i = \{(i, 0), (i, 1), \dots, (i, 2q')\} \quad (i = 0, 1, \dots, 2q' - 1).$$

Es sei nun V ein beliebiger ungerader Kreis von G . Enthält V Punkte aus C so muß $v(V) \geq 2q' + 1$ sein, da der „Abstand“ zwischen einem C - und einem B -Punkt mindestens q' ist. Enthält andererseits V für jedes i ($i = 0, 1, \dots, 2q' - 1$) einen D_i -Punkt, so ist offensichtlich $v(V) \geq 2q' + 1$. Nehmen wir nun an, daß V keinen C -Punkt enthält und daß ein i_0 ($0 \leq i_0 \leq 2q' - 1$) gibt für das V keinen D_{i_0} -Punkt enthält. Wir dürfen $i_0 = 0$ annehmen. Dies führt jedoch zum Widerspruch, da man den Graphen $G-(C \cup D_0)$ offensichtlich mit zwei Farben zulässig färben kann. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Für den betrachteten Graphen G ist

$$\pi(G) = 2q'(2q' + 1) < (2q' + 1)^2,$$

und so haben wir für unendlich viele n solche n -punktigen 4-kritischen Graphen konstruiert, in denen die Längen der ungeraden Kreise größer als \sqrt{n} sind.

(2.5) Die kleinsten Werte von p und q , mit welchen die Konstruktion von (2.3) einen 4-kritischen Graphen ergibt, sind $p = 4$ und $q = 3$. Wegen späteren Anwendungen wollen wir den zu diesen Werten gehörigen Graphen einen $\Gamma_{(4)}$ -Graphen nennen. Ferner wollen wir einen solchen k -kritischen ($k > 4$) Graphen, der aus einem $\Gamma_{(4)}$ -Graphen und aus einem $\langle k-4 \rangle$ durch das Verfahren (2.1) entsteht, einen $\Gamma_{(k)}$ -Graphen nennen.

(2.6) Wir wollen einige bekannte einfache Tatsachen über kritische Graphen erwähnen.

Jeder kritische Graph ist zusammenhängend und enthält keinen trennenden Punkt (s. [2]).

Ist G k -kritisch und $xy \in G$, so gilt $\kappa(G-xy) = k-1$ und für jede $(k-1)$ -Färbung f von $G-xy$ besteht $f(x) = f(y)$.

Wollen wir beweisen, daß ein Graph G , der keine isolierten Punkte enthält (also z. B. ein zusammenhängender Graph) kritisch ist, so genügt es zu zeigen, daß er *kantenkritisch* ist, d. h. daß für jedes $xy \in G$ $\kappa(G-xy) < \kappa(G)$ besteht.

Wir führen zwei neue Begriffe, nämlich diejenigen der Vereinigung und Zerspaltung von Punkten, ein.

Es sei G ein Graph, $x_1, x_2 \in G$, $x_1 x_2 \notin G$ und bezeichne A_i die Menge der Nachbarpunkte von x_i in G ($i = 1, 2$).

Nimmt man dann zu dem Graphen $G - \{x_1, x_2\}$ einen neuen Punkt x hinzu, und verbindet man x mit sämtlichen Punkten von $A_1 \cup A_2$, so entsteht ein neuer Graph, von dem wir sagen wollen, daß er aus G durch die *Vereinigung der Punkte* x_1 und x_2 zustande gekommen ist. Der Punkt x heißt die *Vereinigung der Punkte* x_1 und x_2 .

Umgekehrt, sei G ein Graph, $y \in G$, $\varrho(y) \geq 2$ und bezeichne B die Menge der Nachbarpunkte von y in G . Zerlegt man in irgendeiner Weise B in die zwei nichtleeren Teilmengen B_1 und B_2 , nimmt man zu dem Graphen $G - y$ zwei neue Punkte y_1 und y_2 hinzu und verbindet man y_i mit jedem Punkt von B_i ($i = 1, 2$), so entsteht ein neuer Graph, von dem wir sagen wollen, daß er aus G durch die *Zerspaltung des Punktes* y in die Punkte y_1 und y_2 zustande gekommen ist.

Es gilt nun der folgende Satz von DIRAC (s. [4] und das Theorem 1 der Arbeit „On the structure of 5- and 6-chromatic abstract graphs“ (erscheint in *Journal f. reine u. angew. Math.*)):

(2.7) (DIRAC) a) Es sei G ein k -kritischer ($k \geq 3$) Graph und $\{a, b\}$ ein trennendes Punktpaar von G . Dann ist $ab \notin G$ und $G - \{a, b\}$ besteht aus genau zwei Komponenten. Bezeichne man diese Komponenten mit $[C_1]$ und $[C_2]$ ($C_i \cup \mathcal{F}(G)$, $i = 1, 2$) und setze $G_i = [C_i \cup \{a, b\}]$ ($i = 1, 2$). Dann sind G_1 und G_2 beide $(k-1)$ -färbbar und man bekommt aus dem einen (und nur aus einem) dieser Graphen durch die Hinzunahme der Kante ab , aus dem anderen (und nur aus diesem) durch die Vereinigung der Punkte a und b einen k -kritischen Graphen.

b) Es seien G' und G'' zwei fremde k -kritische ($k \geq 3$) Graphen, $ab \in G'$, $G_1 = G' - ab$, $c \in G''$ und G_2 derjenige Graph, der aus G'' durch die Zerspaltung des Punktes c in die Punkte c_1 und c_2 zustande kommt ($c_1, c_2 \notin G'$). Ist dann G_2 $(k-1)$ -färbbar, so wird jener Graph G , der aus $G_1 \cup G_2$ dadurch entsteht, daß man die Punkte a und c_1 vereinigt und b mit c_2 verbindet, k -kritisch.

Bemerkungen. 1) Bisher ist kein vollständiger Beweis von (2.7) erschienen. Wir haben deshalb für nötig gehalten einen solchen Beweis mitzuteilen (bezüglich des ersten Absatzes des Beweises s. [4]).

2) Wegen $k \geq 3$ ist $\varrho_{G''}(c) \geq 2$. Die Zerspaltung von c kann also tatsächlich durchgeführt werden.

3) Der Teil a) des Satzes bleibt auch dann richtig, wenn man statt kritische Graphen punktkritische Graphen nimmt. Für den Teil b) gilt jedoch die gleiche Aussage nur dann, wenn man auch die $(k-1)$ -Färbbarkeit von G_1 voraussetzt.

Beweis. a) Bezeichnen wir mit $[C_i]$ ($i = 1, \dots, l$; $l \geq 2$) die Komponenten von $G - \{a, b\}$ und es sei $G_i = [C_i \cup \{a, b\}]$ ($i = 1, \dots, l$). Da G kritisch ist, sind die Graphen G_i ($i = 1, \dots, l$) $(k-1)$ -färbbar. Betrachte man eine $(k-1)$ -Färbung ($k-1 \geq 2$) eines Graphen G_i ($1 \leq i \leq l$). Enthalten in dieser die Punkte a und b verschiedene (gleiche) Farben, so gibt es ein $j \neq i$ ($1 \leq j \leq l$) mit der Eigenschaft, daß in jeder $(k-1)$ -Färbung von G_j a und b gleiche (verschiedene) Farben bekommen; sonst wäre nämlich G $(k-1)$ -färbbar. Daraus ausgehend ergeben sich nacheinander die folgenden Behauptungen:

Es existieren unter den Graphen G_i ($i = 1, \dots, l$) zwei solche, sagen wir G_1 und G_2 , daß in jeder $(k-1)$ -Färbung von G_1 (bzw. G_2) a und b die gleiche (bzw. verschiedene) Farben erhalten; es gilt $l = 2$ und $ab \notin G$; G_1 und G_2 sind zusammenhängend; $G' = G_1 \cup (ab)$ und derjenige Graph G'' , der aus G_2 durch die Vereinigung der Punkte a und b entsteht, sind k -chromatisch. (Die Rollen von G_1 und G_2 können nicht vertauscht werden!)

Da G_1 und G_2 zusammenhängend sind, gilt das gleiche auch für G' und G'' . Um zu beweisen, daß G' und G'' kritisch sind, genügt es daher zu zeigen, daß sie kantenkritisch sind.

$G' - ab$ ist $(k-1)$ -färbbar. Es sei nun $xy \in G'$, $xy \neq ab$. Dann ist $xy \in G_1 \subset G$. Da G kritisch ist, gibt es eine $(k-1)$ -Färbung f von $G - xy$. Dann muß wegen G_2 $f(a) \neq f(b)$ bestehen, und so ergibt f auch eine $(k-1)$ -Färbung von $G' - xy$. Es ist also G' tatsächlich kritisch.

Bezeichne c in G'' die Vereinigung von a und b und es sei $xy \in G''$. Wir können $y \neq c$ annehmen. Wir definieren den Punkt \tilde{x} folgendermaßen: Ist $x \neq c$, so sei $\tilde{x} = x$. Ist $x = c$, so ist in G_2 mindestens das eine von a und b , sagen wir a , mit y verbunden. Es sei dann $\tilde{x} = a$. In beiden Fällen gilt $\tilde{x}y \in G_2 \subset G$. Da G kritisch ist, gibt es eine $(k-1)$ -Färbung f von $G - \tilde{x}y$. Wegen G_1 muß $f(a) = f(b)$ bestehen. Daher ergibt f auch für $G'' - xy$ eine $(k-1)$ -Färbung. Es ist also auch G'' kritisch.

b) Es gibt in G' und G'' keinen trennenden Punkt. Daher sind G_1 , G_2 und G zusammenhängend. Da G' k -kritisch ist, ist G_1 $(k-1)$ -färbbar, und in jeder $(k-1)$ -Färbung von G_1 enthalten a und b die gleiche Farbe. G_2 ist zufolge unseren Voraussetzungen $(k-1)$ -färbbar, und da G'' k -chromatisch ist, erhalten a und b in jeder $(k-1)$ -Färbung von G_2 verschiedene Farben. Daraus folgt, daß G nicht $(k-1)$ -färbbar sein kann. Um zu beweisen, daß G k -kritisch ist, genügt es noch zu zeigen, daß die Weglassung einer jeden Kante von G einen $(k-1)$ -färbbaren Graphen ergibt.

Ist $xy \in G$, so gilt entweder $xy \in G_1$ oder $xy \in G_2$. Es sei erst $xy \in G_1$. Da G' kritisch ist, gibt es eine $(k-1)$ -Färbung f_1 von $G' - xy$. Es sei ferner f_2 eine $(k-1)$ -Färbung von G_2 . Dann besteht $f_1(a) \neq f_1(b)$ und $f_2(c_1) \neq f_2(c_2)$. Wir können annehmen, daß in f_1 und f_2 dieselben Farben vorkommen, und daß $f_1(a) = f_2(c_1)$ und $f_1(b) = f_2(c_2)$ besteht. Dann geben jedoch f_1 und f_2 zusammen eine $(k-1)$ -Färbung von $G - xy$.

Es sei jetzt $xy \in G_2$. Man kann annehmen, daß $y \neq c_1$, $y \neq c_2$ gilt. Wir definieren den Punkt \tilde{x} folgendermaßen: Ist x von c_1 und c_2 verschieden, so sei $\tilde{x} = x$. Fällt x mit einem der Punkte c_1 und c_2 zusammen, so sei $\tilde{x} = c$. In beiden Fällen gilt $\tilde{x}c \in G''$. Da G'' kritisch ist, gibt es eine $(k-1)$ -Färbung f'' von $G'' - \tilde{x}y$. Diese ergibt eine solche $(k-1)$ -Färbung von $G_2 - xy$, in der $f_2(c_1) = f_2(c_2)$ gilt. Betrachte man noch eine $(k-1)$ -Färbung f_1 von G_1 . Es besteht $f_1(a) = f_1(b)$. Wir dürfen annehmen, daß in f_1 und f_2 die gleichen Farben vorkommen, und daß $f_1(a) = f_2(c_1)$ ist. Dann ergeben jedoch f_1 und f_2 zusammen eine $(k-1)$ -Färbung von $G - xy$. Damit haben wir den Beweis des Satzes (2.7) beendet.

(2.8) Der Teil b) von (2.7) gibt die Möglichkeit, aus k -kritischen Graphen k -kritische Graphen zu konstruieren. Das Verfahren kann man auch in der folgenden Weise formulieren:

Es seien G' und G'' fremde k -kritische ($k \geq 3$) Graphen. Wähle man in G' eine Kante ab , in G'' einen Punkt c , und zerlege man die Menge der Nachbarn von c (es ist $\rho_{G''}(c) \geq 2$) in zwei nichtleere Mengen A und B . Lasse

man ferner aus G' die Kante ab , aus G'' sämtliche cB -Kanten weg, identifiziere man die Punkte a und c und verbinde b mit sämtlichen B -Punkten. Der so entstehende Graph G ist k -kritisch, vorausgesetzt, daß derjenige Teilgraph G_2 von G , der durch die Punkte von $G'' - c$ und a und b gespannt ist, $(k - 1)$ -färbbar ist.

Besondere Bedeutung hat der Fall, in dem $\mathcal{N}(B) \leq k - 2$ besteht. Dann ist nämlich G_2 ohne jeder Voraussetzung stets $(k - 1)$ -färbbar.

(Da $G_2 - b \subset G''$ ist, existiert eine $(k - 1)$ -Färbung f von $G_2 - b$. Falls $\mathcal{N}(B) \leq k - 2$ besteht, enthält $f(B)$ höchstens $k - 2$ Farben, und so kann man f stets zu einer $(k - 1)$ -Färbung von G_2 erweitern.)

Im Falle $\mathcal{N}(B) = 1$ (wegen $k \geq 3$ ist dann immer $\mathcal{N}(B) \leq k - 2$) wird die Konstruktion bezüglich G' und G'' symmetrisch. Wegen ihrer Wichtigkeit wollen wir in diesem Falle die Konstruktion mit geänderten, der Symmetrie entsprechenden Bezeichnungen noch einmal darstellen:

(2.9) *Es seien G' und G'' fremde k -kritische ($k \geq 3$) Graphen. Läßt man aus G' die (beliebige) Kante $a'b'$, aus G'' die (beliebige) Kante $a''b''$ weg, identifiziert man a' und a'' und verbindet b' mit b'' , so entsteht ein k -kritischer Graph G .*

Die in (2.9) beschriebene Konstruktion wurde erst von HAJÓS zur Herstellung sämtlicher nicht $(k - 1)$ -färbbaren Graphen verwendet (s. [9], [14]).¹⁰ Wegen späterer Anwendungen soll hier noch die folgende Eigenschaft der Konstruktion hervorgehoben werden:

Der Grad eines jeden Punktes, mit Ausnahme desjenigen, der durch die Identifizierung von a' und a'' entsteht, (dieser Punkt soll mit a bezeichnet werden) bleibt unverändert. Ist $k \geq 4$, so ist $\varrho(a) \geq 2(k - 2) \geq k$.

Hajós hat auch ein allgemeineres Verfahren zur Konstruktion nicht $(k - 1)$ -färbbarer Graphen ersonnen. (Mündliche Mitteilung.) Dies enthält als Spezialfall auch das aus Satz (2.7) sich ergebende Verfahren. Es lautet folgendermaßen:

(2.10) *Es seien G_1 und G_2 fremde, nicht $(k - 1)$ -färbbare ($k \geq 3$) Graphen. Man wähle in G_i ($i = 1, 2$) einen Punkt a_i , zerlege die Menge der Nachbarnpunkte von a_i in G_i in zwei nichtleere Mengen B_i und B'_i , und lasse sämtliche $a_i B_i$ -Kanten von G_i weg. Ferner identifiziere man die Punkte a_1 und a_2 und verbinde sämtliche B_1 -Punkte mit sämtlichen B_2 -Punkten. Dann ist der zustande gekommene Graph nicht $(k - 1)$ -färbbar.*

Man kann dieses Verfahren auch zur Herstellung kritischer Graphen benutzen. Es gilt nämlich die folgende Behauptung:

(2.11) *Sind G_1 und G_2 k -kritische Graphen ($k \geq 3$), dann ist auch der nach dem obenstehenden Verfahren konstruierte Graph k -kritisch, vorausgesetzt, daß $\mathcal{N}(B_1) + \mathcal{N}(B_2) \leq k - 1$ besteht.*

Statt (2.11) beweisen wir folgenden allgemeineren Satz:

¹⁰ Das HAJÓS'sche Verfahren war zur Konstruktion spezielle kritische Graphen schon von DIRAC benutzt worden (s. [5], [8]).

(2.12) **Satz.** Es sei $k \geq 3$, $p \geq 1$, $p' \geq 0$ und es seien G_i ($i = 1, \dots, p+1$) paarweise fremde k -kritische Graphen. Man zerlege die Menge der Punkte von G_i ($i = 1, \dots, p+1$) so in die (paarweisen fremden) Mengen $\tilde{A}_i = \{a_{i1}, \dots, a_{i,p+p'}\}$, B_i , C_i , daß $\mathcal{N}(B_i) > 0$ und

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{p+1} \mathcal{N}(B_i) \leq k - (p + p')$$

bestehen, $[\tilde{A}_i]_{G_i}$ vollständig ist und \tilde{A}_i mit B_i in G_i vollständig verbunden ist. Setze man $A_i = \{a_{i1}, \dots, a_{ip}\}$, $A'_i = \tilde{A}_i - A_i$, lasse sämtliche $A_i B_i$ -Kanten aus G_i weg ($i = 1, \dots, p+1$) und nachher identifiziere die Punkte $a_{1j}, \dots, a_{p+1,j}$ miteinander ($j = 1, \dots, p+p'$). Ferner verbinde man jeden B_i -Punkt mit jedem B_j -Punkt ($i \neq j$, $i, j = 1, \dots, p+1$). Dann ist der entstehende Graph G k -kritisch.

Bemerkungen. 1) Aus den Voraussetzungen folgt, daß für jedes i ($i = 1, \dots, p+1$) $\mathcal{N}(B_i \cup \tilde{A}_i) \leq k - 1$ besteht. Es kann daher C_i nicht leer sein ($i = 1, \dots, p+1$).

2) Die Behauptung von (2.12) bleibt auch dann richtig, wenn man zuläßt, daß gewisse $A'_i B_i$ -Kanten in G_i nicht vorhanden sind ($i = 1, \dots, p+1$). Wir wollen jedoch die diesbezügliche Verschärfung von (2.12) hier nicht genau formulieren.

Beweis. Bezeichne a_j ($j = 1, \dots, p+p'$) jenen Punkt, der durch die Identifizierung der Punkte $a_{1j}, \dots, a_{p+1,j}$ entsteht und es sei.

$$\tilde{A} = \{a_1, \dots, a_{p+p'}\}, \quad A = \{a_1, \dots, a_p\}, \quad A' = \tilde{A} - A.$$

I) Zuerst beweisen wir, daß G nicht $(k-1)$ -färbbar ist. Nehmen wir den Gegenteil an, und bezeichne f eine $(k-1)$ -Färbung von G . Da $f(B_i) \cap f(B_j) = \emptyset$ ($i \neq j$; $i, j = 1, \dots, p+1$) besteht, gibt es ein h ($1 \leq h \leq p+1$) mit $f(B_h) \cap f(A) = \emptyset$. Dann bilden jedoch jene Farben, die durch f zu den Punkten von G_h zugeordnet sind, eine $(k-1)$ -Färbung von G_h . Dies widerspricht der Annahme, daß G_h k -kritisch ist.

II) Wir zeigen, daß für jedes $xy \in G$ der Graph $G - xy$ $(k-1)$ -färbbar ist.

a) Es sei zuerst xy eine solche Kante von G , die zu einem G_i , z. B. zu G_{p+1} gehört, jedoch nicht in $[\tilde{A}]$ enthalten ist. Es bezeichne b_i einen beliebigen Punkt von B_i ($i = 1, \dots, p$). Den Punkt b_{p+1} definieren wir nur in jenem Falle, wenn xy eine $A'_{p+1} B_{p+1}$ -Kante ist. b_{p+1} sei dann der zu B_{p+1} gehörige Endpunkt von xy . Wir dürfen in diesem Falle annehmen, daß $a_{p+1,p+1}$ der zu A'_{p+1} gehörige Endpunkt von xy ist. Nun bezeichne f_i eine $(k-1)$ -Färbung von $G - a_i b_i$ ($i = 1, \dots, p$) und f_{p+1} eine $(k-1)$ -Färbung von $G_{p+1} - xy$. Wir nehmen an, daß in den f_i ($i = 1, \dots, p+1$) dieselben $k-1$ Farben vorkommen. Es gelten dann folgende Behauptungen:

1) Sämtliche Punkte von \tilde{A}_i enthalten in f_i verschiedene Farben ($i = 1, \dots, p+p'$).

2) Es gilt $f_i(b_i) = f_i(a_{ii})$ und $f_i(B_i - \{b_i\}) \cap f_i(\tilde{A}_i) = \emptyset$ ($i = 1, \dots, p$).

3) Es ist $f_{p+1}(b_{p+1}) = f_{p+1}(a_{p+1,p+1})$ und $f_{p+1}(B_{p+1} - \{b_{p+1}\}) \cap f_{p+1}(\tilde{A}_{p+1}) = \emptyset$, falls xy eine $A'_{p+1} B_{p+1}$ -Kante ist, und $f_{p+1}(B_{p+1}) \cap f_{p+1}(\tilde{A}_{p+1}) = \emptyset$, falls xy keine $A'_{p+1} B_{p+1}$ -Kante ist.

Da man die Farben einer jeder Färbung f_i beliebig permutieren kann, dürfen wir

$$(2) \quad f_i(a_{ij}) = f_{p+1}(a_{p+1,j}) \quad (i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, p + p')$$

annehmen. Nach (1) ist

$$\sum_{i=1}^p \mathcal{N}(B_i - \{b_i\}) + \mathcal{N}(B_{p+1}) \leq k - 1 - (p + p'),$$

und so kann man ebenfalls wegen der Permutierbarkeit der Farben annehmen, daß je zwei der Farbenmengen $f_i(B_i - \{b_i\})$ ($i = 1, \dots, p$) und $f_{p+1}(B_{p+1} - \{b_{p+1}\})$ bzw. $f_{p+1}(B_{p+1})$ einen leeren Durchschnitt besitzen. Wegen (2) ergeben die Färbungen f_i ($i = 1, \dots, p + 1$) zusammen eine Färbung f von $G - xy$, und nach unseren Annahmen und Behauptungen ist f eine $(k - 1)$ -Färbung von G .

b) Es sei $xy \in [\tilde{A}]$. Dann besteht auch $xy \in [A_i]_{G_i}$ ($i = 1, \dots, p + 1$). Bezeichne f_i eine $(k - 1)$ -Färbung von $G_i - xy$ ($i = 1, \dots, p + 1$). Es gilt $f_i(x) = f_i(y)$ ($i = 1, \dots, p + 1$). Wir dürfen annehmen, daß die Färbungen f_i ($i = 1, \dots, p + 1$) dieselben $k - 1$ Farben enthalten und daß $f_i(a_{ij}) = f_{p+1}(a_{p+1,j})$ ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, p + p'$) besteht. $f_{p+1}(\tilde{A}_{p+1})$ enthält genau $p + p' - 1$ Farben und es ist $f_i(B_i) \cap f_i(\tilde{A}_i) = \emptyset$ ($i = 1, \dots, p + 1$). In Bezug auf (1) kann man daher $f_i(B_i) \cap f_j(B_j) = \emptyset$ ($i \neq j; i, j = 1, \dots, p + 1$) annehmen. Dann ergeben die Färbungen f_i ($i = 1, \dots, p + 1$) zusammen eine $(k - 1)$ -Färbung von G .

c) Endlich sei xy eine $B_i B_j$ -Kante ($i \neq j$). Wir dürfen $x \in B_1, y \in B_{p+1}$ annehmen. Es sei $b_1 = x, b_{p+1} = y$ und im Falle $p \geq 2$ b_i ein beliebiger Punkt von B_i ($i = 2, \dots, p$). Bezeichne f_i eine $(k - 1)$ -Färbung von $G_i - a_{ii}b_i$ ($i = 1, \dots, p$) und f_{p+1} eine $(k - 1)$ -Färbung von $G_{p+1} - a_{p+1,1}b_{p+1}$. Wir dürfen annehmen, daß die Färbungen f_i ($i = 1, \dots, p + 1$) dieselben $k - 1$ Farben enthalten und daß $f_i(a_{ij}) = f_{p+1}(a_{p+1,j})$ ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, p + p'$) besteht. Es gelten dann folgende Behauptungen:

- 1) $f_{p+1}(\tilde{A}_{p+1})$ enthält $p + p'$ Farben.
- 2) $f_i(b_i) = f_i(a_{ii})$ ($i = 1, \dots, p$) und
 $f_{p+1}(b_{p+1}) = f_{p+1}(a_{p+1,1}) = f_1(a_{11}) = f_1(b_1).$
- 3) $f_i(B_i - \{b_i\}) \cap f_i(\tilde{A}_i) = \emptyset$ ($i = 1, \dots, p + 1$).

Nach (1) besteht

$$\sum_{i=1}^{p+1} \mathcal{N}(B_i - \{b_i\}) < k - 1 - (p + p'),$$

und daher kann man annehmen, daß außer $i = 1, j = p + 1$ für jedes i, j ($i < j; i, j = 1, \dots, p + 1$) $f_i(B_i) \cap f_j(B_j) = \emptyset$ besteht und $f_1(B_1) \cap f_{p+1}(B_{p+1}) = \{f_1(b_1)\}$ gilt. Dann ergeben die Färbungen f_i ($i = 1, \dots,$

$p + 1$) zusammen eine $(k - 1)$ -Färbung von $G - xy$. Der Beweis von (2.12) ist damit beendet.

(2.13) Wir wollen jetzt für das Verfahren (2.10), (2.11) jenes Beispiel betrachten, wo G_1 und G_2 vollständige k -Graphen ($k \geq 3$) sind. Es ist dann $\mathcal{S}(G_i) = \{a_i\} \cup B_i \cup B'_i$ ($i = 1, 2$; keine der Mengen B_i und B'_i ist leer). Die Menge der Punkte des entstehenden Graphen G^*

$$(1) \quad \mathcal{S}(G^*) = B_1 \cup B'_1 \cup \{a\} \cup B'_2 \cup B_2.$$

Hier bezeichnet a jenen Punkt, der durch die Identifizierung von a_1 und a_2 entsteht. Sämtliche Mengen B_1, B'_1, B_2, B'_2 spannen in G^* vollständige Graphen, und die auf der rechten Seite von (1) nebeneinander stehenden Mengen sowie B_1 und B_2 sind in G^* vollständig verbunden. G^* enthält keine weiteren Kanten. Der Graph G^* ist jetzt dann und *nur dann* kritisch, wenn

$$(2) \quad \mathcal{N}(B_1) + \mathcal{N}(B_2) \leq k - 1$$

besteht. Es gilt ferner $\mathcal{N}(B_i) + \mathcal{N}(B'_i) = k - 1$ ($i = 1, 2$). Daraus folgt

$$(3) \quad \mathcal{N}(B_i) \leq k - 2 \quad (i = 1, 2).$$

(2.14) Besteht die eine der Mengen B_1 und B_2 des vorangehenden Beispiels aus einem einzigen Punkt, so folgt (2) aus (3). Der Graph G^* besitzt dann interessante Eigenschaften, welche von DIRAC entdeckt wurden (s. [8] S. 174, und 187). Wir wollen diesen Graphen aus Symmetriegründen auch mit anderen Bezeichnungen noch einmal darstellen. Es seien $A, \{c_1\}, \{c_2\}, C_1, C_2$ nichtleere fremde Punktmengen (mit der früheren Bezeichnung ist z. B. $A = B'_1 \setminus \{c_1\} = B_1, c_2 = a, C_1 = B_2, C_2 = B'_2$) und es bestehe

$$\mathcal{N}(A) = k - 2, \quad \mathcal{N}(C_1) + \mathcal{N}(C_2) = k - 1 \quad (k \geq 3).$$

Dann ist G^* folgendermaßen definiert:

$$(1) \quad \mathcal{S}(G^*) = C_1 \cup \{c_1\} \cup A \cup \{c_2\} \cup C_2.$$

Je zwei Punkte von A, C_1 bzw. C_2 sind in G^* verbunden ($[A]_{G^*}, [C_1]_{G^*}, [C_2]_{G^*}$ sind also vollständige Graphen). Die auf der rechten Seite von (1) nebeneinander stehenden Mengen, sowie C_1 und C_2 sind in G^* vollständig verbunden, und G^* hat keine weiteren Kanten.

Wir bemerken: Sämtliche Punkte von A, C_1 und C_2 sind Nebenpunkte von G^* .

Setzt man $\mathcal{N}(C_i) = j_i$ ($i = 1, 2$), so wollen wir wegen späteren Anwendungen die mit diesem G^* isomorphen Graphen $\Gamma_{j_1 j_2}^k$ -Graphen nennen. Bei der Benützung des Zeichens $\Gamma_{j_1 j_2}^k$ wird stets $k \geq 3, j_1 + j_2 = k - 1, j_1 > 0, j_2 > 0$ vorausgesetzt.

Zum Beweis des Satzes (E.2) benötigen wir noch ein Verfahren, mit dem man die Nebenpunkte eines kritischen Graphen in geeigneter Weise vermehren kann. Der folgende Konstruktionsverfahren geht von einem vollständigen Teilgraphen des umzuformenden Graphen aus.

(2.15) Es sei G ein k -kritischer Graph ($k \geq 4$) und die Punktmenge $B \subseteq \mathcal{N}(G)$ spanne einen vollständigen q -Graphen ($1 \leq q \leq k-2$) in G . Ferner sei $a \in G$, $a \notin B$ und es sei a in G mit B vollständig verbunden.

Lasse man nun sämtliche aB -Kanten von G weg, und nehme die paarweise fremden Graphen G_i ($i = 0, 1, \dots, m$) folgendermaßen auf: Für $1 \leq i \leq m$ sei $G_i = \langle k - q - 1 \rangle$, und es gelte $G \cap G_i = \emptyset$. Ist $q = 2$, so sei $m = 2s$ ($s \geq 1$) und $G_0 = (ax_1x_2 \dots x_ma)$. Ist $q = 1$ oder $q > 2$, so sei $m = q$,

$$\mathcal{N}(G_0) = \{a, x_1, \dots, x_m\} \text{ und } G_0 = \langle q + 1 \rangle.$$

In beiden Fällen sollen die Punkte x_1, \dots, x_m verschieden sein und nicht zu G gehören. Nachher verbinde man x_i mit jedem Punkt von G_i , und jedem Punkt von G_i mit jedem B -Punkt ($i = 1, \dots, m$). Dann entsteht ein solcher k -kritischer Graph, in dem die Punkte x_1, \dots, x_m sowie sämtliche Punkte von G_i ($i = 1, \dots, m$) Nebenpunkte sind.

Der Nachweis der Behauptung (2.15) bietet keine Schwierigkeiten. Wir wollen ihn übergehen.

(2.16) Nun wenden wir uns zum Beweis von (E.2). Ist G ein k -kritischer Graph, so soll im folgenden G_N stets jenen Teilgraphen von G bezeichnen, der durch die Nebenpunkte von G gespannt ist. Es sei $k \geq 4$ ein festgehaltener Wert und bezeichne G' stets einen solchen Graphen, dessen sämtliche Glieder vollständige j -Graphen ($0 \leq j \leq k-1$) und ungerade Kreise sind und in dem jeder Punkt einen Grad $\leq k-1$ besitzt. Unser Ziel ist zu zeigen, daß zu jedem solchen G' ein k -kritischer Graph G mit $G_N = G'$ konstruiert werden kann.

Einer der wichtigsten Schritte unseres Konstruktionsverfahrens ist die „Verwandlung eines Nebenpunktes in einem Hauptpunkt“. Dies bedeutet folgendes: Es sei x ein Nebenpunkt des k -kritischen Graphen G_1 (G_1 soll bei diesem Verfahren als „Grundgraph“ bezeichnet werden). Nehmen wir ein von G_1 fremden $\Gamma_{(k)}$ -Graphen G_2 (s. (2.5); G_2 enthält nur Hauptpunkte) und wendet das unter (2.9) beschriebene Hajós'sche Verfahren für G_1 und G_2 in solcher Weise an, daß x mit einem beliebigen Punkt von G_2 identifiziert wird. Es wird dadurch der Grad von x erhöht, die Grade der übrigen Punkte von G_1 bleiben jedoch unverändert.

I) Wir beweisen zuerst den Satz für zusammenhängende G' . Ist G' leer, so ist ein $\Gamma_{(k)}$ -Graph ein gewünschtes G . Besteht G' aus einem einzigen Punkte x , so bekommt man folgendermaßen ein gewünschtes G : Nehme man einen vollständigen k -Graphen G_1 , der den Punkt x enthält und verwandle außer x sämtliche Punkte von G_1 in Hauptpunkte. Im Falle mehrgliedrige G' wendet man vollständige Induktion bezüglich der Anzahl der Glieder von G' an. Man muß jedoch, um den Induktionsschluß durchführen zu können, etwas mehr beweisen: Man zeigt, daß zu G' (falls $\pi(G') > 1$ ist) auch ein solcher k -kritischer G existiert, der den folgenden Bedingungen genügt

1) es ist $G_N = G'$

2) für jedes $x \in G_N$ spannen die mit x verbundenen Hauptpunkte von G einen vollständigen Graphen.

a) Bestehe zuerst G' aus einem einzigen Glied. Ist G' ein ungerader Kreis, der mehr als drei Punkte enthält, so besitzt jener Graph G , der aus G' und aus einem $\langle k-3 \rangle$ durch die Konstruktion (2.1) zustande kommt die Eigenschaften 1) und 2).

Es sei nun $G' = \langle j \rangle$ mit $2 \leq j \leq k-1$. In diesem Falle nehme man einen solchen unter (2.13) konstruierten Graphen G^* , für dem (mit den dortigen Bezeichnungen)

$$\mathcal{N}(B'_1) = j-1, \quad \mathcal{N}(B_1) = k-j, \quad \mathcal{N}(B'_2) = k-j, \quad \mathcal{N}(B_2) = j-1$$

und

$$[\{a\} \cup B'_1]_{G^*} = G'$$

besteht. G^* ist dann k -kritisch, und die Menge der Nebenpunkte von G^* ist

$$\{a\} \cup B'_1 \cup B'_2, \quad \text{falls } 2 < j < k-1$$

$$\{a\} \cup B'_1 \cup B'_2 \cup B_1, \quad \text{falls } j = 2,$$

$$\{a\} \cup B'_1 \cup B'_2 \cup B_2, \quad \text{falls } j = k-1.$$

Man verwandle nachher sämtliche nicht zu $\{a\} \cup B'_1$ gehörige Nebenpunkte in Hauptpunkte, und zwar in solcher Weise, daß man bei dem Hajós'schen Schritt von dem Grundgraphen folgende Kanten wegläßt: Bei der Umwandlung der B'_2 -Punkte stets $B'_2 B_2$ -Kanten, bei der Umwandlung der B_1 - bzw. B_2 -Punkte (im Falle $j = 2$ bzw. $j = k-1$) stets $B_1 B_2$ -Kanten. Der so entstehende Graph G genügt den Forderungen 1) und 2).

b) Es sei nun $l > 1$ und nehmen wir an, daß für jeden solchen mehrpunktigen G' , der aus $l-1$ Glieder besteht, ein k -kritischer G mit der Eigenschaften 1) und 2) existiert. Es bestehe ferner im folgenden G' aus l Glieder. Es sei G'' ein beliebiger Endglied von G' und man setze $\mathcal{P}(G'') = B' \cup \{a\}$, $a \notin B'$, wobei a den zu G'' gehörigen trennenden Punkt von G' bezeichnet. Betrachte man den Graphen $\tilde{G}' = G' - B'$. \tilde{G}' ist zusammenhängend und mehrpunktig, ferner besteht er aus $l-1$ Glieder und jedes Glied ist ein vollständiger j -Graph ($2 \leq j \leq k-1$) oder ein ungerader Kreis. Jeder Punkt von \tilde{G}' hat einen Grad $\leq k-1$. Nach der Induktionsannahme gibt es ein k -kritischer Graph \tilde{G} , dessen Nebenpunkte den Graphen \tilde{G}' spannen und in dem für jedes $x \in \tilde{G}'$, die mit x verbundenen Hauptpunkte einen vollständigen Graphen spannen. Setzt man $\varrho_{G''}(a) = q$, so ist $1 \leq q \leq k-2$ und

$$\varrho_{\tilde{G}}(a) = \varrho_{G''}(a) - \varrho_{G''}(a) \leq k-1-q.$$

Andererseits ist $\varrho_{\tilde{G}}(a) = k-1$, und daher gilt für die Menge \tilde{B} , der mit a verbundenen Hauptpunkte von \tilde{G}

$$\mathcal{N}(\tilde{B}) = \varrho_{\tilde{G}}(a) - \varrho_{\tilde{G}}(a) \geq q.$$

Bezeichne B eine beliebige Teilmenge von \tilde{B} mit $\mathcal{N}(B) = q$. Man kann jetzt die Konstruktion von (2.15) mit den dortigen Bezeichnungen auf den Graphen \tilde{G} anwenden, und zwar man darf $G_0 = G''$ annehmen. Bezeichnet G^* den entstehenden Graphen, so ist $\mathcal{P}(G_N^*) = \mathcal{P}(G' \cup (\bigcup_{i=1}^m G_i))$. Man verwandle dann sämtliche Punkte von G_i ($i = 1, \dots, m$) in Hauptpunkte, und zwar in solcher Weise, daß man bei dem Hajós'schen Schritt von dem Grundgraphen stets eine solche Kante wegläßt, die ein Punkt von G_i ($1 \leq i \leq m$) mit einem B -Punkt ver-

bindet. Der so entstehende Graph G genügt dann den Bedingungen 1) und 2), und unser Beweis ist damit für zusammenhängende G' beendet.

Wendet man das Hajós'sche Verfahren genügend vielmal mit je einem $\Gamma_{(k)}$ -Graphen in geeigneter Weise an, so kann man aus einem G mit $G_N = G'$ zu solche k -kritischen \tilde{G} gelangen, die ebenfalls die Eigenschaft $\tilde{G}_N = G'$ besitzen und beliebig viele Hauptpunkte enthalten.

II) Ist G' nicht zusammenhängend, so bekommt man ein gewünschtes G dadurch, daß man zu jeder Komponente von G' einen solchen entsprechenden kritischen Graphen konstruiert, in dem auch solche Kanten existieren, die Hauptpunkte verbinden, und nachher aus diesen mit Hilfe des Hajós'schen Verfahrens in geeigneter Weise einen k -kritischen Graphen zustande bringt. Damit ist der Beweis von (E.2) beendet.

3. Kritische Graphen, die höchstens einen Hauptpunkt besitzen

Wir haben uns in der Einleitung auf die folgende Tatsache berufen

(3.1) *Außer den vollständigen Graphen und ungeraden Kreisen, enthält jeder kritische Graph Hauptpunkte.*

Wir wollen jetzt zeigen, daß diese Behauptung eine einfache Folge des Satzes (E.1) ist. Nehmen wir an, daß ein solcher k -kritischer Graph G existiert, der keine Hauptpunkte besitzt, und der weder ein vollständiger Graph, noch ein ungerader Kreis ist. Dann muß erstens $k \geq 4$ bestehen. Ferner spannen jetzt die Nebenpunkte den Graphen selbst. Nach (E.1) haben dann die inneren Punkte der Endglieder von G einen Grad $< k - 1$. Dieser Widerspruch beweist die Behauptung (3.1).

Der bekannte Brooks'sche Färbungssatz folgt nun unmittelbar aus (3.1). Der Satz lautet folgendermaßen: (s. [1]):

(3.2) (BROOKS) *Ist der Grad jedes Punktes eines Graphen \tilde{G} kleiner als k ($k \geq 4$) und ist keine Komponente von \tilde{G} ein vollständiger k -Graph, so ist \tilde{G} ($k - 1$)-färbbar.*

Beweis. Nehmen wir an, daß \tilde{G} die erwähnten Eigenschaften besitzt und nicht ($k - 1$)-färbbar ist. \tilde{G} enthält einen k -kritischen Teilgraphen G (s. [2]). G kann kein vollständiger k -Graph sein, sonst müßte \tilde{G} einen Punkt enthalten, dessen Grad größer als $k - 1$ wäre. Es ist ferner der Grad jedes Punktes in $G \leq k - 1$. Diese Behauptungen stehen jedoch mit (3.1) in Widerspruch.

Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, hat DIRAC ein rekurrentes Verfahren zur Herstellung sämtlicher solche kritischer Graphen angegeben, die höchstens einen Hauptpunkt enthalten (s. [8]). Wir werden jetzt mit Hilfe der Sätze (E.1) und (2.7) diese Graphen in direkter Form herstellen. Unsere Darstellung könnte man auch aus dem DIRAC'schen Verfahren herleiten, doch scheint uns die Anwendung von (E.1) und (2.7) der naturgemäße Weg zu sein.

(3.3) **Satz. 1** *Es sei G ein k -kritischer ($k \geq 4$) Graph, der höchstens einen Hauptpunkt enthält, und es bezeichne z den Hauptpunkt von G , bzw. wenn kein solcher existiert (dann ist $G = \langle k \rangle$), so sei z ein beliebiger Punkt von G . Dann besitzt der Graph $G - z$ die folgenden Eigenschaften:*

- a) Der Graph ist nichtleer und zusammenhängend.
- b) Jedes mehrkantige Glied des Graphen ist ein vollständiger $(k-1)$ -Graph ($k \geq 4$) bzw. im Falle $k=4$ ein ungerader Kreis.
- c) Jedes Endglied des Graphen ist mehrkantig.
- d) Mit jedem trennenden Punkt des Graphen sind genau zwei Glieder, und zwar ein mehrkantiges und ein einkantiges inzident.
- e) Die trennenden Punkte von $G-z$ haben in $G-z$ alle den Grad $k-1$, die übrigen Punkte den Grad $k-2$.

(Die Eigenschaft e) ist eine einfache Folge von b), c) und d).)

a) Im ursprünglichen Graphen G ist z mit denjenigen Punkten von $G-z$, und nur mit jenen verbunden, die keine trennenden Punkte von $G-z$ sind.

2) Es besitze der Graph G' die Eigenschaften a), b), c), d) und z sei ein nicht zu G' gehöriger Punkt. Verbindet man dann z mit sämtlichen nichttrennenden Punkten von G' , so entsteht ein solcher k -kritischer Graph G , in dem nur z Hauptpunkt sein kann.

Beweis. I) Der Kürze halber nennen wir jene Graphen, welche die Eigenschaften a), b), c) und d) besitzen, ε_k -Graphen. Besteht ein ε_k -Graph aus einem einzigen Glied, so ist nach c) und b) der Graph ein $\langle k-1 \rangle$ bzw. im Falle $k=4$ ein ungerader Kreis. Betrachte man nun einen mehrgliedrigen ε_k -Graphen und in diesem ein Endglied. Dies enthält einen einzigen trennenden Punkt x , mit welchem nach d) genau ein weiteres, und zwar ein einkantiges Glied (xy) inzidiert. Läßt man das Endglied zusammen mit der Kante xy weg, so enthält man nach d) wieder einen ε_k -Graphen, und in diesem ist y kein trennender Punkt. Umgekehrt: verbindet man einen beliebigen nichttrennenden Punkt eines ε_k -Graphen mit einem Punkt eines dem Graphen fremden vollständigen $(k-1)$ -Graphen, bzw. im Falle $k=4$ mit einem Punkt eines dem Graphen fremden ungeraden Kreises, so entsteht wieder ein ε_k -Graph.

II) Es besitze G und z die in 1) vorausgesetzten Eigenschaften. Dann ist $G-z$ nicht leer. Da G keinen trennenden Punkt enthält (s. (2.6)), ist $G-z$ zusammenhängend. Ist $G = \langle k \rangle$, so ist $G-z = \langle k-1 \rangle$. Ist $G \neq \langle k \rangle$, dann ist nach (E.1) jedes Glied von $G-z$ ein $\langle j \rangle$ ($2 \leq j \leq k-1$), oder ein ungerader Kreis. Ist also x ein innerer Punkt eines Endgliedes von $G-z$, so ist der Grad von x in $G-z$ gleich $j-1$ oder 2. Der Grad eines Punktes kann jedoch in G nur mit 1 größer sein, als in $G-z$. Daraus folgt, da $\varrho_G(x) = k-1$ ist, daß jedes Endglied von $G-z$ ein $\langle k-1 \rangle$ bzw. im Falle $k=4$ ein ungerader Kreis ist sowie daß sämtliche inneren Punkte jedes Endgliedes mit z verbunden sind. Demzufolge ist mit dem in einem Endglied enthaltenen trennenden Punkt a genau ein weiteres, und zwar ein einkantiges Glied (ab) inzident, und es besteht $\varrho_{G-z}(a) = k-1$ und $za \notin G$. Wir haben so, unter anderen, das Bestehen der Behauptungen a) und c) für $G-z$ nachgewiesen.

III) Die Gültigkeit von b), d) und a) wird durch Induktion über die Anzahl der Glieder von $G-z$ bewiesen. Besteht $G-z$ aus einem einzigen Glied, so gelten die Behauptungen nach II). Nehmen wir an, daß sie in jedem solchen Falle bestehen, wo $G-z$ weniger als l ($l > 1$) Glieder enthält und bestehe jetzt $G-z$ aus l Gliedern. Es sei $[A]_{G-z} = [A]$ ($A \subseteq \mathcal{S}(G-z)$) ein Endglied von $G-z$. Nach II) ist $[A]$ ein $\langle k-1 \rangle$, bzw. im Falle $k=4$ ein ungerader Kreis, und es ist genau ein weiteres Glied von $G-z$, das Glied (ab) ($a \in A$), mit $[A]$ inzident. Es sind ferner sämtliche Punkte von $A - \{a\}$ mit z verbunden, der Punkt a jedoch nicht. Es folgt nach c), daß b ein trennender Punkt von $G-z$ sein muß, und demzufolge ist $\{b, z\}$ ein trennendes Punktpaar von G .

Nach (2.7) gilt dann $bz \notin G$. Man bekommt nun aus dem Graphen $[A \cup \{b, z\}]$ durch Vereinigung von b und z einen vollständigen k -Graphen, bzw. im Falle $k = 4$ ein ungerades Rad (s. unter (2.1)), also in beiden Fällen einen k -kritischen Graphen. Daraus ergibt sich wieder nach (2.7), daß auch der Graph $G_1 = (G - A) \cup (bz)$ k -kritisch ist. Für jeden Punkt x von G_1 , mit Ausnahme von z , gilt $\varrho_{G_1}(x) = \varrho_G(x)$, also kann auch in G_1 nur der Punkt z ein Hauptpunkt sein. In $G_1 - z$ ist jedoch die Anzahl der Glieder mit 2 kleiner, als in $G - z$, und so ist nach der Induktionsannahme $G_1 - z$ ein ε_k -graph, ferner sind sämtliche nichttrennenden Punkte von $G_1 - z$, und nur diese, in G_1 mit z verbunden. b ist also kein trennender Punkt von $G_1 - z$, und so ist nach I) auch $G - z$ ein ε_k -Graph. Ferner ist nach II) und den obigen jeder nichttrennende Punkt von $G - z$ in G mit z verbunden. Damit haben wir den Teil 1) unseres Satzes bewiesen.

IV) Der Teil 2) des Satzes wird durch Induktion über die Anzahl der Glieder von G' bewiesen. Ist G' ein aus einem einzigen Gliede bestehender ε_k -Graph, so ist G ein vollständiger k -Graph, bzw. im Falle $k = 4$ ein ungerades Rad. Die Behauptungen sind also richtig. Nehmen wir an, daß sie für jeden solchen ε_k -Graphen richtig sind, der weniger als l ($l > 1$) Glieder enthält, und es bestehe jetzt G' aus l Gliedern. Es sei $[A]_{G'}$ ein Endglied von G' , und mit diesem soll das Glied (ab) im Punkt a inzidieren. Dann ist nach I) auch $G' - A$ ein ε_k -Graph und b ist kein trennender Punkt dieses Graphen. Verbindet man jeden nichttrennenden Punkt $G' - A$ mit einem nicht zu G' gehörigen Punkt z_1 , so bekommt man nach der Induktionsannahme einen solchen k -kritischen Graphen G_1 , in dem nur z_1 ein Hauptpunkt sein kann. Jener Graph G_2 , der aus $[A]_{G'}$ und aus einem nicht zu G' gehörigen und von z_1 verschiedenen Punkt z_2 in solcher Weise zustande kommt, daß man z_2 mit sämtlichen A -Punkten verbindet, ist gleichfalls ein solcher k -kritischer Graph, indem nur der Punkt z_2 ein Hauptpunkt sein kann. Wendet man nun das Verfahren von HAJÓS (s. (2.9)) auf die Graphen G_1 und G_2 in solcher Weise an, daß man von G_1 die Kante z_1b von G_2 die Kante z_2a wegläßt, die Punkte z_1 und z_2 mit dem Punkt z identifiziert und a mit b verbindet, so bekommt man gerade den Graphen G , und dieser besitzt nach (2.9) und nach den obigen eben die gewünschten Eigenschaften. Damit haben wir den Beweis von (3.3) beendet.

4. Untere Schranken für die Kantenanzahl kritischer Graphen

(4.1) Aus der Tatsache, daß in einem k -kritischen Graphen G der Grad jedes Punktes $\geq k - 1$ ist, bekommt man für die Kantenanzahl $\nu(G)$ die folgende „triviale“ untere Schranke:

$$(1) \quad \nu(G) \geq \frac{n(k-1)}{2},$$

wobei n die Anzahl der Punkte von G bezeichnet. Nach (3.1) gilt hier das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn G ein vollständiger Graph oder ein ungerader Kreis ist.

Das folgende tiefliegende Ergebnis von DIRAC (s. [8] Theorem 15) gibt eine Verbesserung von (1):

(4.2) (DIRAC) Ist G k -kritisch ($k \geq 4$) und $\pi(G) = n > k$, dann ist

$$(2) \quad v(G) \geq \frac{n(k-1)}{2} + \frac{k-3}{2}.$$

Das Gleichheitszeichen gilt im Falle $n = 2k - 1$ für die unter (2.14) definierten Dirac'schen Graphen.

In den erwähnten Dirac'schen Graphen können nur die Punkte c_1 und c_2 Hauptpunkte sein. Besteht $\mathcal{N}(C_1) = k - 2$, so ist c_1 der einzige Hauptpunkt.

Dies und andere Zeichen lassen es vermuten, daß jene kritischen Graphen, die genau einen Hauptpunkt besitzen, bei der Bestimmung der minimalen Kantenanzahl eine wichtige Rolle spielen.

(4.3) Wir wollen jetzt die Punkt- und Kantenanzahlen der höchstens einen Hauptpunkt besitzenden kritischen Graphen berechnen. Diese Werte sind zuerst von DIRAC bestimmt worden (s. [8]).

Aus dem Teil I) des Beweises von (3.3) folgt leicht durch Induktion, daß ein solcher ε_k -Graph G' , der genau g ($g \geq 1$) mehrkantige Glieder enthält, $g - 1$ einkantige Glieder und $2(g - 1)$ trennende Punkte besitzt. Im Falle $k > 4$ gilt daher

$$\pi(G') = g(k - 1) \quad \text{und} \quad v(G') = \binom{k-1}{2} g + g - 1.$$

Diese Formeln sind auch im Falle $k = 4$ richtig, vorausgesetzt, daß jedes mehrkantige Glied von G' ein Dreieck ist. Für jenen k -kritischen Graphen G , der nach dem Teil 2) von (3.3) aus G' zustande kommt, gilt daher

$$(1) \quad \pi(G) = g(k - 1) + 1$$

und

$$v(G) = v(G') + \pi(G') - 2(g - 1) = \binom{k-1}{2} g + (k - 2)g + 1.$$

Mit der Bezeichnung $\pi(G) = n$ bekommt man so

$$(2) \quad v(G) = \frac{n(k-1)}{2} + \frac{(k-3)(n-k)}{2(k-1)} \quad (k \geq 4).$$

Nach Satz (3.3) besteht (2) für jeden solchen k -kritischen ($k \geq 4$) Graphen, der höchstens einen Hauptpunkt besitzt, vorausgesetzt, daß im Falle $4 = k < n$ die mehrkantigen Glieder der durch die Punkte 3-ten Grades von G gespannten Teilgraphen alle Dreiecke sind. Möglicherweise gibt der Wert von (2) die minimale Kantenanzahl k -kritischer Graphen bei festgehaltenen und der Bedingung $n = g(k - 1) + 1$ genügenden Werten von n an. Der Dirac'sche Satz (4.2) und die Untersuchung der höchstens zwei Hauptpunkte besitzenden kritischen Graphen unterstützen diese Vermutung. Der Beweis scheint eine schwierige Aufgabe zu sein. Wir können mit Hilfe der Sätze (E.1) und (3.3) nur die folgende, von der vermuteten recht weit liegende Schranke angeben:

(4.4) **Satz.** Ist G ein k -kritischer ($k \geq 4$) Graph mit $\pi(G) = n > k$, so gilt

$$v(G) > \frac{n(k-1)}{2} + \frac{n}{2(k+9)}.$$

Der Beweis von (4.4) ruht auf dem folgenden Lemma:

(4.5) **Lemma.** *Es sei jedes Glied des nichtleeren Graphen G' ein vollständiger j -Graph ($1 \leq j \leq k-1$, $k \geq 4$) oder ein ungerader Kreis. Es soll ferner der Grad jedes Punktes von G' nicht größer als $k-1$ sein. Dann gilt*

$$(1) \quad v(G') \leq \pi(G') \left(\frac{k-2}{2} + \frac{1}{k-1} \right) - 1,$$

und das Gleichheitszeichen besteht hier dann und nur dann wenn G' ein ε_k -Graph ist, und zwar im Falle $k=4$ ein solcher ε_k -Graph, dessen sämtliche mehrkantigen Glieder Dreiecke sind.

Beweis. Wir wenden bei festgehaltenem k Induktion bezüglich $\pi(G')$ an. Wir setzen

$$\psi(n, k) = n \left(\frac{k-2}{2} + \frac{1}{k-1} \right) - 1.$$

Für $\pi(G') = 1$ gilt $v(G') = 0 < \psi(1, k)$. Da die Funktion $\frac{x-1}{2} + \frac{1}{x}$ für $x \geq 2$ monoton wachsend ist, besteht für $\pi(G') = n'$, $2 \leq n' \leq k-1$ die Ungleichung $v(G') \leq \binom{n'}{2} \leq \psi(n', k)$, und das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn G' ein vollständiger $(k-1)$ -Graph ist (dieser ist ein ε_k -Graph).

Es sei nun $n > k-1$, und nehme man an, daß unseres Lemma für sämtliche G' mit $\pi(G') < n$ richtig ist. Es sei $\pi(G') = n$. Besteht G' aus lauter isolierten Punkten, so ist $v(G') < \psi(n, k)$. Wir dürfen daher annehmen, daß G' Kanten enthält. Es bezeichne dann G_1 ein beliebiges mehrpunktiges Endglied von G' . Den Punkt a definieren wir folgendermaßen: Enthält G_1 einen trennenden Punkt von G' , so sei a dieser Punkt. Enthält G_1 keinen trennenden Punkt von G' so sei a ein beliebiger Punkt von G_1 . Es bezeichne ferner A die Menge der von a verschiedenen Punkte von G_1 und man setze $\mathcal{N}(A) = j$. Es ist $j \geq 1$.

1) Es sei zuerst G_1 ein vollständiger $(j+1)$ -Graph mit $1 \leq j \leq k-3$. Betrachte man den Graphen $G'' = G' - A$. G'' genügt sämtlichen Bedingungen von (4.5) und es ist

$$\pi(G'') = n - j < n \quad \text{und} \quad v(G') = \binom{j+1}{2} + v(G'').$$

Nach der Induktionsannahme ist

$$v(G'') \leq \psi(n-j, k) = \psi(n, k) - j \left(\frac{k-2}{2} + \frac{1}{k-1} \right).$$

Es ist jedoch $\binom{j+1}{2} < j \left(\frac{k-2}{2} + \frac{1}{k-1} \right)$, und daher gilt

$$v(G') < \psi(n, k).$$

2) Es sei jetzt G_1 ein vollständiger $(k-1)$ -Graph. Man betrachte dann den Graphen $G^* = G' - (A \cup \{a\})$.

G^* genügt sämtlichen Bedingungen von (4.5) und es gilt $\pi(G^*) = n - (k-1) < n$. Da $\varrho_{G^*}(a) \leq k-1$ ist, kann mit a höchstens eine nicht

zu G_1 gehörige Kante von G' inzidieren. Daher gilt

$$v(G') \leq \binom{k-1}{2} + 1 + v(G^*).$$

Nach der Induktionsannahme ist

$$\begin{aligned} v(G^*) &\leq \psi(n - (k-1), k) = \psi(n, k) - (k-1) \left(\frac{k-2}{2} + \frac{1}{k-1} \right) = \\ &= \psi(n, k) - \binom{k-1}{2} - 1. \end{aligned}$$

Es gilt daher $v(G') \leq \psi(n, k)$, und das Gleichheitszeichen kann nach dem Teil I) des Beweises von (3.3) dann und nur dann bestehen, wenn G' ein solcher ε_k -Graph ist, dessen sämtliche mehrkantige Glieder im Falle $k=4$ Dreiecke sind.

3) Endlich sei G_1 ein $(2l+1)$ -Eck ($l \geq 2$). Man betrachte dann wieder den Graphen $G'' = G' - A$. Dieser genügt auch in diesem Falle sämtlichen Bedingungen von (4.5). Es ist

$$\pi(G'') = n - 2l < n \quad \text{und} \quad v(G') = 2l + 1 + v(G'').$$

Nach der Induktionsannahme ist

$$v(G'') \leq \psi(n - 2l, k) = \psi(n, k) - 2l \left(\frac{k-2}{2} + \frac{1}{k-1} \right),$$

und so gilt $v(G') < \psi(n, k)$. Damit ist der Beweis von (4.5) beendet.

Mit Hilfe von (4.5) bekommt man nun den Satz (4.4) wie folgt:

Es bezeichne K die Menge der Nebenpunkte und L die der Hauptpunkte des k -kritischen ($k \geq 4$) Graphen G . Wir setzen $\pi(G) = n$ ($n > k$), $\mathcal{N}(K) = n_K$, $\mathcal{N}(L) = n_L$ ($n_K + n_L = n$). Dann gilt

$$v(G) \geq \sum_{x \in K} \varrho(x) - v([K]).$$

Nach (E.1) und (4.5) ist $v([K]) < n_K \left(\frac{k-2}{2} + \frac{1}{k-1} \right)$. Daher besteht

$$(3) \quad v(G) > n_K(k-1) - n_K \left(\frac{k-2}{2} + \frac{1}{k-1} \right) = n_K \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{k-1} \right).$$

Andererseits gilt (für jedes $x \in L$ ist $\varrho(x) \geq k$)

$$(4) \quad v(G) \geq \frac{n_K(k-1) + n_L k}{2} = \frac{n(k-1)}{2} + \frac{n_L}{2}.$$

Multipliziert man (4) mit $2 \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{k-1} \right)$ und addiert die entstehende Ungleichung zu (3), so ergibt eine einfache Rechnung

$$v(G) > \frac{n(k-1)}{2} + \frac{n(k-3)}{2(k^2-3)} \geq \frac{n(k-1)}{2} + \frac{n}{2(k+9)}.$$

5. Größte Kreise kritischer Graphen

(5.1) Wie zuerst J. B. KELLY und L. M. KELLY gezeigt haben, wächst die Länge der größten Kreise der k -kritischen ($k \geq 4$) Graphen, bei festgehaltenem k , zusammen mit der Punktzahl n ins Unendliche ([10] Theorem 3.3). Im Verhältnis zu n kann jedoch diese Länge „klein“ sein. Betrachte man die größten Kreise der n -punktigen k -kritischen Graphen und bezeichne man mit $L_k(n)$ die Länge des kleinsten von diesen. Es haben sich mehrere Verfasser mit der Bestimmung von $L_k(n)$ beschäftigt. Zuerst zeigten J. B. KELLY und L. M. KELLY ([10] Theorem 4.1), daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_4(n)}{\log^2 n} \leq c$$

ist, wobei c eine Konstante bezeichnet. Dann bewies DIRAC ([5] Theorem 3), daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_k(n)}{\log^2 n} \leq c_k$$

(c_k hängt nur von k ab) für jedes $k \geq 4$ gilt. Dieses Resultat wurde von R. C. READ verschärft [13]. Er zeigte, daß für jedes $k > 4$ unendlich viele n mit

$$L_k(n) < \left(\frac{2}{\log 4} \right)^{k-2} \log n \cdot \log \log n \dots \cdot \log_{(k-4)} n \cdot (\log_{(k-3)} n)^2$$

existieren. Wir wollen nun mit Hilfe von (3.3) die folgende Verbesserung dieser Ergebnisse beweisen:

(5.2) **Satz.** Zu jedes $k \geq 4$ existieren unendlich viele Werte von n mit

$$L_k(n) < \frac{2(k-1)}{\log(k-2)} \cdot \log n.$$

Beweis. Es sei $k \geq 4$ ein festgehaltener Wert. Zu jedes $j = 1, 2, \dots$ werden wir einen k -kritischen Graphen G_j so konstruieren, daß für $j \rightarrow \infty$ $n_j = \pi(G_j) \rightarrow \infty$ bestehe und die Länge eines größten Kreises von G_j kleiner als $c_k \log n_j$ sei, wobei $c_k = 2(k-1)/\log(k-2)$ ist.

I) Wir wollen G_j ($j > 1$) so definieren, daß er genau einen Hauptpunkt besitze. Bezeichnet z_j diesen Hauptpunkt, so wird in der Tat erst der Graph $G'_j = G_j - z_j$ erklärt werden. G_j bekommt man dann aus G'_j nach der Vorschrift von (3.3). Die G'_j definieren wir durch Induktion. Es sei $G'_1 = \langle k-1 \rangle$ und nehmen wir an, daß G'_{j-1} ($j > 1$) in solcher Weise definiert wird, daß er die folgenden Eigenschaften besitzt: G'_{j-1} ist ein ε_k -Graph (s. I) von Beweis von (3.3)), und zwar im Falle $k = 4$ einer, dessen sämtlichen mehrkantigen Glieder Dreiecke sind. Außer den inneren Punkten der Endglieder hat jeder Punkt von G'_{j-1} den Grad $k-1$. (Diese Punkte sind also alle trennende Punkte von G'_{j-1} . Die inneren Punkte der Endglieder haben den Grad $k-2$.) Wir bemerken, daß G'_1 die angeführten Eigenschaften besitzt. Nun soll G'_j durch das folgende Verfahren aus G'_{j-1} hergestellt werden:

Man füge zu jedem inneren Punkt der Endglieder von G'_{j-1} je eine neue Kante zu, und zwar in solcher Weise, daß die neuen Kanten miteinander keinen, mit G'_{j-1} jedoch nur einen gemeinsamen Punkt haben. Nachher fügt man zu jenen Endpunkten der neuen Kanten, die nicht zu G'_{j-1} gehören, je

einen $\langle k-1 \rangle$ zu, und zwar in solcher Weise, daß diese weder paarweise noch mit G'_{j-1} gemeinsame Punkte enthalten.

Man sieht dann, daß G'_j alle jene Eigenschaften besitzt, die für G'_{j-1} angenommen wurden. Unsere Erklärung definiert also tatsächlich für jedes $j = 1, 2, \dots$ einen Graphen G'_j , und alle diese Graphen besitzen die angeführten Eigenschaften.

Bezeichnet man die Anzahl der Punkte $(k-2)$ -ten Grades von G'_j mit $\alpha(G'_j)$, so gilt

$$\alpha(G'_1) = k-1 \quad \text{und} \quad \alpha(G'_j) = (k-2) \alpha(G'_{j-1}).$$

Es ist also

$$(1) \quad \alpha(G'_j) = (k-1)(k-2)^{j-1}.$$

Es besteht ferner

$$(2) \quad \pi(G'_1) = k-1 \quad \text{und} \quad \pi(G'_j) = \pi(G'_{j-1}) + (k-1) \alpha(G'_{j-1}) \quad (j > 1).$$

Aus (1) und (2) folgt für $j > 1$

$$(3) \quad \begin{aligned} \pi(G'_j) &= k-1 + (k-1)^2 + (k-1)^2(k-2) + \dots + (k-1)^2(k-2)^{j-2} = \\ &= k-1 + (k-1)^2 \frac{(k-2)^{j-1} - 1}{k-3} > (k-1)(k-2)^{j-1} - 2. \end{aligned}$$

Den Graphen G_j bekommt man jetzt nach dem Teil 2) von (3.3) aus G'_j dadurch, daß man einen nicht zu G'_j gehörigen Punkt z_j mit sämtlichen inneren Punkten der Endglieder von G'_j verbindet. G_j ist dann k -kritisch und es gilt nach (3)

$$n_j > (k-1)(k-2)^{j-1} - 1 \geq (k-2)^j \quad (j > 1).$$

Daraus folgt, daß $n_j \rightarrow \infty$, wenn $j \rightarrow \infty$ und

$$(4) \quad j < \frac{\log n_j}{\log(k-2)}$$

besteht.

II) Jeder Kreis von G_j , der nicht durch z_j geht, liegt in einem Glied von G'_j . Seine Länge ist daher $\leq k-1$. Ein größter Kreis von G_j muß also den Punkt z_j enthalten. Nun sei V_j ein größter Kreis von G_j . Dann ist $V_j - z_j$ ein in G'_j liegender Weg. Wir zeigen, daß die Länge eines jeden Weges von G'_j nicht größer sein kann, als $(k-1)(2j-1) - 1$. In der Tat, ein Weg von G'_j ($j > 1$) kann nach I) höchstens mit $2(k-1)$ Kanten mehr enthalten, als ein Weg von G'_{j-1} . Da ein größter Weg von G'_1 genau $k-2$ Kanten besitzt, kann ein Weg von G'_j höchstens $k-2 + 2(k-1)(j-1)$ Kanten enthalten. Dies bestätigt unsere Behauptung. Wir können jetzt, in Bezug auf (4) für die Länge von V_j die folgende Abschätzung geben:

$$v(V_j) \leq (k-1)(2j-1) + 1 < 2(k-1)j < \frac{2(k-1)}{\log(k-2)} \log n_j.$$

Damit ist der Beweis von (5.2) beendet.

(Eingegangen: 14. Mai, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BROOKS, R. L.: „On colouring the nodes of a network”. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **37** (1941) S. 194—197.
- [2] DIRAC, G. A.: „Some theorems on abstract graphs. *Proc. London Math. Soc.* (3) **2** (1952) S. 69—81.
- [3] DIRAC, G. A.: „A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs”. *J. London Math. Soc.* **27** (1952) S. 85—92.
- [4] DIRAC, G. A.: „The structur of k -chromatic graphs”. *Fund. Math.* **40** (1953) S. 42—55.
- [5] DIRAC, G. A.: „Circuits in critical graphs”. *Monatshefte für Math.* **59** (1955) S. 178—187.
- [6] DIRAC, G. A.: „Map colour theorems related to the Heawood colour formula”. *J. London Math. Soc.*, **31** (1956) S. 460—471.
- [7] DIRAC, G. A.: „Map colour theorems related to the Heawood colour formula (II)”. *J. London Math. Soc.* **32** (1957) S. 436—455.
- [8] DIRAC, G. A.: „A theorem of R. L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger”. *Proc. London Math. Soc.* (3) **7** (1957) S. 161—195.
- [9] HAJÓS, G.: „Über eine Konstruktion nicht n -färbbarer Graphen”. *Wiss. Zeitschrift der Martin-Luther Univ. Halle—Wittenberg. Math. Nat.* **X/1** (1961) S. 116—117.
- [10] KELLY, J. B.—KELLY, L. M.: „Paths and circuits in critical Graphs”. *Amer. J. Math.*, **76** (1954) S. 786—792.
- [11] KÖNIG, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig, 1936.
- [12] ORE, O.: *Theory of graphs*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **38**, 1962.
- [13] READ, R. C.: „Maximal circuits in critical graphs”. *J. London Math. Soc.*, **32** (1957) S. 456—462.
- [14] RINGEL, G.: *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen*. Berlin, 1959.

КРИТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ I

T. GALLAI

Резюме

Мы назовем граф k -критическим, если его хроматическое число равно k и хроматическое число любого его собственного подграфа $< k$. В любом k -критическом графе степень каждой вершины $\geq k-1$. Главным результатом статьи является следующая.

Теорема. В k -критическом графе члены подграфа натянутого на вершинах степени $k-1$ являются полными графами и окружностями с нечетным числом ребер.

Следующее обращение этой теоремы является также верным: Если члены графа G являются окружностями с нечетным числом ребер и полными графами, содержащими менее чем k вершин ($k \geq 4$) и если степень каждой вершины от $G_1 \leq (k-1)$, тогда существует такой k -критический граф, в котором подграф, натянутый на вершинах степени $\leq k-1$, является изоморфным G . Статья содержит также несколько применений главной теоремы.

FREE ALGEBRAS OVER FIRST ORDER AXIOM SYSTEMS

by
G. GRÄTZER

1. Introduction

The concepts of free semigroups, groups, rings and so on are well known and have several applications. The construction of free semigroups etc. is, roughly speaking, the following (see [1] and [2]): we take the polynomials over the generating system given, and we identify some polynomials in order to make the algebra of polynomials satisfy the given axiom system Σ defining the class of algebras considered. The axioms in Σ are open sentences, i.e. in a normal prenex form they contain no existential quantifier. If it does (e.g. in case of groups) then we introduce further operations (e.g. the operation x^{-1} in groups) so that Σ can be transformed into one containing only open sentences.

Of course, the existential quantifiers cannot always be eliminated by introducing new operations. It is my aim to show that even in this case free algebras can be defined. However, in such a situation one should begin by considering the notion of subalgebra and homomorphism, since, as can be shown by examples, the classical notions do not work well. The modified notions, called Σ -subalgebra and Σ -homomorphism coincide with the classical notions if Σ contains open sentences only.

§ 2 contains the notation and the basic notions. The concepts of Σ -homomorphism, Σ -subalgebra and free Σ -algebra are given in § 3. The results on free Σ -algebras are given in § 4, while the existence theorem is contained in § 5. The notion of free \mathbf{K} -algebra can be defined over an arbitrary class \mathbf{K} of algebras; how this concept is connected with free Σ -algebras is shown in § 6.

In the Appendix a necessary and sufficient condition is given for the existence of free algebras in the classical case, when Σ contains open sentences only.

The proofs of the results are not given. These will be published in subsequent publications.

2. Notions and notations

A universal algebra (briefly: algebra) \mathfrak{A} is a sequence $\langle A, f_0, f_1, \dots, f_\gamma, \dots \rangle_{\gamma < \alpha}$ where A is a set and f_γ is an n_γ -ary operation on A i.e. $f_\gamma \in A^{A^{n_\gamma}}$; in this notation α, γ denote ordinal numbers, $0 \leq n_\gamma < \omega$. The sequence $\langle n_\gamma \rangle_{\gamma < \alpha}$ is the type of \mathfrak{A} , α is the order of \mathfrak{A} .

Gothic capital letters $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots, \mathfrak{F}$ denote algebras while the corresponding latin capital letters A, B, \dots, F denote the set upon which they are defined.

All algebras considered are of the same type which is kept fixed throughout the paper. We can associate with this type a first order logic with equality sign as follows: it contains operation symbols P_γ for every $\gamma < \alpha$ and P_γ is the symbol of an n_γ -ary operation; the individual variables are v, x, y, z, \dots ; it contains further the usual logical connectives $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, (x), (\exists x)$ ("or", "and", "not", "imply", "for every x ", "there exists an x "), and the equality sign $=$.

Formulae are defined as usual. First we define terms: any individual variable x is a term; if T_1, \dots, T_{n_γ} are terms then so is $P_\gamma(T_1, \dots, T_{n_\gamma})$. Next we define formulae: if T_1 and T_2 are terms then

$$T_1 = T_2$$

is a formula (this is called a prime formula). If Φ_1 and Φ_2 are formulae then so are $\Phi_1 \vee \Phi_2, \Phi_1 \wedge \Phi_2, \neg \Phi_1, \Phi_1 \rightarrow \Phi_2, (x)(\Phi_1), (\exists x)(\Phi_1)$.

Every formula Φ can be written in a prenex normal form:

$$(2.1) \quad (Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) (\Psi)$$

where Ψ is a formula containing no quantifier and the Q_i are quantifiers. If in (2.1) Ψ contains no variable other than x_1, \dots, x_n then Φ is a closed formula. If Φ is closed and no Q_i is an existential quantifier then Φ is an open formula.

An *axiom system* Σ is a set of closed formulae. A Σ -algebra \mathfrak{A} is a model of Σ , i.e. every $\Phi \in \Sigma$ is satisfied on \mathfrak{A} .

$\langle A, f_\gamma \rangle_{\gamma < \alpha}$ is a subalgebra of $\langle B, g_\gamma \rangle_{\gamma < \alpha}$ if A is a subset of B , A is closed under g_γ and f_γ is the restriction of g_γ to A , for every $\gamma < \alpha$.

The mapping $\varphi : A \rightarrow B$ ($a \rightarrow a\varphi$) is called a homomorphism if

$$f_\gamma(a_1, \dots, a_{n_\gamma})\varphi = g_\gamma(a_1\varphi, \dots, a_{n_\gamma}\varphi) \quad (\gamma < \alpha).$$

All these notions are well-known; for more detailed (and more precise) treatment the reader should consult [3], [5], [6], [7] and [8].

3. The notion of inverse

Let an axiom system Σ be fixed and we suppose every $\Phi \in \Sigma$ is in prenex normal form, e.g.

$$(3.1) \quad (x)(\exists y)(\Psi(x, y)),$$

or

$$(3.2) \quad (x)(\exists y)(z)(\exists u)(\Psi(x, y, z, u)).$$

In (3.1) and (3.2) the formulae $\Psi(x, y)$ and $\Psi(x, y, z, u)$, respectively, contain no quantifier.

Let $\Phi \in \Sigma$, Φ be of the form (3.1), and let \mathfrak{A} be a Σ -algebra, $a, b \in A$. We say that b is an inverse (Φ -inverse) of a if $\Psi(a, b)$ holds. Let Φ be of the form (3.2). Then b is an inverse of a if

$$(z)(\exists u)(\Psi(a, b, z, u))$$

holds true. And d is an inverse of a and c if there exists an inverse b of a such that $\Psi(a, b, c, d)$ holds.

The general definition of inverse is now obvious; if b is a Φ -inverse of a_1, \dots, a_n then Φ contains an existential quantifier preceded by n universal quantifiers and by some, say k , existential quantifiers; the precise definition can be given by induction on k as in the example above. The details are left to the reader.

To say that b is a Φ -inverse of a_1, \dots, a_n may sometimes be ambiguous. E.g. if Φ is of the form: $(x)(\exists y)(\exists z)(\Psi(x, y, z))$, then b is a Φ -inverse of a either if $(\exists z)(\Psi(a, b, z))$ or if there exists a c with $(\exists z)(\Psi(a, c, z))$ and $\Psi(a, c, b)$. Therefore, if we have two existential quantifiers between which there is no universal quantifier than we have to distinguish between the inverses with respect to the first and second existential quantifier.

Since in the discussion we consider as examples axioms of type (3.1) and (3.2) this problem will not arise.

Let \mathfrak{A} and \mathfrak{B} be algebras and \mathfrak{B} be a Σ -algebra. We say that \mathfrak{A} is a Σ -subalgebra of \mathfrak{B} if \mathfrak{A} is a subalgebra of \mathfrak{B} , further if $a_1, \dots, a_n \in A$, $b \in B$, $\Phi \in \Sigma$ and b is a Φ -inverse of a_1, \dots, a_n in \mathfrak{B} then $b \in A$. It is easy to see that the following results hold:

3.3. A Σ -subalgebra of a Σ -algebra is again a Σ -algebra.

3.4. Let \mathfrak{A} be a Σ -algebra, $H \subseteq A$. Then there exists a smallest Σ -subalgebra \mathfrak{B} of \mathfrak{A} such that $H \subseteq B$.

This \mathfrak{B} is said to be Σ -generated by H , and H called a Σ -generating system of \mathfrak{B} .

If Σ is the usual axiom system for groups, i.e. the type is $\langle 2, 0 \rangle$ the operations being denoted by \cdot and 1 and the axioms are

$$\begin{aligned}(x)(y)(z)(x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z), \\ (x)(x \cdot 1 &= x \wedge 1 \cdot x = x), \\ (x)(\exists y)(x \cdot y &= 1 \wedge y \cdot x = 1)\end{aligned}$$

then a Σ -subalgebra is a subgroup. (Note that a subalgebra is a subsemigroup containing 1 .)

If Σ contains open formulae only, then every subalgebra is a Σ -subalgebra.

Now let \mathfrak{A} and \mathfrak{B} be Σ -algebras $\varphi: A \rightarrow B$. Then φ is said to be a Σ -homomorphism if it is a homomorphism, further it carries inverse into inverse, i.e. if $a_1, \dots, a_n, b \in A$ and b is a Φ -inverse of a_1, \dots, a_n ($\Phi \in \Sigma$) then $b\varphi$ is a Φ -inverse of $a_1\varphi, \dots, a_n\varphi$ and, conversely, if b is a Φ -inverse of b_1, \dots, b_n ($b, b_1, \dots, b_n \in B$), $a_1, \dots, a_n \in A$ such that $a_1\varphi = b_1, \dots, a_n\varphi = b_n$ then there exists a Φ -inverse a of a_1, \dots, a_n such that $a\varphi = b$.

In case of groups any homomorphism is a Σ -homomorphism. The same holds if Σ contains open formulae only.

Let a class of algebras of type $\langle 2 \rangle$ be defined by the following axioms (the binary operation is denoted by \cup):

$$\begin{aligned}(x)(x \cup x &= x), \\ (x)(y)(x \cup y &= y \cup x), \\ (x)(y)(z)((x \cup y) \cup z &= x \cup (y \cup z)), \\ (x)(y)(\exists z)(u)(x &= z \cup x \wedge y = z \cup y \wedge ((x = u \cup x \wedge y = u \cup y) \rightarrow z = z \cup u)).\end{aligned}$$

Then the class of Σ -algebras coincides with the class of lattices, a Σ -subalgebra is a sublattice, a Σ -homomorphism is a lattice-homomorphism. A subalgebra is a subset closed under union, which is a lattice, and the usual notion of homomorphism too does not function well, e.g. the homomorphic image of a distributive lattice (as a Σ -algebra) can be non-distributive. Of course, this cannot happen if we consider Σ -homomorphisms.

3.5. Let $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ be Σ -algebras, φ a Σ -homomorphism of \mathfrak{A} into \mathfrak{B} . Then the image of \mathfrak{A} under φ is a Σ -subalgebra of \mathfrak{B} .

3.6. The product of Σ -homomorphisms, if exists, is again a Σ -homomorphism.

Now we define the notion of free Σ -algebra with β Σ -generators, where β is any cardinal number.

The algebra $\mathfrak{F}(\beta) = \langle F(\beta), f_0, f_1, \dots, f_\gamma, \dots \rangle_{\gamma < \alpha}$ is said to be the free Σ -algebra with β Σ -generators if

- (a) $\mathfrak{F}(\beta)$ is a Σ -algebra;
- (b) $F(\beta)$ contains a sequence of elements $\langle x_\gamma \rangle_{\gamma < \beta}$ Σ -generating $\mathfrak{F}(\beta)$;
- (c) let \mathfrak{A} be a Σ -algebra, $\langle a_\gamma \rangle_{\gamma < \beta}$ a sequence of elements of \mathfrak{A} , then the mapping $\varphi : x_\gamma \rightarrow a_\gamma$ ($\gamma < \beta$) can be extended to a Σ -homomorphism $\bar{\varphi}$ of $\mathfrak{F}(\beta)$ into \mathfrak{A} .

It is easy to see that the $\bar{\varphi}$ in (c) need not be unique.

4. Free Σ -algebras

First we formulate the unicity theorem:

4.1. If $\mathfrak{F}(\beta)$ exists for some β then it is unique up to isomorphism.

We can prove somewhat more, namely

4.2. Let $\mathfrak{F}(\beta)$ and $\mathfrak{F}'(\beta)$ be free Σ -algebras with the Σ -generating systems $\langle x_\gamma \rangle_{\gamma < \beta}$ and $\langle x'_\gamma \rangle_{\gamma < \beta}$. Let φ be the mapping $x_\gamma \rightarrow x'_\gamma$ ($\gamma < \beta$) and $\bar{\varphi}$ any extension of φ into Σ -homomorphism. Then $\bar{\varphi}$ is an isomorphism between $\mathfrak{F}(\beta)$ and $\mathfrak{F}'(\beta)$.

The following theorems are analogues of well-known theorems for the classical case. However, it seems to me that the triviality of the classical results does not imply the existence of an easy proof in this situation.

4.3. Suppose that the free Σ -algebra $\mathfrak{F}(\beta)$ exists. Then $\mathfrak{F}(\delta)$ exists for every $\delta < \beta$.

4.4. Suppose $\mathfrak{F}(n)$ exists for every $n < \omega$. Then $\mathfrak{F}(\omega)$ exists too.

4.5. If $\mathfrak{F}(\omega)$ exists then so does $\mathfrak{F}(\beta)$ for every β .

5. The existence theorem

We define multi-polynomials as follows:

- (a) $P(x_1, \dots, x_n) = \{x_i\}$ is a multi-polynomial;
- (b) if f is an operation then $P(x_1, \dots, x_n) = \{f(x_1, \dots, x_n)\}$ is a multi-polynomial;
- (c) let $\exists y$ be preceded by n universal quantifiers in the axiom Φ ; then $P(x_1, \dots, x_n)$, the set of all Φ -inverses of x_1, \dots, x_n is a multi-polynomial;
- (d) if $P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_k(x_1, \dots, x_n), P(x_1, \dots, x_k)$ are multi-polynomials then so is $P(P_1, \dots, P_k)$, where

$x \in P(P_1(x_1, \dots, x_n), \dots, P_k(x_1, \dots, x_n))$ if and only if there exist y_1, \dots, y_k such that $x \in P(y_1, \dots, y_k)$ and $y_i \in P_i(x_1, \dots, x_n)$ for every $1 \leq i \leq k$.

(e) the multi-polynomials are those and only those which are given by (a)—(d).

Consider the condition:

(5.1) Every multi-polynomial in k variable is bounded, i.e. there exists an integer n , such that a multi-polynomial $P(x_1, \dots, x_k)$ cannot contain more than n elements.

Then we can prove

5.2. If $\mathfrak{F}(k)$ exists then (5.1) holds.

The next condition is necessary, too, for the existence of $\mathfrak{F}(k)$:

(5.3) Let \mathfrak{A} and \mathfrak{B} be Σ -algebras, \mathfrak{A} is Σ -generated by $\langle x_i \rangle_{i < k}$ and $\langle y_i \rangle_{i < k}$ are elements of B . Then there exists a Σ -algebra \mathfrak{C} Σ -generated by $\langle z_i \rangle_{i < k}$ such that the mappings $\varphi_1: z_i \rightarrow x_i$ and $\varphi_2: z_i \rightarrow y_i$ can be extended to Σ -homomorphisms.

5.4. The conditions (5.1) and (5.3) are necessary and sufficient for the existence of $\mathfrak{F}(k)$.

We formulated 5.4 for $k < \omega$. It is true for ω as well. (5.1) then says that every multi-polynomial is bounded.

A special case of 5.4 is the following:

5.5. Suppose Σ contains open sentences only. Then $\mathfrak{F}(\beta)$ exists if and only if whenever \mathfrak{A} and \mathfrak{B} are Σ -algebras, \mathfrak{A} is generated by $x_0, \dots, x_\gamma, \dots$ ($\gamma < \beta$) and $y_0, \dots, y_\gamma, \dots$ ($\gamma < \beta$) are elements of B then there exists a Σ -algebra \mathfrak{C} generated by the elements $z_0, \dots, z_\gamma, \dots$ ($\gamma < \beta$) such that $\varphi_1: z_\gamma \rightarrow x_\gamma$ ($\gamma < \beta$) and $\varphi_2: z_\gamma \rightarrow y_\gamma$ ($\gamma < \beta$) can be extended to homomorphisms.

E.g. if Σ contains only equations then such a \mathfrak{C} is the subalgebra of the direct product $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, generated by the $\langle x_\gamma, y_\gamma \rangle$ ($\gamma < \alpha$).

One can obviously infer a characterization of equational classes from 5.5.

6. Free \mathbf{K} -algebras

Let \mathbf{K} be a class of algebras. An algebra $\mathfrak{F}(\beta)$ is a free \mathbf{K} -algebra with β generators if

(a) $\mathfrak{F}(\beta) \in \mathbf{K}$;

(b) $F(\beta)$ contains a sequence $\langle x_\gamma \rangle_{\gamma < \beta}$ generating $\mathfrak{F}(\beta)$;

(c) let $\mathfrak{A} \in \mathbf{K}$ and $\langle a_\gamma \rangle_{\gamma < \beta}$ be a sequence of elements of A , then $\varphi: x_\gamma \rightarrow a_\gamma$ ($\gamma < \beta$) can be extended to a homomorphism $\bar{\varphi}$ of $\mathfrak{F}(\beta)$ into \mathfrak{A} .

The problem is the following: what is the connection between free \mathbf{K} -algebras and free Σ -algebras.

To settle this problem we define two properties.

We say that the axiom system Σ has the Inverse Preserving Property (IPP) if whenever \mathfrak{A} is a Σ -algebra, \mathfrak{B} a Σ -subalgebra of \mathfrak{A} , $a_1, \dots, a_n, b \in B$, $\Phi \in \Sigma$, b is a Φ -inverse of a_1, \dots, a_n in \mathfrak{B} then the same holds in \mathfrak{A} as well. (The converse of this statement holds always.)

The free Σ -algebra $\mathfrak{F}(\beta)$ is called free in the stronger sense if, in the definition, the Σ -homomorphism $\bar{\varphi}$ is always uniquely determined. If we write " $\mathfrak{F}^0(\beta)$ exists" it means that the free Σ -algebra $\mathfrak{F}(\beta)$ exists and it is free in the stronger sense.

6.1. If $\mathfrak{F}^0(\beta)$ exists and $\delta < \beta$ then $\mathfrak{F}^0(\delta)$ exists too.

6.2. If $\mathfrak{F}^0(n)$ exists for every $n < \omega$ then so does $\mathfrak{F}^0(\omega)$.

6.3. If $\mathfrak{F}^0(\omega)$ exists then so does $\mathfrak{F}^0(\beta)$ for every β .

Now we turn to the main problem:

6.4. Let \mathbf{K} be the class of Σ -algebras $\langle A, f_\gamma \rangle_{\gamma < \alpha}$; we suppose Σ has IPP and the free Σ -algebra $\mathfrak{F}^0(\omega)$ exists. Then we can define new operations $f_\alpha, f_{\alpha+1}, \dots, f_\gamma, \dots$ ($\alpha \leq \gamma < \beta$) on the Σ -algebras such that the arising class $\bar{\mathbf{K}}$ of algebras and the mapping

$$\langle A, f_\gamma \rangle_{\gamma < \alpha} \longleftrightarrow \langle A, f_\gamma \rangle_{\gamma < \beta}$$

have the following properties:

(a) $\langle A, f_\gamma \rangle_{\gamma < \alpha}$ is a Σ -subalgebra of $\langle B, g_\gamma \rangle_{\gamma < \alpha}$ if and only if $\langle A, f_\gamma \rangle_{\gamma < \beta}$ is a subalgebra of $\langle B, g_\gamma \rangle_{\gamma < \beta}$;

(b) let φ map A into B ; φ is a Σ -homomorphism of $\langle A, f_\gamma \rangle_{\gamma < \alpha}$ into $\langle B, g_\gamma \rangle_{\gamma < \alpha}$ if and only if it is a homomorphism of $\langle A, f_\gamma \rangle_{\gamma < \alpha}$ into $\langle B, g_\gamma \rangle_{\gamma < \beta}$;

(c) the free $\bar{\mathbf{K}}$ -algebras exist.

Theorem 6.4 is the best possible in the following sense:

6.5. Suppose that the conclusion of 6.4 hold for the axiom system Σ . Then Σ has IPP and $\mathfrak{F}^0(\omega)$ exists.

The simplest illustration of 6.4 is given by an axiom system Σ in which all existential quantifiers are of bound one, i.e. the inverses are unique. Then the new operations $f_\alpha, f_{\alpha+1}, \dots$ are simply the Skolem-functions.

7. Appendix

Now we suppose that every axiom in Σ is an open formula, i.e. of the form

$$(7.1) \quad (x_1) \dots (x_n) (\Psi(x_1, \dots, x_n)).$$

Instead of (7.1.) we will write simply

$$(7.2) \quad \Psi(x_1, \dots, x_n),$$

which contains no quantifier.

The conjunctive normal form of Ψ be

$$\Psi : \Psi_1 \wedge \dots \wedge \Psi_K,$$

and we replace Ψ in Σ by Ψ_1, \dots, Ψ_K . Thus we may suppose that every $\Psi \in \Sigma$ is of the form

$$(7.3) \quad \Psi : \Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_K$$

where every Ψ_i is a prime formula or a negation of a prime formula.

If every $\Psi \in \Sigma$ is of the form (7.3) then we say that Σ is in the *normal form*.

Let Σ be in the normal form. Σ is *reduced* if every $\Psi \in \Sigma$ is reduced in the following sense: either $k = 1$ or the sequence $\langle 1, 2, \dots, k \rangle$ has no proper subsequence $\langle i_1, \dots, i_n \rangle$ ($n < k$) such that Ψ is equivalent to Ψ' :

$$(7.4) \quad \Psi' : \Psi_{i_1} \vee \dots \vee \Psi_{i_n}.$$

More precisely to say, Σ is not equivalent to $(\Sigma \setminus \{\Psi\}) \cup \{\Psi'\}$.

If Ψ is not reduced then there may be many sequences $\langle i_1, \dots, i_n \rangle$ for which Σ is equivalent to $(\Sigma \setminus \{\Psi\}) \cup \{\Psi'\}$. A reduction is the following: we replace Ψ by a Ψ' for which $n = 1$ or n is the least possible.

A reduction of Σ is the following: we reduce every $\Psi \in \Sigma$.

7.5. Let Σ' be any reduction of Σ . Then Σ is equivalent to Σ' .

7.6. Any axiom system Σ equivalent to an axiom system Σ' which is in reduced normal form.

7.6 is due to PEREMANS [4].

Now suppose Σ is in reduced normal form, $\Psi \in \Sigma$ is of the form (7.3), where $\Psi_1, \dots, \Psi_{s(\Psi)}$ are negations of prime formulae, $\Psi_{s(\Psi)+1}, \dots, \Psi_k$ are prime formulae (it is allowed that $s(\Psi) = 0$ or $s(\Psi) = k$).

A P -specialization of $\Psi(x_1, \dots, x_m)$ is $\Psi(T_1, \dots, T_m)$ if T_1, \dots, T_m are terms and each $\Psi_i(T_1, \dots, T_m)$, $1 \leq i \leq s(\Psi)$ is identically false (i.e. $\neg \Psi_i(T_1, \dots, T_m)$ holds always in every Σ -algebra).

An axiom $\Psi \in \Sigma$ said to have property P if either $s(\Psi) = k$ or whenever $\Psi(T_1, \dots, T_m)$ is a P -specialization then there exists an $s(\Psi) < i \leq k$ such that $\Psi_i(T_1, \dots, T_m)$ is identically true.

7.7. If Ψ is of the form (7.3) and $k = 1$ then Ψ has property P .

7.8. If Ψ is of the form (7.3) and $s(\Psi) \geq k - 1$ then Ψ has property P .

7.9. Suppose Ψ in (7.3) is reduced, $k > 1$ and $s(\Psi) = 0$. Then Ψ does not have property P .

An axiom system Σ has property P if every axiom $\Psi \in \Sigma$ has it.

The main result of this section is the following:

7.10. The free algebra $\mathfrak{F}(\omega)$ over the class of all Σ -algebras exists if and only if Σ has property P .

7.7 and 7.10 together yield a result of BIRKHOFF [1] and [2] while the combination of 7.8 and 7.9 with 7.10 give the two main results of PEREMANS [4].

One can easily sharpen 7.10 by giving a necessary and sufficient condition for the existence of $\mathfrak{F}(n)$, $n < \omega$.

(Received May 17, 1963.)

REFERENCES

- [1] BIRKHOFF, G.: "On the combination of subalgebras". *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **29** (1933) 444—464.
- [2] BIRKHOFF, G.: *Lattice theory*. New York, 1948.
- [3] KLEENE, S. C.: *Introduction to metamathematics*. Amsterdam, 1952.
- [4] PEREMANS, W.: "Some theorems on free algebras and on direct product of algebras". *Simon Stevin* **29** (1952) 51—59.
- [5] ROBINSON, A.: *On the metamathematics of algebra*. Studies on Logic and Foundations of Mathematics, Amsterdam, 1951.
- [6] TARSKI, A.: "Contribution to the theory of models, I, II, III". *Indag. Math.* **16** (1954) 572—581, 582—588, **17** (1955) 56—64.
- [7] TARSKI, A.: "Some notions and methods on the border-line of algebra and metamathematics". *Proc. Int. Congr. Math.*, 1950, 705—720.
- [8] TARSKI, A.—VAUGHT, R. L.: "Arithmetical extensions of relational systems". *Compositio Mathematica* **13** (1957) 81—102.

СВОБОДНЫЕ АЛГЕБРЫ НАД СИСТЕМАМИ АКСИОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

G. GRÄTZER

Резюме

Резюмируя результаты нескольких его статей, которые вскоре будут опубликованы, автор сообщает о них не приводя доказательств.

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ СВОЙСТВАМИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

J. BOGNÁR

Посвящается профессору Béla Sz.-Nagy к его 50-летию

Настоящая работа содержит доказательства некоторых утверждений высказанных в заметке [1]. Два остальные утверждения будут доказаны на ином месте.

§ 1. Определения и леммы

Большинство перечисленных внизу определений и лемм заимствовано из работы М. Г. Крейна и И. С. Иохвидова [2]. Некоторые из остальных лемм очевидны, а другие известны из линейной алгебры и из теории гильбертова пространства.

Рассмотрим комплексное линейное пространство H , в котором задан эрмитово-симметрический билинейный функционал (x, y) , определенный для всех $x, y \in H$. Назовем число (x, y) *скалярным произведением* элементов x, y .

Элемент $x \in H$ называется *положительным* (соотв. *отрицательным*, *неотрицательным*, *неположительным*, *нулевым*), если $(x, x) > 0$ (соотв. $(x, x) < 0$, $(x, x) \geq 0$, $(x, x) \leq 0$, $(x, x) = 0$). Линеал (т. е. линейное подмножество) $L \subset H$ называется *положительным* (отрицательным, неотрицательным, неположительным, нулевым), если все его элементы, может быть с исключением элемента 0, имеют соответствующее свойство. ■■

Два элемента $x, y \in H$ называются *ортогональными* между собой, если $(x, y) = 0$. В этом случае употребляется обозначение $x \perp y$. Мы говорим, что линеалы $L, M \subset H$ ортогональны (в обозначениях: $L \perp M$), если из $x \in L, y \in M$ вытекает $(x, y) = 0$. *Ортогональное дополнение* L^\perp линеала L состоит из элементов пространства H , ортогональных к L , т. е. ортогональных к всем элементам из L . Очевидно, что L^\perp — линеал.

Говорят, что *скалярное произведение вырождается на линеале* $L \subset H$, если существует элемент $x_0 \in L$ ($x_0 \neq 0$), ортогональный к всему L . Элементы линеала L , ортогональные к L (в том числе элемент 0), называются *изотропными элементами* линеала L . Они составляют некоторый линеал L_0 : *изотропный линеал* линеала L . Если скалярное произведение не вырождается на L , то L_0 состоит только из элемента 0.

Лемма 1. *Прямая сумма двух линейно независимых, взаимно ортогональных, положительных (соотв. отрицательных, неотрицательных, не-*

положительных, нулевых) линеалов положительна (соотв. отрицательна, неотрицательна, неположительна, нулева).

Лемма 2 (ср. [2], стр. 373). Изотропный линеал неотрицательного (неположительного) линеала L состоит из всех нулевых элементов линеала L .

Лемма 3 (ср. [2], стр. 372). Если L — конечномерный положительный или отрицательный линеал в пространстве H , то H разлагается в прямую сумму $H = L \oplus L^\perp$.

Лемма 4 (см. [2], стр. 373). Если скалярное произведение не вырождается на пространстве H и H не содержит $(k+1)$ -мерного положительного (отрицательного) линеала, то ортогональное дополнение любого k -мерного положительного (отрицательного) линеала отрицательно (положительно).

Пространство H называется пространством типа H_k или просто пространством H_k (k — натуральное число), если выполняются следующие условия:¹

I. Скалярное произведение не вырождается на H .

II. H содержит k -мерного, но не содержит $(k+1)$ -мерного отрицательного линеала.

III. k -мерный отрицательный линеал $H^- \subset H$ можно выбрать так, чтобы его ортогональное дополнение H^+ (см. лемму 4) было полно относительно нормы $|x| = \sqrt{(x, x)}$ ($x \in H^+$).

Лемма 5 ([2], стр. 375—377). Ортогональное дополнение H^+ любого k -мерного отрицательного линеала $H^- \subset H_k$ полно относительно нормы $|x| = \sqrt{(x, x)}$ ($x \in H^+$). Если положить $[x, y] = (x^+, y^+) - (x^-, y^-)$, где x^- , x^+ (соотв. y^- , y^+) — компоненты элемента x (соотв. y), соответствующие прямому разложению (см. лемму 3) $H_k = H^- \oplus H^+$, то относительно этого нового скалярного произведения H_k — гильбертово пространство, H^- и H^+ — ортогональные подпространства. Понятие (сильной) сходимости, определенное с помощью нормы $\|x\| = \sqrt{[x, x]}$, не зависит от выбора H^- .

Согласно последнему утверждению леммы 5, в пространстве H_k единственным образом определяются понятия замкнутости множеств, непрерывности функционалов и операторов, в частности, понятия подпространства (т. е. замкнутого линеала) и спектра. Очевидно, что все конечномерные линеалы — подпространства.

Лемма 6 ([2], стр. 373). H_k не содержит $(k+1)$ -мерного неположительного подпространства. В частности, изотропный линеал любого линеала $L \subset H_k$ имеет размерность, не выше k .

Лемма 7. Если L — k -мерное неположительное подпространство в H_k , то L^\perp неотрицательно.

Лемма 8 ([2], стр. 378). Скалярное произведение (x, y) непрерывно в H_k по обоим аргументам. В частности, ортогональное дополнение произвольного линеала $L \subset H_k$ является подпространством.

Лемма 9 ([2], стр. 379—380). Если на подпространстве $M \subset H_k$ скалярное произведение не вырождается, то оно не вырождается и на M^\perp , и

¹ Понятие пространства H_k было введено М. Г. Крейном и И. С. Иохвидовым в работе [2]. Вместо H_k там употребляется обозначение P_k , и роли положительных и отрицательных линеалов переименованы, что нужно принимать во внимание при дальнейших ссылках.

пространство представимо в виде прямой суммы $H_k = M \oplus M^\perp$. В частности, $M^{\perp\perp} = M$.

Лемма 10 ([2], стр. 381). Если M — произвольное подпространство пространства H_k и M_0 — изотропное подпространство (см. лемму 6) подпространства M , то найдется подпространство $M' \subset M$ с невырожденным скалярным произведением так, что $M = M_0 \oplus M'$.

Пусть T — непрерывный (всюду определенный) линейный оператор в H_k . Сопряженный оператор T^* определяется уравнением $(Tx, y) = (x, T^*y)$, где x, y — произвольные элементы из H_k . Это тоже непрерывный линейный оператор. Оператор T называется самосопряженным, если $T^* = T$.

Лемма 11 («основная теорема» Л. С. Понтрягина, см. например [2], стр. 419). В пространстве H_k каждый самосопряженный оператор имеет хотя бы одно k -мерное неположительное инвариантное подпространство.

Лемма 12. Если подпространство $M \subset H_k$ инвариантно относительно самосопряженного оператора A , то M^\perp тоже инвариантно относительно A .

Пусть A — самосопряженный (непрерывный) оператор в пространстве H_k . Назовем элемент $x \in H_k$ A -положительным (соотв. A -отрицательным, A -неотрицательным, A -неположительным, A -нулевым), если $(Ax, x) > 0$ (соотв. $(Ax, x) < 0$, $(Ax, x) \geq 0$, $(Ax, x) \leq 0$, $(Ax, x) = 0$). Линеал $L \subset H_k$ называется A -положительным (A -отрицательным, A -неотрицательным, A -неположительным, A -нулевым), если все его элементы, с исключением, может быть, элемента 0, обладают соответствующим свойством.

Будем говорить, что элементы $x, y \in H_k$ A -ортогональны между собой, если $(Ax, y) = 0$. Определение A -ортогональности элемента и линеала или двух линеалов между собой очевидно. A -ортогональное дополнение некоторого линеала $L \subset H_k$ есть совокупность элементов пространства H_k , A -ортогональных к L . Из непрерывности скалярного произведения (см. лемму 8) и непрерывности оператора A следует, что A -ортогональное дополнение любого линеала — подпространство.

Лемма 13. Прямая сумма двух линейно независимых, взаимно A -ортогональных, A -положительных (соотв. A -отрицательных, A -неотрицательных, A -неположительных, A -нулевых) линеалов A -положительна (соотв. A -отрицательна, A -неотрицательна, A -неположительна, A -нулева).

Лемма 14. Если L_1, L_2 — ортогональные линеалы в H_k и хотя бы один из них инвариантен относительно самосопряженного оператора A , то L_1 и L_2 A -ортогональны.

Лемма 15. Пусть M — конечномерное A -положительное или A -отрицательное подпространство в пространстве H_k . Тогда H_k представимо в виде прямой суммы подпространства M и его A -ортогонального дополнения.

Лемма 16. Пусть L и M — линеалы в некотором линейном пространстве, снабженном скалярным произведением (общего типа). Если $\dim L < \infty$ и $\dim M > \dim L$, то $\dim ML^\perp \geq 1$.

Лемма 17. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H . Тогда H представимо в виде ортогональной прямой суммы трех инвариантных относительно A подпространств, одно из которых является A -отрицательным, другое — A -нулевым, а третье — A -положительным.

§ 2. Некоторые свойства неотрицательности операторов и связи между ними в пространствах типа H_k

Пусть A — непрерывный самосопряженный оператор в пространстве H_k . Наши теоремы относятся к следующим свойствам, которыми оператор A может обладать или не обладать. Эти свойства, и некоторые другие, были предложены в заметке [1] в качестве возможных обобщений свойства неотрицательности операторов в гильбертовом пространстве. Там же указаны несколько очевидных утверждений и простых примеров, которые мы здесь не повторим.

а2). H_k не содержит $(k+1)$ -мерного A -отрицательного подпространства.

а3). H_k содержит хотя бы одно k -мерное A -неположительное подпространство, но не содержит $(k+1)$ -мерного A -отрицательного подпространства.

а4). H_k содержит хотя бы одно k -мерное A -неположительное подпространство, ортогональное дополнение которого A -неотрицательно.

а5). H_k содержит хотя бы одно k -мерное, неположительное, A -неположительное подпространство, но не содержит $(k+1)$ -мерного A -отрицательного подпространства.

а6). H_k содержит хотя бы одно k -мерное, неположительное, A -неположительное подпространство, ортогональное дополнение которого A -неотрицательно.

а7). H_k содержит хотя бы одно k -мерное, отрицательное, A -неположительное подпространство, но не содержит $(k+1)$ -мерного A -отрицательного подпространства.

а8). H_k содержит хотя бы одно k -мерное, отрицательное, A -неположительное подпространство, ортогональное дополнение которого A -неотрицательно.

а9). H_k содержит хотя бы одно k -мерное, неположительное, A -неположительное, инвариантное относительно A подпространство, но H_k не содержит $(k+1)$ -мерного A -отрицательного подпространства.

а10). H_k содержит хотя бы одно k -мерное, неположительное, A -неположительное, инвариантное относительно A подпространство, ортогональное дополнение которого A -неотрицательно.

а11). H_k содержит хотя бы одно k -мерное, отрицательное, A -неположительное, инвариантное относительно A подпространство, но H_k не содержит $(k+1)$ -мерного A -отрицательного подпространства.

а12). H_k содержит хотя бы одно k -мерное, отрицательное, A -неположительное, инвариантное относительно A подпространство, ортогональное дополнение которого A -неотрицательно.

а13). Неотрицательные элементы пространства H_k A -неотрицательны, а неположительные — A -неположительны.

б1). Найдется непрерывный оператор C пространства H_k , для которого $A = C^*C$.

д2). Спектр оператора A содержит только вещественные, неотрицательные числа.

Теорема 1. а4) влечет а3).

Доказательство. Пусть L — k -мерное A -неположительное подпространство с A -неотрицательным ортогональным дополнением L^\perp . Пусть M

— произвольное подпространство размерности $k + 1$. Из леммы 16 следует существование некоторого элемента $x \in M$ ($x \neq 0$), принадлежащего L^\perp и, следовательно, выполняющего неравенство $(Ax, x) \geq 0$. Значит, M не может быть A -отрицательным.

Аналогично доказывается, что а6) влечет а5); а8) влечет а7); а10) влечет а9); и а12) влечет а11).

Теорема 2. а12) влечет d2).

Доказательство. Пусть L — k -мерное, отрицательное, A -неположительное, инвариантное подпространство с A -неотрицательным ортогональным дополнением L^\perp . Согласно леммы 12 L^\perp тоже инвариантно относительно A .

Положим $H^- = L$, $H^+ = L^\perp$ и введем новое скалярное произведение $[x, y]$ по указанию леммы 5. Используя утверждения этой леммы мы видим, что в полученном гильбертовом пространстве A действует как неотрицательный оператор, т. е. его спектр (в этом гильбертовом пространстве) содержит только вещественные, неотрицательные числа. Отсюда, на основе определения спектры операторов в H_k , вытекает справедливость нашей теоремы.

Теорема 3. b1) влечет a2).

Доказательство. Пусть $A = C^*C$, где C — непрерывный оператор, и пусть L обозначает некоторый A -отрицательный линейал в H_k . Для любого элемента $x \in L$ ($x \neq 0$) имеем $(Cx, Cx) = (Ax, x) < 0$, так что оператор C отображает L взаимно однозначно на некоторый отрицательный линейал. Но, по определению пространства H_k , отрицательный линейал в H_k имеет размерность, не выше k . Поэтому $\dim L \leq k$.

Теорема 4. a11) влечет a4).

Доказательство. Пусть L обозначает k -мерное, отрицательное, A -неположительное, инвариантное относительно A подпространство в H_k , и предположим, что H_k не содержит $(k + 1)$ -мерного A -отрицательного подпространства.

Тогда L^\perp является положительным инвариантным подпространством (см. леммы 4, 8 и 12), не содержащим A -отрицательного подпространства размерности $k + 1$. Применением леммы 17 получим, что L^\perp разложимо в ортогональную прямую сумму A -отрицательного инвариантного подпространства N_1 и A -неотрицательного инвариантного подпространства N_2 , где $0 \leq \dim N_1 \leq k$.

По аналогичным причинам, учитывая A -неположительность подпространства L , имеем представление $L = M_1 \oplus M_2$, где M_1 и M_2 инвариантны, M_1 является A -отрицательным и M_2 — A -нулевым. Более того, на основе лемм 14 и 13, подпространство $N_1 \oplus M_1$ тоже A -отрицательно, так что в частности $0 \leq \dim (N_1 \oplus M_1) \leq k$ согласно нашему предположению.

С другой стороны имеем $\dim (N_1 \oplus M_1 \oplus M_2) \geq \dim (M_1 \oplus M_2) = k$. Следовательно, мы можем выбрать подпространство $M'_1 \subset M_2$ так, чтобы выполнялось равенство $\dim (N_1 \oplus M_1 \oplus M'_1) = k$.

Пусть M'_2 — ортогональное дополнение M'_1 в M_2 : $M_2 = M'_1 \oplus M'_2$. Подпространство $N_1 \oplus M_1 \oplus M'_1$ размерности k есть ортогональная прямая сумма A -отрицательного инвариантного подпространства $N_1 \oplus M_1$ и A -нулевого подпространства M'_1 , итак, в силу лемм 14 и 13, оно является A -неположительным; его ортогональное дополнение есть ортогональная прямая сумма A -неотрицательного инвариантного подпространства N_2 и A -

нулевого подпространства M'_2 , итак является A -неотрицательным. Мы видим, что имеет место свойство а4).

Теорема 5. а13) влечет а12).

Доказательство. Пусть L_1 — произвольное k -мерное отрицательное подпространство в H_k . Его ортогональное дополнение L_2 является положительным подпространством (см. леммы 4 и 8). По условию а13) подпространство L_1 является A -неположительным, а L_2 — A -неотрицательным. Итак, достаточно показать, что L_1 инвариантно.

Относительно разложения $H_k = L_1 \oplus L_2$ (см. лемму 3) оператор A задается операторной матрицей $A = (A_{ij})_{i,j=1,2}$, где A_{ij} действует из L_j в L_i .

Пусть

$$(1) \quad x_1 \in L_1, \quad x_2 \in L_2, \quad (x_1, x_1) = -1, \quad (x_2, x_2) = 1.$$

Тогда для любого числа γ ($|\gamma| = 1$) имеем

$$(x_1 + \gamma x_2, x_1 + \gamma x_2) = 0.$$

Отсюда на основе свойства а13) вытекает, что

$$(A(x_1 + \gamma x_2), x_1 + \gamma x_2) = 0,$$

т. е.

$$(2) \quad (A_{11}x_1, x_1) + \bar{\gamma}(A_{21}x_1, x_2) + \gamma(A_{12}x_2, x_1) + (A_{22}x_2, x_2) = 0.$$

Подставляя в последнем уравнении 1, -1 , i , $-i$ вместо γ , умножая обе части полученных уравнений соответственно на 1, -1 , i , $-i$ и суммируя, имеем:

$$(A_{21}x_1, x_2) = 0.$$

Для фиксированного x_1 это уравнение говорит, что элемент $A_{21}x_1 \in L_2$ ортогонален к произвольно выбранному «нормированному» элементу $x_2 \in L_2$. Отсюда (учитывая, что L_2 положительно) следует, что $A_{21}x_1 = 0$. Так как x_1 — произвольный «нормированный» элемент отрицательного подпространства L_1 , справедливо соотношение

$$A_{21} = 0.$$

Тем самым мы доказали инвариантность подпространства L_1 по отношению к оператору A .

Замечание. Легко проверить следующее уточнение теоремы 5: В случае $\dim H_k > k$ оператор A обладает свойством а13) тогда и только тогда, если $A = \lambda I$, где I — единичный оператор, а λ — неотрицательное число.¹

В самом деле, используя обозначения и результаты предшествующего доказательства, а13) влечет инвариантность L_1 и, в силу леммы 12, инвариантность L_2 тоже, т. е. имеет место не только $A_{21} = 0$, но и

$$A_{12} = 0.$$

¹Теорема 5 в этой уточненной форме была доказана в кандидатской диссертации автора, написанной в 1961 г. Независимо от этого, недавно Р. Кёппе доказал обобщение (уточненной) теоремы на случай комплексного линейного пространства с произвольным невырожденным индефинитным скалярным произведением.

Таким образом, уравнение (2) приобретает вид

$$-(A_{11}x_1, x_1) = (A_{22}x_2, x_2).$$

Левая часть этого уравнения зависит только от x_1 , а правая — только от x_2 . Следовательно, обе части равняются некоторой (вещественной) постоянной λ :

$$-(A_{11}x_1, x_1) = \lambda, \quad (A_{22}x_2, x_2) = \lambda.$$

Учитывая соотношения (1) можем писать

$$(A_{11}x_1, x_1) = \lambda(x_1, x_1), \quad (A_{22}x_2, x_2) = \lambda(x_2, x_2).$$

Очевидно, что последние равенства справедливы и для любых, ненормированных элементов $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$. Отсюда с помощью соотношений $A_{12} = A_{21} = 0$, $L_1 \perp L_2$ вытекает, что $(Ax, x) = \lambda(x, x)$ для всех элементов $x \in H_k$. Так как скалярное произведение не вырождается на H_k , получим, что $A = \lambda I$, и из а13) непосредственно видно, что λ не может быть отрицательным.

Обратно, $A = \lambda I$ ($\lambda \geq 0$) очевидно влечет а13).

§ 3. Две теоремы для частного случая пространства H_1

Теорема 6. В частном случае $k = 1$ свойство а3) влечет а4).

Доказательство. Пусть для пространства H_1 и оператора A выполняется а3).

Если всё пространство A -неотрицательно, то, в частности, ортогональное дополнение любого одномерного A -неположительного (в действительности: A -нулевого) подпространства является A -неотрицательным, так что имеет место а4). Следовательно, в дальнейшем можем предполагать, что H_1 содержит одномерное A -отрицательное подпространство (но, согласно а3), не содержит двумерного A -отрицательного подпространства).

Пусть M_1 — одномерное неположительное инвариантное подпространство оператора A (лемма 11) с ортогональным дополнением M_2 . Возможны два случая.

1. M_1 — отрицательное подпространство, так что $H_1 = M_1 \oplus M_2$ (лемма 3).

Если M_1 является A -отрицательным, то M_2 есть A -неотрицательное подпространство, потому что иначе пространство содержало бы некоторое двумерное A -отрицательное подпространство (см. леммы 14 и 13); поэтому справедливо а4).

Если M_1 является A -неотрицательным, то в M_2 найдется A -отрицательный элемент, так как иначе всё пространство было бы A -неотрицательным (см. леммы 14 и 13). Применяя лемму 17 к части оператора A в положительном инвариантном подпространстве M_2 получим, что M_2 разлагается в ортогональную сумму одномерного A -отрицательного инвариантного подпространства L и некоторого A -неотрицательного инвариантного подпространства N . Ортогональным дополнением L в H_1 является $M_1 \oplus N$, где M_1 и N — A -неотрицательные инвариантные подпространства. Поэтому (см. леммы 14 и 13) L есть одномерное A -отрицательное подпространство с A -неотрицательным ортогональным дополнением.

2. M_1 — нулевое подпространство. В этом случае M_1 является A -неположительным (а именно: A -нулевым), так как для $x \in M_1$ имеем $(Ax, x) = \lambda(x, x) = \lambda \cdot 0 = 0$ (здесь λ — собственное значение оператора A в M_1). Поэтому в случае A -неотрицательности подпространства M_2 подпространство M_1 удовлетворяет требованию а4).

Итак, можем предполагать, что M_2 содержит одномерное A -отрицательное подпространство.

Нулевое подпространство ортогонально к самому себе (см. лемму 2), так что $M_1 \subset M_2$. С другой стороны, $M_1 \perp M_2$. Значит, M_1 принадлежит, и согласно лемме 6 даже совпадает с изотропным подпространством подпространства M_2 . На основе леммы 10 имеем разложение

$$(3) \quad M_2 = M_1 \oplus M'_2,$$

где M'_2 — положительное подпространство (ибо M_2 неотрицательно по лемме 7, и его нулевые элементы входят в M_1 по лемме 2).

Подпространство M'_2 не может быть A -неотрицательным, так как в этом случае всё M_2 было бы A -неотрицательным (см. леммы 14 и 13), в противоречии с только что сделанным предположением. Следовательно, M'_2 содержит одномерное A -отрицательное подпространство.

Если $x_2 \in M'_2$, то $Ax_2 \in M_2$ (потому что M_2 инвариантно; см. лемму 12), т. е. имеет место представление

$$Ax_2 = y_0 + y_2 \quad (y_0 \in M_1, y_2 \in M'_2).$$

Определим операторы A_{02} , A_{22} с помощью формул:

$$A_{02}x_2 = y_0, \quad A_{22}x_2 = y_2.$$

A_{22} , как легко видеть, самосопряженный (ограниченный) оператор в гильбертовом пространстве M'_2 . Для любых $x_2, z_2 \in M'_2$ имеем $(Ax_2, z_2) = (A_{02}x_2 + A_{22}x_2, z_2) = (A_{22}x_2, z_2)$ так что в M'_2 A_{22} -отрицательность равносильна A -отрицательности, A_{22} -ортогональности — A -ортогональности и т. д. В частности, M'_2 содержит одномерное A_{22} -отрицательное подпространство (но не содержит двумерного A_{22} -отрицательного подпространства). Применяя лемму 17 к A_{22} в M'_2 , представим M'_2 в виде

$$(4) \quad M'_2 = L \oplus N,$$

где L — одномерное A_{22} -отрицательное подпространство, инвариантное относительно A_{22} , а N — некоторое A_{22} -неотрицательное подпространство, тоже инвариантное относительно A_{22} .

Согласно вышесказанному, L является и A -отрицательным. Обозначим A -ортогональное дополнение подпространства L в H_1 через F .

Подпространство F является A -неотрицательным, потому что иначе пространство H_1 содержало бы двумерное A -отрицательное подпространство (см. леммы 15 и 13).

Скалярное произведение не вырождается на F . В самом деле, пусть $0 \neq x_0 \in F, x_0 \perp F$. Так как $M_1 \perp L$, из леммы 14 вытекает, что $M_1 \subset F$. Поэтому $x_0 \perp M_1$, значит $x_0 \in M_2$. Мы видели, что M'_2 положительно, т. е. элемент x_0 обязан входить в M_1 , ибо иначе он не был бы ортогонален к самому себе. Но $0 \neq x_0 \in M_1, x_0 \perp F$ влечет $F \subset M_2$ и тем самым $L \dot{+} F \subset M_2$, что невозможно в силу леммы 15 и вырождения скалярного произведения на M_2 .

Благодаря соотношению $F^{\perp\perp} = F$ (см. лемму 9) и A -неотрицательности F нам достаточно показать, что (обычное) ортогональное дополнение F^{\perp} подпространства F одномерно и A -неположительно.

Подпространства L и N ортогональны между собой и инвариантны относительно A_{22} , следовательно они A_{22} -ортогональны (см. лемму 14), т. е. A -ортогональны. Значит, $N \subset F$. С другой стороны мы уже отметили, что $M_1 \subset F$. Следовательно, $F^{\perp} \perp N$ и $F^{\perp} \subset M_2$, или, учитывая разложения (3) и (4), $F^{\perp} \subset M_1 \oplus L$. Так как M_1 является A -нулевым подпространством, а L — A -отрицательным, из лемм 14 и 13 следует, что F^{\perp} A -неположительно.

Одномерность F^{\perp} легко получается из представлений $F \dot{+} F^{\perp} = H_1$, $F \dot{+} L = H_1$ (см. леммы 9 и 15) и одномерности подпространства L .

Тем самым доказана теорема 6.

Теорема 7. В частном случае $k = 1$ свойство а6) влечет а10).

Доказательство. Сперва докажем, что если для оператора A в H_1 выполняется условие а6) и M обозначает некоторое инвариантное, одномерное, неположительное, A -неположительное подпространство, то M^{\perp} обязательно A -неотрицательно.

Обозначим через λ собственное значение оператора A в M . Допустим, вопреки утверждению, что для некоторого элемента $z \in M^{\perp}$ имеет место $(Az, z) < 0$.

Элемент z не входит в M , потому что иначе z был ортогонален к самому себе, так что мы имели $(Az, z) = \lambda(z, z) = 0$. Следовательно, линейная оболочка A элемента z и подпространства M является двумерной.

Рассмотрим подпространство L , фигурирующее в условии а6), т. е. одномерное, неположительное, A -неположительное подпространство с A -неотрицательным ортогональным дополнением L^{\perp} . Согласно лемме 16 имеем

$$(5) \quad \dim RL^{\perp} \geq 1.$$

Пусть $v \in RL^{\perp}$, $v = w + \alpha z$ ($w \in M$). Тогда в силу $z \perp w$ имеем:

$$(Av, v) = (Aw, w) + |\alpha|^2(Az, z).$$

С другой стороны, вследствие A -неотрицательности подпространства L^{\perp} , имеет место

$$(Av, v) \geq 0.$$

Учитывая неравенства $(Aw, w) \leq 0$, $(Az, z) < 0$ получим, что $\alpha = 0$, т. е. $v \in M$, $RL^{\perp} \subset M$, и на основе (5) $RL^{\perp} = M$.

Следовательно, $M \subset L^{\perp}$. Таким образом одномерные неположительные подпространства M и L ортогональны между собой. Но тогда они не могут быть линейно независимыми (см. леммы 1 и 6), т. е. $M = L$.

Итак, из $z \in M^{\perp}$ вытекает $z \in L^{\perp}$ и тем самым $(Az, z) \geq 0$. Это противоречит выбору элемента z .

Пусть L — одномерное, неположительное, A -неположительное подпространство с A -неотрицательным ортогональным дополнением L^{\perp} . Пусть N — одномерное неположительное инвариантное подпространство (см. лемму 11) с собственным значением λ . На основе доказанного утверждения достаточно проверить, что если N не удовлетворяет требованию A -неположительности, то существует другое одномерное неположительное инвариантное подпространство M , которое уже A -неположительно.

Итак, пусть N является A -положительным. Выберем элемент $v \in N$ ($v \neq 0$). Тогда $(Av, v) = \lambda(v, v) > 0$ и, в силу неположительности подпространства N отсюда $(v, v) < 0, \lambda < 0$. Можем предполагать, что $(v, v) = -1$.

Мы видим, что N является отрицательным. Следовательно, N^\perp положительно и $H_1 = N \oplus N^\perp$ (см. леммы 4 и 3).

Предположим сначала, что $\dim H_1 = 2$.

Обозначим собственное значение оператора A , принадлежащее одномерному инвариантному подпространству N^\perp (см. лемму 12), через μ . Выберем элемент $w \in N^\perp$, для которого $(w, w) = 1$.

Если $x \in L$ ($x \neq 0$), то в представлении $x = \alpha v + \beta w$ ни α , ни β не обращается в нуль, так как в случае $\alpha = 0$ мы имели бы $(x, x) > 0$, а из $\beta = 0$ вытекало бы $(Ax, x) > 0$, вопреки предположениям относительно L .

Снова пользуясь свойствами подпространства L получим:

$$(x, x) = |\beta|^2 - |\alpha|^2 \leq 0,$$

$$(Ax, x) = (\lambda \alpha v + \mu \beta w, \alpha v + \beta w) = \mu |\beta|^2 - \lambda |\alpha|^2 \leq 0,$$

наконец, для элемента $y = \bar{\beta}v + \bar{\alpha}w \in L^\perp$,

$$(Ay, y) = (\lambda \bar{\beta}v + \mu \bar{\alpha}w, \bar{\beta}v + \bar{\alpha}w) = \mu |\alpha|^2 - \lambda |\beta|^2 \geq 0.$$

Значит, справедливы следующие неравенства:

$$(6) \quad |\alpha|^2 \geq |\beta|^2,$$

$$(7) \quad \lambda |\alpha|^2 \geq \mu |\beta|^2,$$

$$(8) \quad \mu |\alpha|^2 \geq \lambda |\beta|^2.$$

Из (6), (7) на основе $\lambda < 0$ получим $\lambda |\beta|^2 \geq \mu |\beta|^2$, следовательно $\lambda \geq \mu$, ибо $\beta \neq 0$. С другой стороны, из (6), (8) на основе $\lambda < 0$ следует $\mu |\alpha|^2 \geq \lambda |\alpha|^2$, т. е. $\mu \geq \lambda$, так как $\alpha \neq 0$.

Мы показали, что $\mu = \lambda$ и, следовательно, $A = \lambda I$ ($\lambda < 0$), где I — единичный оператор в двумерном пространстве H_1 . Отсюда вытекает, что все подпространства инвариантны, в частности, инвариантным является одномерное неположительное, A -неположительное подпространство L . Итак, L удовлетворяет всем требованиям нашего утверждения.

Перейдем к случаю пространства H_1 произвольной размерности.

Одномерные подпространства L и N не совпадают, ибо одно из них A -неположительно, а другое — A -положительно. Отсюда следует, что прямая сумма $L \dot{+} N = R_1$ существует и двумерна. Подпространство $R_1 \subset H_1$ содержит N , так что согласно леммам 4 и 3 R_1 представимо как ортогональная прямая сумма одномерного отрицательного подпространства N и некоторого положительного подпространства, т. е. R_1 — пространство типа H_1 . В частности, скалярное произведение не вырождается на R_1 .

Исходное пространство разлагается в ортогональную прямую сумму $R_1 \oplus R_2$, где мы положили $R_2 = R_1^\perp$ (см. лемму 9). Соответствующее разложение оператора A на блоки имеет вид

$$A = (A_{ij})_{i,j=1,2},$$

где A_{ij} действует из R_j в R_i .

Очевидно, что A_{11} — самосопряженный оператор в двумерном H_1 -пространстве R_1 . Одномерное неположительное подпространство L содержится в R_1 , для $x \in L$ имеем $(A_{11}x, x) = (Ax, x) \leq 0$ и для $y \in R_1 L^\perp$ имеем $(A_{11}y, y) = (Ay, y) \geq 0$. Далее, R_1 содержит одномерное отрицательное подпространство N , и N инвариантно относительно A и тем более относительно A_{11} . Наконец, для $v \in N (v \neq 0)$ имеем $(A_{11}v, v) = (Av, v) > 0$.

Применяя результат, полученный выше для двумерного пространства, выведем, что $A_{11} = \lambda I_1$, где $\lambda < 0$ и I_1 — единичный оператор пространства R_1 . Следовательно, одномерное, неположительное, A -неположительное подпространство L , как и все подпространства из R_1 , инвариантно относительно A_{11} . Остается показать, что L инвариантно относительно A тоже.

Пусть $x \in L$. Требуется доказать, что $A_{21}x = 0$. Для этого заметим, что $(x, x) = 0$, так как иначе, в силу $(Ax, x) = (A_{11}x, x) = \lambda(x, x)$, неположительности подпространства L и отрицательности числа λ , мы имели бы $(Ax, x) > 0$ в противоречии с предположением об A -неположительности подпространства L .

Итак, для любого элемента $u \in R_2$ и комплексного числа γ выполняется $\gamma x + u \in L^\perp$, и на основе свойств подпространства L имеет место неравенство

$$(A(\gamma x + u), \gamma x + u) \geq 0.$$

Отсюда использованием равенства $(A_{11}x, x) = \lambda(x, x) = 0$ и самосопряженности оператора A вытекает неравенство

$$2 \operatorname{Re} [\gamma(A_{21}x, u)] + (A_{22}u, u) \geq 0.$$

Фиксируя u и оставляя γ переменной известным образом получим, что

$$(9) \quad (A_{21}x, u) = 0.$$

Так как $u \in R_2$ произвольно и на R_2 скалярное произведение не вырождается (см. лемму 9), уравнение (9) показывает, что $A_{21}x = 0$.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] BOGNÁR, J.: "Non-negativity properties of operators in spaces with indefinite metric." *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, series A. I.*, no. 336/10 (1963).
- [2] Иохвидов, И. С. — КРЕЙН, М. Г.: "Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, I." *Труды Московского математического общества* 5 (1956) 367—432.

SOME CONNECTIONS BETWEEN NON-NEGATIVITY PROPERTIES OF OPERATORS IN SPACES WITH INDEFINITE METRIC

by

J. BOGNÁR

Abstract

A space of type H_k (where k is some natural number) is a complex linear space with a hermitian bilinear functional (x, y) (the "inner product" of the elements $x, y \in H_k$) satisfying the following axioms:

I. 0 is the only element orthogonal to the whole space.

II. H_k contains at least one negative subspace of dimension k , but no one of dimension $k + 1$. (A subspace M is said to be negative if $(x, x) < 0$ for every $0 \neq x \in M$.)

III. There can be found at least one negative subspace H^- of dimension k whose orthogonal complement H^+ is complete with respect to the norm $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Throughout the paper A denotes a continuous selfadjoint operator in a space H_k i.e. an everywhere defined operator satisfying $(Ax, y) = (x, Ay)$ for every $x, y \in H_k$.

A subspace $L \subset H_k$ is said to be A -negative if $(Ax, x) < 0$ for every $0 \neq x \in L$. The notion of A -non-positive or A -non-negative subspace may be introduced in a similar way.

In the present paper the proofs of some theorems stated in [1] are given. For discussion we refer to [1]. We mention the following results.

If in a space H_k ($\dim H_k > k$) for a selfadjoint operator A $(x, x) \geq 0$ implies $(Ax, x) \geq 0$ and $(x, x) \leq 0$ implies $(Ax, x) \leq 0$, then $A = \lambda I$ where I denotes the identity operator and $\lambda \geq 0$ (Theorem 5 and Remark).

If a space H_1 contains a 1-dimensional A -non-positive subspace but does not contain any 2-dimensional A -negative subspace, then H_1 contains a 1-dimensional A -non-positive subspace with A -non-negative orthogonal complement (Theorem 6).

If a space H_1 contains a 1-dimensional, non-positive, A -non-positive subspace with A -non-negative orthogonal complement, then at least one of the 1-dimensional non-positive invariant subspaces of A is also A -non-positive and has A -non-negative orthogonal complement (Theorem 7).

ÜBER DIE REKURSIVITÄT DER BEGRIFFE DER MATHEMATISCHEN GRAMMATIKEN

von

RÓZSA PÉTER

Einleitung

1. Die natürlichen Zahlen

0, 1, 2, 3, ...

werden von 0 ausgehend durch sukzessive „Nachfolgerbildung“ (d.h. Weiterzählen um 1) gebildet. Daher ist die natürlichste Definition einer zahlentheoretischen Funktion (einer für natürliche Zahlen definierten Funktion) die sogenannte *primitive Rekursion*, welche den für 0 angenommenen Funktionswert angibt, ferner die Art, auf welcher aus einem Funktionswert der Funktionswert an der folgenden Stelle berechnet werden kann. Durch endlichmalige Anwendung dieser einfachen Definitionsart nebst Substitutionen kann man von 0 und von der Nachfolgerfunktion ausgehend auch die verwickelten gebräuchlichen Funktionen der elementaren Zahlentheorie erhalten (z.B. die n -te Primzahl als Funktion von n). Auch komplizierter aussehende Definitionsarten der Zahlentheorie, wie z.B. die *simultane rekursive Definition* mehrerer Funktionen, oder die *Wertverlaufsrekursion*, wobei zur Definition des Funktionswertes an einer Stelle beliebig viele Werte des früheren Wertverlaufs verwendet werden können, lassen sich auf primitive Rekursionen und Substitutionen auflösen. Es geben aber auch solche Ausdehnungen des Rekursionsbegriffes (z.B. wobei die Rekursion zugleich nach mehreren Variablen verläuft), die bereits hinausführen von der Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen. All diese sind Spezialfälle des von KLEENE eingeführten Begriffes der *allgemeinen Rekursion*.¹

2. Auf verschiedenen Gebieten der Mathematik hat man mit Mengen zu tun, die ähnlich wie die natürlichen Zahlen aufgebaut werden können: von gewissen „Ausgangselementen“ ausgehend (diese spielen die Rolle der 0), durch endlichmalige Anwendung gewisser Funktionen (welche die Rolle der Nachfolgerfunktion spielen). Auch auf solchen „zahlenartig aufbaubaren Mengen“ bieten sich als die natürlichsten Definitionsarten für Funktionen die (sinngemäss

¹Siehe: PÉTER, R., *Rekursive Funktionen*. (Budapest, 1957), 2-te Auflage.

übertragenen) Rekursionen, und für diese gelten ähnliche Sätze wie in der Zahlentheorie.²

3. Z.B. entsteht formal betrachtet ein Wort aus dem (üblich durch A bezeichneten) „leeren Wort“ durch sukzessive Anknüpfung je eines Buchstaben (hier ist belanglos, dass so meistens sinnlose Worte entstehen). Wird eine Menge beliebiger Zeichen als „Alphabet“ angegeben, so enthält die darauf beruhende „Wortmenge“ als einziges Ausgangselement A , und als Nachfolgerfunktionen dienen die Anknüpfungen der einzelnen Buchstaben des gegebenen Alphabets. Die Wortmengen können vielfach angewandt werden. Ich habe z.B. bewiesen³, dass die Begriffe der für Programmierung der Rechenautomaten konstruierten Sprache „Algol 60“ auf einer geeigneten Wortmenge primitiv-rekursiv sind. Das bezügliche „Alphabet“ enthält ausser Buchstaben, Ziffern, Zeichen für logische Werte, Operationszeichen, Klammern und Trennzeichen auch einige fett gedruckten Worte und sogar Wortfolgen, die als einzige „Buchstaben“ des „Alphabets“ zu betrachten sind (z.B. **else** oder **go to**).

Da die grammatischen Gebilde (z.B. Sätze), die in dieser Arbeit betrachtet werden, durch Nacheinandersetzung von Worten entstehen, so werden sämtliche „Buchstaben“ des hier verwendeten „Alphabets“ eigentlich Worte sein: das „Alphabet“ wird eigentlich ein Vokabular sein. (Freilich können die einzelnen Worte des Vokabulars durch je einen Buchstaben, z.B. durch v_1, v_2, v_3, \dots bezeichnet werden.)

4. Es ist eine neue Tendenz in der Grammatik, die Eigenschaft „grammatisch richtiger Satz zu sein“ genau so exakt zu definieren, wie das in der Mathematik für „wohlgebildete Formeln“ geschieht. In vorliegender Arbeit beweise ich, auf Anregung von L. KALMÁR, dem ich die klare Formulierung der mathematischen Grammatiken verdanke, dass diese Eigenschaft sowohl in der „kategorialen Grammatik“⁴ als auch in der „Satzstruktur-Grammatik“⁵ in der entsprechenden Wortmenge primitiv-rekursiv ist, in dem Sinne, dass es eine primitiv-rekursive Funktion gibt, die für grammatisch richtige Sätze⁶ und nur für solche den Wert A annimmt; ferner, dass die grammatisch richtigen Sätze der CHOMSKY-schen „Transformations-Grammatik“ (neben sinngemässen Bedingungen) in der entsprechenden Wortmenge rekursiv abzählbar sind, in dem Sinne, dass es eine rekursive Funktion gibt, welche als Werte sämtliche grammatisch richtige Sätze und nur solche annimmt.

Der Gedankengang des § 2 ergibt auch allgemein, dass die Hilfsbegriffe einer beliebigen „Metaalgol-Sprache“, falls sie überhaupt definiert sind, und-

² PÉTER, R., „Über die Verallgemeinerung der Theorie der rekursiven Funktionen für abstrakte Mengen geeigneter Struktur als Definitionsbereiche“, *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, I. Teil **12** (1961) S. 271—314; II. Teil **13** (1962) S. 1—24; Berichtigungen dazu in: PÉTER, R., „Über die Primitiv-Rekursivität einiger den Aufbau von Formeln charakterisierenden Wortfunktionen“, *Ebenda* **14** (1963) S. 149—172.

³ PÉTER, R., „Primitiv-rekursive Wortbeziehungen in der Programmierungssprache ‘Algol 60’“, *Publications of the Math. Inst. of the Hungarian Acad. of Sciences* **6** (1961) S. 137—144.

⁴ Siehe z.B.: BAR-HILLEL, Y., GAIFFMAN, C., SHAMIR, E.: „On categorial and phrase-structure grammars:“ *Bulletin of the Research Council of Israel* **9 F** (1960) S. 1—16.

⁵ Siehe z. B.: CHOMSKY, N., *Syntactic Structures* (S-Gravenhage, 1957).

⁶ Z.B. ist auch ein Satz wie: „Die schlechtgelaunte Gleichung duftet“ — grammatisch richtig.

zwar derart zirkelfrei, dass sie sich nicht selber generieren, primitiv-rekursiv sind.

5. Da sich die folgenden Betrachtungen in Wortemengen vollziehen, zähle ich hier die zur Verwendung kommenden Ergebnisse bezüglich einer Wortmenge M_A über ein Alphabet A der in² zitierten Arbeiten auf:

1) Als Vorgänger eines „Wortes“ gelten seine zusammenhängende Bestandteile, und für diese wird eine zweckmässige Reihenfolge fixiert. Z.B. sind in der Wortmenge M_A für $a_1, a_2, a_3 \in A$ die Vorgänger des „Wortes“ $x = a_1a_2a_3$ in dieser Reihenfolge:

$$A, a_1, a_2, a_1a_2, a_3, a_2a_3, a_1a_2a_3 = x.$$

Die von x verschiedenen Vorgänger sind „echte Vorgänger“ von x und unter diesen gelten a_1a_2 und a_2a_3 , welche nicht echte Vorgänger echter Vorgänger von x sind, als seine „unmittelbaren Vorgänger“; diese enthalten insgesamt als Vorgänger sämtliche echte Vorgänger von x . Die Beziehung „ y ist ein Vorgänger (bzw. echter Vorgänger) von x “ wird durch

$$y \preceq x \quad (\text{bzw. } y < x)$$

bezeichnet.

2) In der Wortmenge M_A lautet die primitiv-rekursive Definition einer Funktion $f(x)$:

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(A) = k, \\ \text{für beliebiges } a \in A \\ f(a) = k_a \\ \text{und für beliebige } a, b \in A \\ f(axb) = g_b(ax, xb, f(ax), f(xb)), \end{array} \right.$$

wo k und k_a für jedes $a \in A$ konstante Elemente von M_A und die g_b für jedes $b \in A$ bereits definierte Funktionen sind. (ax und xb sind die unmittelbaren Vorgänger von axb .) Dabei können auch Parameter auftreten: Variablen, die bei der Rekursion unverändert bleiben.

Eine Wortefunktion in M_A ist primitiv-rekursiv, wenn sie von dem leeren Wort A und von den Anknüpfungsfunktionen xa (wo $a \in A$) ausgehend durch endlich viele primitive Rekursionen und Substitutionen aufgebaut werden kann.

Eine Wortebeziehung $B(x_1, \dots, x_n)$ in M_A ist primitiv-rekursiv, wenn ihre charakteristische Funktion primitiv-rekursiv ist, welche etwa wie folgt definiert werden kann:

$$b(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} A, & \text{falls } B(x_1, \dots, x_n) \\ a_0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei a_0 ein festgewähltes Element des Alphabets A ist.

3) Die natürlichen Zahlen

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

können in M_A etwa durch

$$A, a_0, a_0a_0, a_0a_0a_0, \dots$$

Man sieht, dass $\bar{f}(x)$ die Werte von $f(x)$ für alle Vorgänger der Stelle x zusammenfasst.

Wird in der Definition (D) $f(ax)$ und $f(xb)$ durch $\bar{f}(ax)$ bzw. $\bar{f}(xb)$ ersetzt, so wird aus (D) eine Wertverlaufsrekursion. Weder die Wertverlaufsrekursion, noch die simultane Rekursion mehrerer Funktionen führt von der Klasse der in M_A primitiv-rekursiven Funktionen heraus.

§ 1. Die kategoriale Grammatik

6. Hier hält man vor Augen ein (natürlich endliches) Vokabular, das sämtliche Worte (genauer Wortformen, d.h. z.B. nicht nur „Haus“, sondern auch „Hauses“, „Häuser“, usw.) einer Sprache enthält; wobei neben jedem Wort endlich viele „einfache Kategorien“ aufgezählt werden, worunter dasjenige Wort fällt. Diese einfachen Kategorien können nicht nur „primitive Kategorien“ (wie „Hauptwort“, „Mehrzahl“, usw.) sein, sondern allgemein entstehen sie aus den primitiven Kategorien, die etwa in einem Anhang zum Vokabular aufgezählt werden, durch endlichmalige Anwendung zweier Operationen, welche wie folgt bezeichnet werden:

$$(x/y) \text{ bzw. } (y \setminus x),$$

da sie sich ähnlich wie die links- bzw. rechtsseitige Division in der Algebra verhalten: bei Nacheinandersetzung von einfachen Kategorien (als Multiplikation) muss nämlich nach Definition

$$(x/y) y = x \text{ und } y(y \setminus x) = x$$

gelten. Nämlich einer Kette (Nacheinandersetzung) $w_1 w_2 \dots w_n$ von Worten lässt man Kategorien, d.h. Ketten (auch eingliedrige) von einfachen Kategorien zuordnen (und zwar erstens sämtliche Ketten je einer der einfachen Kategorien, die der Reihe nach zu w_1, w_2, \dots, w_n gehören); und dabei werden (x/y) bzw. $(y \setminus x)$ als Kategorien solcher Wortketten erklärt, die vor bzw. nach eine Wortkette der Kategorie y gesetzt, eine Wortkette der Kategorie x erzeugen. Wird z.B. (nach Muster der Kategorien „Ausdruck“ und „Formel“ in den mathematischen Formelsprachen) eine Kategorie solcher Wortketten, die einen grammatisch richtigen Satz (kurz: „Satz“) bilden, mit s bezeichnet, und solcher Wortketten, die in einem Satz Eigennamen vertreten können, ohne die Satz-Beschaffenheit zu zerstören, mit n , so ist $(n \setminus s)$ eine Kategorie solcher Wortketten, die nach eine Wortkette der Kategorie n gesetzt einen Satz erzeugen. Z.B. ist „Hans arbeitet“ ein Satz, und auch dann wird daraus ein Satz, wenn darin „Hans“ durch eine beliebige Wortkette der Kategorie n (z.B. durch „der tüchtige Schmied“) ersetzt wird; daher ist „arbeitet“ der Kategorie $(n \setminus s)$.

So charakterisieren die Kategorien einer Wortkette die Rolle dieser Wortkette in Satzbildungen; und da diese Rolle verschieden sein kann, kommen einer Wortkette auch mehrere Kategorien zu.

Kommt in einer Kategorie einer Wortkette ein Teil der Form $(x/y)y$ bzw. $y(y \setminus x)$ vor, und wird dieser durch x ersetzt, so sagt man, dass eine „Kürzung“ durchgeführt wurde. Mit einer Kategorie werden auch alle daraus durch Kürzungen entstehende Kategorien einer Wortkette zugeordnet.

So erhält man in der kategorialen Grammatik die Eigenschaft „Satz zu sein“ durch folgende Definition: Unter den primitiven Kategorien gibt es eine ausgezeichnete s , und eine Wortkette ist ein Satz, wenn unter den ihr zugeordneten Kategorien auch s vorkommt, d.h. wenn eine ihr zugeordnete Kategorie sich zu s kürzen lässt. Und eine Sprache heisst kategorial, wenn bei geeigneter Wahl der primitiven Kategorien (darunter s) und bei geeigneter Zuordnung von aus diesen aufgebauten einfachen Kategorien zu den Wortformen ihres Vokabulars, ihre Sätze mit den eben als Sätze definierten Wortketten übereinstimmen. Man sieht leicht ein, dass die Formelsprachen der Mathematik kategorial sind; ob es auch unter den natürlichen Sprachen kategoriale gibt, ist noch unbekannt.

7. In exakter Fassung bedeutet eine kategoriale Grammatik ein geordnetes Quadrupel

$$(V, P, s, Z),$$

wobei V („Vokabular“) und P („Menge der primitiven Kategorien“) je eine beliebige nicht leere endliche Menge, s ein ausgezeichnetes Element von P („Satz“), und Z die Menge von Zuordnungen ist, welche je einem Element von V endlich viele Elemente der durch P mit den Operationen (x/y) und (y/x) generierten Menge E („Menge der einfachen Kategorien“) zuordnet.

Die Elemente e von E sind nach Definition entweder Elemente von P , oder sie besitzen eine der Formen $e = (x/y)$, $e = (y/x)$, wobei x und y auch Elemente von E sind; diese sollen die „unmittelbaren Konstituenten“ von e genannt werden. Sämtliche Konstituenten von e sind: e selbst, seine unmittelbaren Konstituenten, die unmittelbaren Konstituenten seiner unmittelbaren Konstituenten, usw.; es ist klar, dass jedes Element von E endlich viele Konstituenten besitzt (ein Element von P enthält als einzige Konstituente sich selbst).

Da Z jedem Element der endlichen Menge V endlich viele Elemente von E zuordnet, so kommen dabei insgesamt nur endlich viele Elemente von E zur Verwendung, und diese besitzen insgesamt nur endlich viele Konstituenten; seien diese

$$k_1, k_2, \dots, k_r.$$

Unter diesen muss unbedingt auch s auftreten, sonst könnten in der betrachteten Sprache überhaupt keine Sätze vorkommen.

Zu den folgenden Untersuchungen wird die Wortmenge M_V über das Alphabet V zugrunde gelegt. Dann sind die (Wortformen bedeutenden) Elemente des Vokabulars „Buchstaben“ des Alphabets V , und die in Nr. 6 behandelten Wortketten sind „Worte“ der Wortmenge M_V .

Jedem der „Buchstaben“ des Alphabets V wurden durch die Elemente von Z endlich viele E -Elemente zugeordnet. Werden die „Buchstaben“ eines Elements w von M_V durch je einem der ihnen zugeordneten E -Elementen ersetzt, so erhält man eine der zu w gehörigen Kategorien; wird das auf alle mögliche Art vollzogen, und werden auch alle gekürzten Formen der erhaltenen Kategorien hinzugenommen, so ergeben diese insgesamt sämtliche zu w gehörigen Kategorien.

8. Sei v_0 ein beliebiges festgewähltes Element von V . Ferner sei k ein beliebiges der in Nr. 7 eingeführten E -Elementen k_1, \dots, k_r . Unser Ziel ist, in M_V eine Funktion $f_k(x)$ zu definieren, welche den Wert \mathcal{A} oder v_0 annimmt, je

nachdem k unter den zu x gehörigen Kategorien vorkommt oder nicht. Im Fall $k = s$ ist ja $f_k(x)$ die charakteristische Funktion der Eigenschaft „Satz zu sein“. Tritt ein $f_{k^*}(x)$ auf, wo k^* nicht unter k_1, \dots, k_r vorkommt, so soll darunter die Konstante v_0 verstanden werden.

Für das leere Element von M_V kann $f_k(x)$ als v_0 definiert werden.

Seien

$$u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \dots, u_{n_k}^{(k)}$$

diejenigen Elemente von V , welchen die Kategorie k zugeordnet wurde (diese können aus den endlich vielen Zuordnungen herausgesucht werden). So beginnt die Definition von $f_k(x)$ mit

$$f_k(\Lambda) = v_0$$

und für beliebiges $v \in V$

$$f_k(v) = \begin{cases} \Lambda, & \text{falls } v = u_1^{(k)} \vee v = u_2^{(k)} \vee \dots \vee v = u_{n_k}^{(k)} \\ v_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Besteht ein $x \in M_V$ aus mehreren „Buchstaben“, so kann ihm die einfache Kategorie k nur so zugeordnet sein, dass man durch Kürzungen einer zu x gehörigen Kategorie zu k gekommen ist, und dabei musste die letzte Kürzung darin bestehen, dass entweder für ein $(k/k_i)k_i$ oder für ein $k_i(k_i/k)$ das k gesetzt wurde. (Da jede Kürzung zu einer Konstituente einer der betroffenen E -Elementen führt, und auch die Konstituenten der Konstituenten eines E -Elementes e Konstituenten von e sind, muss k_i und auch (k/k_i) bzw. (k_i/k) unter k_1, \dots, k_r vorkommen.) So muss x der Form $x = y_1 y_2$ sein, wo y_1 der Kategorie (k/k_i) und y_2 der Kategorie k_i , oder y_1 der Kategorie k_i und y_2 der Kategorie (k_i/k) ist. So gilt für $t_1, t_2 \in V$

$$f_k(t_1 x t_2) = \begin{cases} \Lambda, & \text{falls } \bigvee_{i=1}^r \{ (E y_1) (E y_2) [y_1 \leq t_1 x \& y_2 \leq x t_2 \& \\ & \& t_1 x t_2 = y_1 y_2 \& \\ & \& ((f_{(k/k_i)}(y_1) = \Lambda \& f_{k_i}(y_2) = \Lambda) \vee \\ & \vee (f_{k_i}(y_1) = \Lambda \& f_{(k_i/k)}(y_2) = \Lambda))] \} \\ v_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wird in den Definitionen von $f_k(\Lambda)$, $f_k(v)$ und $f_k(t_1 x t_2)$ der Reihe nach k_1, k_2, \dots, k_r für k gesetzt, so erhält man, wie man leicht sieht, eine simultane Wertverlaufsrekursion für die Funktionen

$$f_{k_1}(x), f_{k_2}(x), \dots, f_{k_r}(x).$$

Diese kann genau so, wie ich dies an einem Beispiel in meiner in Fusstone³ zitierten Arbeit ausführlich durchgeführt habe, auf primitiv-rekursive Definitionen der einzelnen Funktionen aufgelöst werden. Da nun unter diesen Funktionen auch $f_s(x)$ vorkommt, und diese die charakteristische Funktion der Eigenschaft „Satz zu sein“ ist, so ist diese Eigenschaft in einer kategorialen Grammatik tatsächlich primitiv-rekursiv.

9. Es ist klar, dass alles genau so geht, wenn nicht nur ein einziges s , sondern beliebig viele (natürlich endlich viele) s_1, \dots, s_m ausgezeichnet werden

(diese können z.B. verschiedene Satzarten bedeuten), und auch dann, wenn unter diesen nicht nur primitive, sondern auch beliebige einfache Kategorien vorkommen.

Kommen darunter auch nicht-einfache Kategorien vor, so muss jede von diesen der Form

$$s = k_{i_1} k_{i_2} \dots k_{i_e}$$

sein, wo i_1, i_2, \dots, i_e unter $1, 2, \dots, r$ vorkommende Zahlen sind, und die Definitionsgleichungen

$$f_s(t_1 x t_2) = \begin{cases} A, & \text{falls } (Ey_1) \dots (Ey_e) [y_1 \leq t_1 x \& \dots \& y_{e-1} \leq t_1 x \& \\ & \& y_e \leq x t_2 \& t_1 x t_2 = y_1 y_2 \dots y_e \& \\ & \& f_{k_{i_1}}(y_1) = A \& \dots \& f_{k_{i_e}}(y_e) = A] \\ v_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

können zu den bisherigen hinzugenommen werden, ohne die simultane Wertverlaufsrekursionsbeschaffenheit der Definition zu stören.

§ 2. Die Satzstruktur-Grammatik

10. Hier handelt es sich um ähnliche Definitionen wie im „Metaalgor“, mit der Abweichung, dass hier das Zeichen $::=$ als „ist nach einer der möglichen Definitionen“ zu lesen ist. Z.B. lautet eine solche Definition des arithmetischen Ausdrucks (wobei, wie üblich, x' den Nachfolger von x bezeichnet, und $\langle \text{Ausdruck} \rangle$ keinen konkreten, sondern einen beliebigen Ausdruck bedeutet; ähnliches gilt auch für die anderen Anwendungen solcher spitzigen Klammern; es ist belanglos, dass CHOMSKY eine andere Bezeichnung statt spitzigen Klammern verwendet, und auch die Spazien zwischen den Worten irgendwie bezeichnet hat):

$\langle \text{Ausdruck} \rangle ::= 0$
 $\langle \text{Ausdruck} \rangle ::= \langle \text{Variable} \rangle$
 $\langle \text{Ausdruck} \rangle ::= \langle \text{Ausdruck} \rangle'$
 $\langle \text{Ausdruck} \rangle ::= (\langle \text{Ausdruck} \rangle \langle \text{Zeichen einer zweigliedrigen Operation} \rangle \langle \text{Ausdruck} \rangle)$
 $\langle \text{Zeichen einer zweigliedrigen Operation} \rangle ::= +$
 $\langle \text{Zeichen einer zweigliedrigen Operation} \rangle ::= \cdot$
 $\langle \text{Variable} \rangle ::= \langle \text{Buchstabe} \rangle$
 $\langle \text{Variable} \rangle ::= \langle \text{Buchstabe} \rangle \langle \text{Index} \rangle$
 $\langle \text{Buchstabe} \rangle ::= a$
 $\langle \text{Buchstabe} \rangle ::= b$
 $\dots\dots\dots$
 $\langle \text{Buchstabe} \rangle ::= z$
 $\langle \text{Index} \rangle ::= \langle \text{von 0 verschiedene untere Ziffer} \rangle$
 $\langle \text{Index} \rangle ::= \langle \text{Index} \rangle \langle \text{untere Ziffer} \rangle$
 $\langle \text{untere Ziffer} \rangle ::= 0$
 $\langle \text{untere Ziffer} \rangle ::= \langle \text{von 0 verschiedene untere Ziffer} \rangle$
 $\langle \text{von 0 verschiedene untere Ziffer} \rangle ::= 1$
 $\dots\dots\dots$
 $\langle \text{von 0 verschiedene untere Ziffer} \rangle ::= 9$

CHOMSKY versucht ähnlich den „Satz“-Begriff der natürlichen Sprachen durch Abbau seiner Struktur bis auf konkrete Worte eines Vokabulars zu definieren.

11. So ist in exakter Fassung eine Satzstruktur-Grammatik ein geordnetes Quadrupel

$$(T, H, s, P),$$

wo T (das „terminale Vokabular“ für Worte, die für sich stehen) und H („Hilfsvokabular“ für die Hilfsbegriffe in spitzigen Klammern) beliebige endliche, nicht leere Mengen sind, und s ($\langle \text{Satz} \rangle$) ein ausgezeichnetes Element von H ist. Ferner ist P eine endliche Menge von Definitionsgleichungen im Sinne der „möglichen Gleichheit $::=$ “, die Produktionen genannt werden. Genau formuliert hat eine Produktion die Form

$$w ::= w_1 w_2 \dots w_n,$$

wo $w \in H$ und $w_1, w_2, \dots, w_n \in T + H$.

Jeder Hilfsbegriff muss definiert werden, daher kommt jedes Element von H auf der linken Seite von $::=$ mindestens eines Elementes von P vor. Seien sämtliche Hilfsbegriffe

$$h_1, h_2, \dots, h_l.$$

Sind für ein $t \in T$ die Produktionen

$$h_{i_1} ::= t$$

$$h_{i_2} ::= t$$

$$\dots\dots\dots$$

$$h_{i_r} ::= t$$

Elemente von P , dann sollen zu t im Vokabular T diese Kategorien $k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_r}$ zugeordnet werden.

Eine Kette $w_1 w_2 \dots w_n$ mit $w_1, w_2, \dots, w_n \in T + H$ soll eine „Konstruktion“ genannt werden, und n die Ordnung dieser Konstruktion.

Man sagt, eine Konstruktion ψ wird durch die Konstruktion $\varphi = v_1 \dots v_m$ „unmittelbar generiert“, falls für ein $1 \leq i \leq m$

$$\psi = v_1 \dots v_{i-1} w_1 \dots w_n v_{i+1} \dots v_m$$

ist, wobei

$$v_i ::= w_1 \dots w_n$$

unter den Elementen von P vorkommt. Und eine Konstruktion ψ wird durch eine Konstruktion φ „generiert“, wenn es eine Folge

$$(*) \quad \varphi_1 = \varphi, \varphi_2, \dots, \varphi_r = \psi$$

von Konstruktionen gibt, wobei φ_i für $i = 2, 3, \dots, r$ durch φ_{i-1} unmittelbar generiert wird.

Eine Konstruktion $w_1 w_2 \dots w_n$ heisst „terminal“, wenn $w_1, w_2, \dots, w_n \in T$, also wenn darin schon keine Hilfsbegriffe vorkommen.

Nun wird in einer Satzstruktur-Grammatik eine Konstruktion „Satz“ genannt, falls sie terminal ist, und durch s generiert wird. Auch das ist bis heute nicht geklärt, ob es zu einer natürlichen Sprache eine Satzstruktur-Grammatik gibt, deren Sätze mit den Sätzen der betrachteten natürlichen Sprache übereinstimmen.

12. Damit die Definition des „Satz“-es nicht zirkelhaft ausfallen soll, muss die Bedingung gestellt werden, dass kein Element von H sich selbst generieren soll.

Da nach Definition die Ordnung einer generierten Konstruktion nie kleiner als die Ordnung der generierenden Konstruktion sein kann, könnte ein $h_{i_1} \in H$ sich selber nur durch eine Folge aus Elementen von P

$$(**) \quad h_{i_1} :: = h_{i_2}, \quad h_{i_2} :: = h_{i_3}, \dots, h_{i_r} :: = h_{i_{r+1}}$$

generieren, wo $h_{i_{r+1}} = h_{i_1}$ ist. (Natürlich kann hier auch $r = 1$, also eine einzige Produktion $h_{i_1} :: = h_{i_1}$ stehen.) Es muss also verlangt werden, dass keine solche Elementenfolge in P vorkommen soll. Auch für $h_{i_{r+1}} \neq h_{i_1}$ darf keine solche Elementenfolge in P existieren, falls $r \geq l$ ist, weil dabei unter $r + 1$ Indizes i_1, \dots, i_{r+1} unbedingt auch gleiche auftreten müssen, und z.B. für $i_u = i_v$ mit $1 \leq u < v \leq r + 1$ würde mittels eines Teils der Produktionsfolge $(**) h_{i_u}$ durch sich selber generiert.

Nach dieser Bedingung kann eine generierende Konstruktionenfolge der Art $(*)$ in Nr. 11 nur für $j \leq l$ mit

$$\varphi_1 = h_{i_1}, \quad \varphi_2 = h_{i_2}, \dots, \varphi_j = h_{i_j}$$

beginnen; fortgesetzt werden kann es dann entweder durch ein Element von T , oder durch eine Konstruktion mindestens 2-ter Ordnung. Und unbedingt kann es fortgesetzt werden, da die Forderung gestellt wurde, dass jedes $h_i \in H$ an der linken Seite von $:: =$ mindestens eines Elementen von P vorkommen muss.

13. Die in P auftretenden Produktionen geben nur je eine mögliche Definition je eines Hilfsbegriffes h_i . Die vollständige Definition eines h_i ist eine Alternative: sind die rechten Seiten von $:: =$ in jenen Produktionen, in welchen auf der linken Seite h_i steht, die (eventuell vorkommenden) terminalen Konstruktionen

$$\omega_1^{(i)}, \dots, \omega_{r(i)}^{(i)}$$

und nicht-terminalen Konstruktionen

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(i)} &= \omega_{1,1}^{(i)} h_{1,1}^{(i)} \omega_{1,2}^{(i)} h_{1,2}^{(i)} \dots \omega_{1,r_1^{(i)}}^{(i)} h_{1,r_1^{(i)}}^{(i)} \omega_{1,r_1^{(i)}+1}^{(i)} \dots \\ \dots, \varphi_{j_i}^{(i)} &= \omega_{j_i,1}^{(i)} h_{j_i,1}^{(i)} \dots h_{j_i,r_{j_i}^{(i)}}^{(i)} \omega_{j_i,r_{j_i}^{(i)}+1}^{(i)}, \end{aligned}$$

wo jedes h mit beliebigen Indizes eines der h_1, \dots, h_l ist, und jedes ω mit beliebigen Indizes entweder leer oder eine terminale Konstruktion ist, so ist

$$h_i = \omega_1^{(i)} \text{ oder } \dots \text{ oder } \omega_{r(i)}^{(i)} \text{ oder } \varphi_1^{(i)} \text{ oder } \dots \text{ oder } \varphi_{j_i}^{(i)}.$$

Bestehen hier einige der $\varphi_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \dots, \varphi_{j_i}^{(i)}$ aus je einem einzigen h -Element von H , so können diese durch die diese Elemente definierende Alternativen ersetzt werden, und so wird h_i durch eine eventuell mehrgliedrige Alternative definiert. Darauf kann dasselbe wiederholt werden, usw., aber nur in höchstens

l Schritten, da sonst eine in Nr. 12 ausgeschlossene generierende Konstruktionenfolge vorhanden wäre. So kann man annehmen, dass bereits in der obigen vollständigen Definition von h_i jedes $\varphi_u^{(i)}$ eine Konstruktion mindestens 2-ter Ordnung ist, so dass jedes darin vorkommende $h \in H$ ein echter Bestandteil von ihm ist.

14. Nun kommt es darauf an, die charakteristische Funktion $g_i(x)$ der Eigenschaft „ein Hilfsbegriff h_i zu sein“ d.h. „durch h_i generierbar zu sein“ für $i = 1, 2, \dots, l$ in der Wortemenge M_T über das Alphabet T als primitiv-rekursiv zu definieren, da unter diesen Hilfsbegriffen auch das ausgezeichnete s („Satz“) vorkommt.

Sei auch hier

$$g_i(A) = t_0,$$

wo t_0 ein festgewähltes Element von T bezeichnen soll.

Seien ferner

$$t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \dots, t_n^{(i)}$$

diejenigen Elemente von T , welchen nach Nr. 11 die Kategorie h_i zugeordnet wurde. Dann gilt für ein beliebiges $t \in T$

$$g_i(t) = \begin{cases} A, & \text{falls } t = t_1^{(i)} \vee t = t_2^{(i)} \vee \dots \vee t = t_n^{(i)} \\ t_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn endlich die in Nr. 13 angegebene vollständige Definition von h_i in Betracht gezogen, und die charakteristische Funktion von „ein Hilfsbegriff $h_{c,u}^{(i)}$ zu sein“ für $c = 1, 2, \dots, j_i$; $u = 1, 2, \dots, r_c^{(i)}$ mit $g_{c,u}^{(i)}$ bezeichnet wird, so ist für beliebige $t_1, t_2 \in T$

$$g_i(t_1 x t_2) = \begin{cases} A, & \text{falls } t_1 x t_2 = \omega_1^{(i)} \vee \dots \vee t_1 x t_2 = \omega_{r_\omega}^{(i)} \vee \\ & \vee \bigvee_{c=1}^{j_i} \{ (E y_1) (E y_2) \dots (E y_{r_\phi}) [y_1 \leq t_1 x \& \\ & \& y_2 \leq t_1 x \& \dots \& y_{r_\phi} \leq x t_2 \& \\ & \& t_1 x t_2 = \omega_{c,1}^{(i)} y_1 \omega_{c,2}^{(i)} y_2 \dots y_{r_\phi} \omega_{c,r_\phi+1}^{(i)} \& \\ & \& g_{c,1}^{(i)}(y_1) = A \& \dots \& g_{c,r_\phi}^{(i)}(y_{r_\phi}) = A \} \\ t_0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei die ω mit allen vorkommenden Indizes feste Elemente von M_T sind (und freilich nicht alle Disjunktionsglieder auftreten müssen).

Genau so, wie zum Schluss der Nr. 8 geschildert wurde, sieht man ein, dass die Definitionen von $g_i(A)$, $g_i(t)$ und $g_i(t_1 x t_2)$ für $i = 1, 2, \dots, l$ eine simultane Wertverlaufsrekursion für die Funktionen $g_i(x)$ liefern, woraus sich diese Funktionen als primitiv-rekursiv in M_T ergeben. Da unter diesen Funktionen auch die charakteristische Funktion der Eigenschaft „Satz zu sein“ vorkommt, so ist diese Eigenschaft in einer Satzstruktur-Grammatik primitiv-rekursiv.

Der Gedankengang war ganz allgemein, so ergibt sich daraus, dass in einer beliebigen Metaalgor-Sprache — die aus einem Tripel (T, H, P) mit T, H, P in unserem Quadrupel (T, H, s, P) beschriebener Art besteht, wo belanglos ist,

ob gewisse Hilfsbegriffe ausgezeichnet werden — *sämtliche Hilfsbegriffe*, falls es überhaupt je eine definierende Produktion für sie vorliegt, und sie sich nicht selber generieren können, in der entsprechenden Wortmenge *primitiv-rekursiv* sind.

15. Die Vorgehenden beziehen sich auf die „Kontextunabhängige“ Satzstruktur-Grammatik. CHOMSKY unterscheidet auch eine „kontextbedingte“ Satzstruktur-Grammatik, worin die Produktionen je einen Hilfsbegriff in verschiedenen Kontexten verschieden definieren. Hier hat also eine Produktion die Form:

$$\mu h_i v ::= \mu \omega v,$$

wo $h_i \in H$, ferner μ , v und ω Konstruktionen sind. Kommen z.B. Produktionen

$\langle \text{Satz} \rangle$	$::= \langle \text{Subjektteil} \rangle \langle \text{Prädikatteil} \rangle$
$\langle \text{Subjektteil} \rangle$	$::= \text{der Schmied}$
$\langle \text{Subjektteil} \rangle$	$::= \text{die Arbeiter}$
$\langle \text{Prädikatteil} \rangle$	$::= \text{arbeitet}$
$\langle \text{Prädikatteil} \rangle$	$::= \text{essen}$

vor, so können daraus die grammatisch falschen Sätze „der Schmied essen“ und „die Arbeiter arbeitet“ generiert werden. Das Prädikat „arbeitet“ dürfte nur nach Subjekte wie „der Schmied“, das Subjekt „die Arbeiter“ nur vor Prädikate wie „essen“ gesetzt werden. Das bedeutet die Verwendung solcher Produktionen:

Der Schmied $\langle \text{Prädikatteil} \rangle ::= \text{Der Schmied arbeitet}$
 $\langle \text{Subjektteil} \rangle \text{essen} ::= \text{die Arbeiter essen}.$

Das kann aber dadurch erledigt werden, dass man als Hilfsbegriffe auch „Subjektteil in Einzahl“, „Subjektteil in Mehrzahl“, „Prädikatteil in Einzahl“, „Prädikatteil in Mehrzahl“ einführt, und folgende Produktionen anwendet:

$\langle \text{Satz} \rangle ::= \langle \text{Subjektteil in Einzahl} \rangle \langle \text{Prädikatteil in Einzahl} \rangle$
 $\langle \text{Satz} \rangle ::= \langle \text{Subjektteil in Mehrzahl} \rangle \langle \text{Prädikatteil in Mehrzahl} \rangle.$

Ähnlich können auch andere kontextbedingte Fälle erledigt werden, und so vermutlich jede praktisch auftretende kontextbedingte Satzstruktur-Grammatik auf kontextunabhängige Satzstruktur-Grammatik zurückgeführt werden.

16. CHOMSKY hat einen Satz eigentlich nicht als Wortekette, sondern als Morphemenkette betrachtet, wo z.B. „Haus“ eine Stamm-Morpheme ist, aus welcher „Häuser“ durch Anwendung der Zusatz-Morphemen der Umlautbildung und des Anknüpfen der Mehrzahl-Endung (welche vom Stammwort abhängig manchmal nichts, sonst -e, -n, -er oder -en ist) gebildet wird. In exakter Fassung sind also die Zusatz-Morpheme Funktionen (seien die „einfachen“ darunter mit z_1, z_2, \dots, z_m bezeichnet), die für Stamm-Morpheme erklärt sind und als Werte Elemente von T annehmen. Ketten einfacher Zusatz-Morphemen-Zeichen ergeben die Zeichen der notwendigen zusammengesetzten Funktionen, z.B. einer Funktion, die auf die Stamm-Morpheme eines Zeitwortes angewandt, dieses zugleich in Mehrzahl, erste Person und Imperfekt setzt. Der Wert einer Funktion $z_{i_1} \dots z_{i_r}$ an der Stelle t soll mit $z_{i_1} \dots z_{i_r} t$ bezeichnet werden. Unter z_1, \dots, z_m muss auch das Zeichen der nichts ändernden Identitätsfunktion $z_i x = x$ vorkommen.

In dieser Auffassung ersetzt man das aus Wortformen bestehende terminale Vokabular T einer Satzstruktur-Grammatik durch ein Morphem-

Vokabular T^* , welches alle Stamm-Morpheme und die Funktionszeichen z_1, \dots, z_m enthält. Alles andere geht dann genau so wie in der erst betrachteten Satzstruktur-Grammatik, darum beschränken sich die Weiteren auf eine solche.

§ 3. Transformations-Grammatik

17. Am nächsten zur Generierung der Sätze der natürlichen Sprachen scheint die Transformations-Grammatik zu führen. Hier handelt es sich darum, dass nur die einfachsten Sätze, die den „Kern“ der Sprache ausmachen, die sogenannten „Kernsätze“ durch eine Satzstruktur-Grammatik generiert werden, und alle Sätze entstehen aus diesen durch iterierte Anwendung endlich vieler „Transformationen“; ähnlich wie die wahren Formeln einer axiomatischen mathematischen Theorie aus den Axiomen durch iterierte Anwendung gewisser Schlussregeln (welche gewisse Formeln in eine neue Formel überführen) generiert werden. Zum Beispiel kann ein Kernsatz *Dieses Haus ist schön* in seine Verneinung: *Dieses Haus ist nicht schön*, oder in eine der verschiedenen Frageformen transformiert werden: *Ist dieses Haus schön?* *Welches Haus ist schön?* *Wie schaut dieses Haus aus?* *Was ist dieses schöne Ding?* — oder die beiden Sätze:

Ein Märchen kommt mir nicht aus dem Sinn

Das Märchen ist aus alten Zeiten

lassen sich durch eine „eigenschaft-einführende Transformation“ in den Satz:

Ein Märchen aus alten Zeiten das kommt mir nicht aus dem Sinn transformieren.

Die Transformationen, die in einer Sprache verwendet werden, können annehmlich so beschrieben werden, dass sie sich in exakter Fassung in der geeigneten Wortmenge als rekursiv erweisen.

Da eine axiomatische Theorie allgemein nicht rekursiv entscheidbar ist, kann man allgemein nicht erwarten, dass der Satzbegriff einer Transformations-Grammatik primitiv- oder auch nur allgemein-rekursiv sei. Ich zeige aber, dass er rekursiv-abzählbar ist.

18. Sei eine Satzstruktur-Grammatik (T, H, s, P) zum Generieren der Kernsätze gegeben, und M_T die Wortmenge über das Alphabet T . Sämtliche zulässige Transformationen, welche Elemente x_1, \dots, x_r von M_T in ein Element von M_T überführen, seien die Funktionen

$$f_1(x_1, \dots, x_r), \dots, f_n(x_1, \dots, x_r)$$

(dabei kann r eine feste Zahl sein, da die Funktionen auch fiktive Variablen besitzen können, in welchen sie konstant sind). Zu diesen sollen der Reihe nach die Beziehungen

$$B_1(x_1, \dots, x_r), \dots, B_n(x_1, \dots, x_r)$$

gehören, welche bestehen müssen, damit die entsprechenden Transformationen Sätze x_1, \dots, x_r (wobei jetzt auch der leere Satz zugelassen wird) wieder in Sätze überführen sollen (es würde z.B. die in Nr. 17 erwähnte „eigenschaft-einführende Transformation“ nicht aus beliebigen Sätzen einen Satz erzeugen; es war wesentlich, dass die beiden Sätze des Beispiels dasselbe Subjekt hatten). Sei endlich $s(x)$ die nach § 2 primitiv-rekursive charakteristische Funktion der Eigenschaft „Kernsatz zu sein“.

allgemein-) rekursiv sind, so die Definition von $f(x)$ eine Wertverlaufsrekursion, und daher $f(x)$ eine primitiv- (bzw. allgemein-) rekursive Funktion in M_T ist. Daher ist in diesem Fall der Satzbegriff einer Transformations-Grammatik primitiv- (allgemein-) rekursiv abzählbar.

(Eingegangen: 24. Juli, 1963.)

О РЕКУРСИВНОСТИ ПОНЯТИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ГРАММАТИК

R. PÉTER

Резюме

Наиболее естественным способом определения теоретико-числовых функций, соответственно образованию натуральных чисел по определенным шагам исходя из нуля, является примитивная рекурсия. Известно, что сложные функции, употребляемые в элементарной теории чисел, также являются примитивно-рекурсивными, то есть, исходя из нуля и из последующего образования они могут быть заданы через конечное число примитивных рекурсий и подстановок.

В различных областях математики находят применение множества, построенные из некоторых основных элементов по образцу множества натуральных чисел путем применения некоторых функций конечное число раз. Появляется мысль о соответствующем обобщении рекурсии, как наиболее естественном способе построения функций, определенных на таких множествах; и так по большей части обобщения результатов, полученных в теории чисел, остаются в силе и для обобщенных рекурсивных функций.

С точки зрения приложений особенно важен случай «множества слов», в котором, исходя из пустого слова (его символ Λ), мы строим его элементы последовательными прибавлениями элементов («букв») произвольного заданного множества («альфавита»). В настоящей статье используются такие «альфавиты», которые в каждом случае означают по одному словарю и поэтому его «буквы» являются собственно говоря словами.

Настоящая статья связана именно с тем новым грамматическим стремлением, согласно которому понятие «грамматически правильной фразы» (коротко «фразы») должна быть определено таким же точным способом, как в математике может быть определено понятие «правильно построенной формулы». «Категоричная грамматика», «фразово-структурная грамматика» и «трансформационная грамматика» — они все три дают различные определения этого понятия; до сих пор еще не решено, существует ли (кроме математических языков-формул) также такой естественный язык, для которого применение этого понятия действительно дает все фразы данного языка.

В настоящей статье по инициативе Л. КАЛМА́КА автор доказывает, что понятие фразы как в категоричной грамматике, так и в фразово-структурной грамматике является примитивно-рекурсивным на соответствующем множестве слов в том смысле, что существует функция, которая принимает значение Λ , если ее применяют к фразам и только к фразам; далее автор доказывает, что множество фраз трансформационной грамматики является

рекурсивно-перечислимым на соответствующем множестве слов (при разумных условиях) в том смысле, что существует такая рекурсивная функция, которая принимает в качестве значений все фразы и только их.

Общий характер доказательства относящегося к фразово-структурной грамматике, сразу дает в общем виде тот результат, что понятия любого «мэталгольного языка» являются примитивно-рекурсивными, если только они вообще появляются вследствие их определения, а именно без ложного круга, в том смысле, что они не смогут «производить» самих себя (в некотором смысле, заданном точным способом).

ON TWO PROBLEMS OF INFORMATION THEORY

by

PAUL ERDŐS and ALFRED RÉNYI

§ 1. Introduction

The first problem¹ which will be discussed in this paper can be formulated as follows: Suppose we are given n coins, which look quite alike, but of which some are false. (For instance suppose that the right coins consist of gold, while the false coins consist mainly of silver and are covered only by a thin layer of gold.) The false coins have a smaller weight than the right coins; the weights a and $b < a$ of both the right and false coins are known. A scale is given by means of which any number $\leq n$ of coins can be weighed together. Thus if we select an arbitrary subset of the coins and put them together on the scale, then the scale shows us the total weight of these coins, from which it is easy to compute the number of false coins among those weighed. The question is what is the minimal number $A(n)$ of weighings by means of which the right and false coins can be separated? It can be seen by an elementary information-theoretical argument that (denoting by $\log_2 x$ the logarithm with base 2 of x)

$$(1.1) \quad A(n) \geq \frac{n}{\log_2(n+1)}.$$

As a matter of fact, the amount of information needed is $\log_2 2^n = n$ bits, because the subset of the coins consisting of the false coins may be any of the 2^n subsets of the set of all n coins; on the other hand if we put $k \leq n$ coins on the balance, the number of false coins among them may have the values $0, 1, \dots, k$ and thus the amount of information given by each weighing can not exceed $\log_2(k+1) \leq \log_2(n+1)$. Thus s weighings can give us at most $s \log_2(n+1)$ bits, and thus to get the necessary amount of information (that is n bits) it is necessary that $s \log_2(n+1)$ should be not less than n ; thus we obtain (1.1). On the other hand, a trivial upper estimate is

$$(1.2) \quad A(n) \leq n$$

because if we put the coins one by one after another on the scale then clearly these n weighings are sufficient. The inequality (1.2) is best possible for $n = 1, 2$ and 3 , but already for $n = 4$ we have $A(4) = 3$. As a matter of fact

¹ This problem was proposed for $n = 5$ by H.S. SHAPIRO [1] and for arbitrary n by N.J. FINE [2].

if we label the 4 coins by the numbers 1, 2, 3, 4 then the following 3 weighings are always sufficient: we put first the coins 1, 2, 3 on the scale, then the coins 1, 3, 4 and finally the coins 1, 2 and 4. Let the number of false coins among the coins 1, 2, 3 be f_1 , that among 1, 3, 4 be f_2 and that among 1, 2, 4 be f_3 . The following table gives us the false coins:

f_1	f_2	f_3	1	2	3	4
0	0	0	—	—	—	—
1	1	1	+	—	—	—
1	0	1	—	+	—	—
1	1	0	—	—	+	—
0	1	1	—	—	—	+
2	1	2	+	+	—	—
2	2	1	+	—	+	—
1	2	2	+	—	—	+
2	1	1	—	+	+	—
1	1	2	—	+	—	+
1	2	1	—	—	+	+
3	2	2	+	+	+	—
2	2	3	+	+	—	+
2	3	2	+	—	+	+
2	2	2	—	+	+	+
3	3	3	+	+	+	+

Note that among the possible 64 triples f_1, f_2, f_3 ($0 \leq f_j \leq 3, j = 1, 2, 3$) only 16 are possible and each corresponds to a different distribution of the false coins.

It is easy to see that in general one has

$$(1.3) \quad A(nm) \leq A(n) \cdot m$$

(because if we have nm coins we may determine by $A(n)$ weighings from each group of n coins the false ones). Thus from the above example one gets

$$A(4n) \leq 3n$$

and as $A(n)$ is evidently monotonic, we obtain

$$(1.4) \quad A(n) \leq \left\{ \frac{3n}{4} \right\} + 2$$

where $\{x\}$ stands for the least integer $\geq x$

It may be guessed² from this that one has

$$(1.5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A(n)}{n} = 0.$$

This is in fact true; moreover we shall prove in § 1 that the lower estimate (1.1) gives the correct order of magnitude of $A(n)$. We shall prove namely in § 2 (Theorem 1) that for any $\delta > 0$ we have for $n \geq n_0(\delta)$

$$(1.6) \quad A(n) \leq (1 + \delta) \frac{n \cdot \log_2 9}{\log_2 n}$$

It remains an open question whether the limit

$$(1.7) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A(n) \log_2 n}{n} = \alpha$$

exists, and if it exists, what is its value? We shall prove in § 4 (Theorem 3) that

$$(1.8) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{A(n) \log_2 n}{n} \geq 2.$$

It follows from (1.8) that if the limit α in (1.7) exists one has $2 \leq \alpha \leq \log_2 9 \approx 3.17$. We shall prove in § 5 that if the problem is modified so that we are contented with finding a method of weighing which leads to the separation of the false coins with a prescribed probability $p < 1$ which may be arbitrarily near to 1, (supposing that all the 2^n possibilities have same probability) then $\frac{2n}{\log_2 n} (1 + \varepsilon)$ weighings are sufficient for any $\varepsilon > 0$ if n is large (Theorem 4).

Let us return now to the original problem of determining $A(n)$. This problem may be formulated as follows: We have to guess an unknown sequence of n digits, each digit being equal to 0 or 1. We have the right to select arbitrary „testing” sequences of zeros and ones of length n and with respect of each such sequence we are told what is the number of places in which a 1 stands both in the sequence to be guessed and in our testing sequence. The minimal number of testing sequences by means of which the unknown sequence can be uniquely determined whatever it may be, is equal to $A(n)$.

This reformulation of our first problem shows its connection with the second problem which will be discussed in this paper and which is as follows: Suppose we want to guess an unknown sequence of n digits, each digit being either 0 or 1. Information concerning the unknown sequence may be obtained in the following way: We have the right to select arbitrarily „testing” sequences of digits consisting of zeros and ones and we are told the number of places in which the two sequences coincide. Let $B(n)$ denote the minimal number of sequences by means of which we can determine the unknown sequence, whatever it may be. The problem is to determine the asymptotic behaviour of $B(n)$. Clearly we have

$$(1.9) \quad B(n) \geq \frac{n}{\log_2 (n + 1)}.$$

² This conjecture was stated in [2].

The inequality (1.9) is obtained by a similar information-theoretical argument as that which leads us to (1.1). We have here the same trivial upper estimate

$$(1.10) \quad B(n) \leq n.$$

As a matter of fact, if we select the n testing sequences $11 \dots 1$, $011 \dots 1$, $1011 \dots 1, \dots, 111 \dots 101$ then if k is the number of places in which the sequence $11 \dots 1$ and the unknown sequence coincide, then the number of coincidences between the sequence $011 \dots 1$ with the unknown sequence is either $k - 1$ or $k + 1$ according to whether the first digit of the unknown sequence is 1 or 0. Thus by the 2nd, 3rd, \dots , n -th testing sequences we can determine the first $n - 1$ digits of the unknown sequence; the last one can be determined because the total number k of ones in the unknown sequence is known from the first comparison. We have clearly $B(n) = n$ for $n = 1, 2, 3, 4$ and $B(5) = 4$ as can be seen from the following example: using the testing sequences

11111

11100

01010

01101

we can guess any sequence of 5 zero-or-one digits. As a matter of fact we get for the number of coincidences the following values for the 16 sequences consisting of not more than two ones:

sequence	coincidence with			
	11111	11100	01010	01101
00000	0	2	3	2
00001	1	1	2	3
00010	1	1	4	1
00100	1	3	2	3
01000	1	3	4	3
10000	1	3	2	1
00011	2	0	3	2
00101	2	2	1	4
01001	2	2	3	4
10001	2	2	1	2
00110	2	2	3	2
01010	2	2	5	2
10010	2	2	3	0
01100	2	4	3	4
10100	2	4	1	2
11000	2	4	3	2

It is unnecessary to try the other 16 sequences with 3 or more ones, because these are obtained by replacing 1 by 0 and 0 by 1 in the above 16 sequences, and this changes the number of coincidences from x to $5 - x$.

We shall prove for $B(n)$ the same inequality as obtained for $A(n)$; viz. we obtain in § 3 (Theorem 2) for any $\delta > 0$ that for $n \geq n_1(\delta)$

$$(1.11) \quad B(n) \leq (1 + \delta) \frac{n \log_2 9}{\log_2 n}.$$

Here again the question remains open whether the limit

$$(1.12) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{B(n) \log_2 n}{n} = \beta$$

exists, and if so what its value is. We shall show in § 4 (Theorem 5) by the same method which we have used to prove Theorem 3 that

$$(1.13) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{B(n) \log_2 n}{n} \geq 2.$$

Thus if the limit β in (1.12) exists, then certainly $2 \leq \beta \leq \log_2 9 \approx 3.17$. We shall prove also in § 5 that if we modify our second problem so that we want to determine a fixed but unknown sequence of n zero-or-one digits by the number of coincidences with certain testing sequences and we are contented with finding it with probability $p < 1$ which may be arbitrarily near to 1 then $\frac{2n}{\log_2 n} (1 + \varepsilon)$ testing sequences are sufficient, (Theorem 6), for any $\varepsilon > 0$ if n is large enough.

Finally let us mention the following geometric interpretation of both problems. To any sequence of zeros and ones there corresponds a vertex of the unit cube C_n of n -dimensional space. The function $B(n)$ can be interpreted as follows: $B(n)$ denotes the least number such that by selecting $B(n)$ suitable chosen vertices of C_n each vertex of C_n is uniquely determined by its distances from the chosen $B(n)$ vertices.

Now let us interpret any sequence of n zeros and ones as a vector of the n -dimensional space leading from the origin to one of the vertices of C_n . With this interpretation $A(n)$ denotes the least number such that by selecting $A(n)$ vectors $v_1, v_2, \dots, v_{A(n)}$ leading to suitably chosen vertices of C_n each vector v leading to a vertex of C_n is uniquely determined by its projection on the $A(n)$ chosen vectors, i. e. by the $A(n)$ numbers $(v, v_1), \dots, (v, v_{A(n)})$ where (v, w) denotes the inner product of the vectors v and w .

We prove our Theorems 1 and 2 by the same method, consisting in a random selection of the testing sequences.

§ 2. An upper estimate for $A(n)$

Our first problem can be formulated as follows: What is the least value $A(n)$ of s such that there exists a matrix M having s rows and n columns and consisting of zeros and ones, such that if we select an arbitrary subset e of the set E of the columns of M , and form the row-sums of the submatrix $M(e)$ consisting of the selected columns of M , and denote by v_e the column-vector consisting of these row-sums, then the vectors v_e and $v_{e'}$ are different if e and e' are different subsets of E . We shall call such a matrix an A -matrix.

Thus $A(n)$ is the least value of s such that there exists an A -matrix with n columns and s rows. Clearly the matrix corresponding to the example given in the introduction for $n = 4$ is the A -matrix

$$(2.1) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

The $2^4 = 16$ possible column-vectors v_e are in this case

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{array}$$

and all are different, thus the matrix (2.1) is in fact an A -matrix.

In order to estimate $A(n)$ we shall prove that if we choose M at random so that the sn elements of M are independent random variables, each taking on the values 0 and 1 with probability $\frac{1}{2}$, then the random matrix M will have the required property with positive probability (in fact with probability tending to 1 for $n \rightarrow +\infty$) provided that $s > (1 + \delta) \frac{n \log_2 9}{\log_2 n}$.

This can be proved as follows: Let $\mathbf{P}_{s,n}(A)$ denote the probability that a random matrix M of order $s \times n$ is an A -matrix, and put $\mathbf{Q}_{s,n}(A) = 1 - \mathbf{P}_{s,n}(A)$. Let $A(e_1, e_2)$ (where e_1 and e_2 are different subsets of the set E of columns of M) denote the event that the row-sum vectors v_{e_1} and v_{e_2} are identical. Evidently if $v_{e_1} = v_{e_2}$ and the sets e_1 and e_2 are not disjoint, then putting $e'_1 = e_1 - e_1 \cap e_2$ and $e'_2 = e_2 - e_1 \cap e_2$, we have $v_{e'_1} = v_{e'_2}$. (Here and in what follows the product of sets denotes their intersection and the difference $e - f$ of two sets e and f denotes the set of elements of e which do not belong to f). It follows that if M is not an A -matrix, then there exist disjoint subsets e_1 and e_2 of the set of its columns such that $v_{e_1} = v_{e_2}$. Thus we obtain that

$$(2.2) \quad \mathbf{Q}_{s,n}(A) \leq \sum_{e_1, e_2 = \emptyset} \mathbf{P}(A(e_1, e_2))$$

where the summation has to be extended over every pair of disjoint subsets e_1 and e_2 of the set E of the columns of M and \emptyset denotes the empty set.

It follows that

$$(2.3) \quad \mathbf{Q}_{s,n}(A) \leq \sum_{1 \leq k_1 + k_2 \leq n} \frac{n!}{k_1! k_2! (n - k_1 - k_2)!} \left(\sum_{l=0}^{\min(k_1, k_2)} \frac{\binom{k_1}{l} \binom{k_2}{l}}{2^{k_1 + k_2}} \right)^s$$

By the well known identity

$$\sum_{l=0}^{\min(k_1, k_2)} \binom{k_1}{l} \binom{k_2}{l} = \binom{k_1 + k_2}{k_1}$$

we obtain

$$\mathbf{Q}_{s,n}(A) \leq \sum_{1 \leq k_1 + k_2 \leq n} \frac{n!}{k_1! k_2! (n - k_1 - k_2)!} \left(\frac{\binom{k_1 + k_2}{k_1}}{2^{k_1 + k_2}} \right)^s.$$

It follows

$$(2.4) \quad \mathbf{Q}_{s,n}(A) \leq \sum_{r=1}^n \binom{n}{r} \sum_{k=0}^r \frac{\binom{r}{k}^{s+1}}{2^{rs}}.$$

As

$$(2.5) \quad \binom{r}{k} \leq \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \right) \quad (k = 0, 1, \dots, r)$$

further $\left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \right) \leq \frac{2^r}{\sqrt{r+1}}$ for $r = 3, 4, \dots$ (this follows easily by induction) we obtain

$$(2.6) \quad \mathbf{Q}_{s,n}(A) \leq \frac{4n^2}{2^s} + \sum_{r=3}^n \binom{n}{r} \frac{2^r}{(r+1)^{\frac{s}{2}}}.$$

Now we choose $s \sim \frac{\alpha n}{\log_2 n}$. As we have

$$\sum_{r \leq \frac{n}{\log_2^2 n}} \binom{n}{r} 2^r = O(2^{c \frac{n \log \log n}{\log^2 n}})$$

where $c > 0$ is a constant, it follows that

$$(2.7) \quad \mathbf{Q}_{s,n}(A) \leq \sum_{r > \frac{n}{\log_2^2 n}} \binom{n}{r} \frac{2^r}{(r+1)^{\frac{s}{2}}} + o(1).$$

Taking into account that $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} 2^r = 3^n$, we obtain

$$(2.8) \quad \mathbf{Q}_{s,n}(A) \leq 2^{n \left(\log_2 3 - \frac{\alpha}{2} \right) + o(n)}$$

provided that $s = s(n) \sim \frac{\alpha n}{\log_2 n}$ where $\alpha > 2 \log_2 3 = \log_2 9$. It follows

$$(2.9) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{Q}_{s(n),n}(A) = 0.$$

Now clearly if $\mathbf{Q}_{s(n),n}(A) < 1$ then $P_{s(n),n}(A) > 0$; as $P_{s,n}(A)$ is the probability that the random matrix M is an A -matrix, it follows that if $\delta > 0$ and $s > \frac{n \log_2 9}{\log_2 n}$ then for $n \geq n_0(\delta)$ there exists an A -matrix of order $s \times n$ which implies $A(n) \leq s$. Thus we proved the following

Theorem 1. For any $\delta > 0$ we have for $n \geq n_0(\delta)$

$$(2.10) \quad A(n) \leq (1 + \delta) \frac{n \log_2 9}{\log_2 n}.$$

§ 3. An upper estimate for $B(n)$

Let $u = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ and $u' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$ be row-vectors consisting of n components, each of which is either 0 or 1. Let us put $c(u, u') = n - \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \varepsilon'_i)^2$. Thus $c(u, u')$ is the number of „coincidences” of the vectors u and u' , i.e. the number of columns of the $2 \times n$ matrix $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_n \\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_n \end{pmatrix}$ which consist of equal elements. By the usual notation $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ we have

$$(3.1) \quad c(u, u') = n - \|u - u'\|^2.$$

Let now M be a matrix having s rows and n columns, and consisting of elements 0 and 1. Let u_1, \dots, u_s be the rows of M interpreted as vectors. Let u be an arbitrary row-vector consisting of n components which are either 0 or 1. Let U denote the set consisting of all 2^n such vectors u . To any u there corresponds a vector W_u consisting of the numbers $c(u, u_1), \dots, c(u, u_s)$. The matrix M will be called a B -matrix if the 2^n vectors W_u corresponding to different elements u of U are all different from each other. Thus if M is a B -matrix, then each vector $u \in U$ is uniquely determined by the s numbers $c(u, u_1), \dots, c(u, u_s)$ (and thus also by the distances $\|u - u_j\|$, $j = 1, 2, \dots, s$). Let $P_{s,n}(B)$ denote the probability that the random matrix M of order $s \times n$ (whose elements are independent random variables each taking on the values 0 and 1 with probability $\frac{1}{2}$) should be a B -matrix, and put $\mathbf{Q}_{s,n}(B) = 1 - \mathbf{P}_{s,n}(B)$.

Let $u = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ and $u' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ be two arbitrary different row-vectors consisting of n components each of which is either 0 or 1. Let H and \bar{H} denote the set of those indices k ($1 \leq k \leq n$) for which $\varepsilon_k = 1$ and $\varepsilon_k = 0$, respectively and similarly let H' and \bar{H}' denote the set of those indices k ($1 \leq k \leq n$) for which $\varepsilon'_k = 1$ and $\varepsilon'_k = 0$ respectively. Let k_1, k_2, k_3 and k_4 denote the number of elements of the sets HH' , $\bar{H}\bar{H}'$, $\bar{H}H'$ and $H\bar{H}'$ respectively. Let $u_j = (\vartheta_{j1}, \dots, \vartheta_{jn})$ be the j -th row of the random matrix M and let l_{j1}, l_{j2}, l_{j3} and l_{j4} denote the number of those indices k which belong to the sets HH' , $\bar{H}\bar{H}'$, $\bar{H}H'$ and $H\bar{H}'$ respectively and for which $\vartheta_{jk} = 1$. Clearly we have $c(u, u_j) = c(u', u_j)$ if and only if

$$l_{j1} + l_{j2} + k_3 - l_{j3} + k_4 - l_{j4} = l_{j1} + l_{j3} + k_2 - l_{j2} + k_4 - l_{j4}$$

that is if

$$(3.2) \quad 2(l_{j2} - l_{j3}) = k_2 - k_3.$$

It follows that a necessary condition for $c(u, u_j) = c(u', u_j)$ is that $k_2 - k_3$ should be even, and further that

$$(3.3) \quad \mathbf{Q}_{s,n}(B) \leq \sum_{\substack{k_2+k_3 \equiv 0 \pmod{2} \\ 1 \leq k_2+k_3 \leq n}} \frac{n!}{k_2! k_3! (n - k_2 - k_3)!} \left(\frac{\sum_{l=0}^{\frac{k_2+k_3}{2}} \binom{k_2}{l} \binom{k_3}{l - \frac{k_2-k_3}{2}}}{2^{k_2+k_3}} \right)^s.$$

Now

$$\sum_{l=0}^{\frac{k_2+k_3}{2}} \binom{k_2}{l} \binom{k_3}{l - \frac{k_2-k_3}{2}} = \binom{k_2+k_3}{\frac{k_2+k_3}{2}}$$

and thus

$$(3.4) \quad Q_{s,n}(B) \leq \sum_{r=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2r} 2^{2r} \left(\frac{\binom{2r}{r}}{2^{2r}} \right)^s.$$

It follows similarly as in § 2 that if $s = s(n) \sim \alpha \frac{n}{\log_2 n}$ where $\alpha > \log_2 9$ then

$$(3.5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_{s(n),n}(B) = 0.$$

Clearly if $Q_{s(n),n}(B) < 1$ then $P_{s(n),n}(B) > 0$ and thus there exists a B -matrix of order $s(n) \times n$ and therefore $B(n) \leq s(n)$. Thus we have proved the following

Theorem 2. For any $\delta > 0$ and $n \geq n_1(\delta)$ one has

$$(3.6) \quad B(n) \leq (1 + \delta) \frac{n \log_2 9}{\log_2 n}.$$

§ 4. Lower bounds for $A(n)$ and $B(n)$

In this § we prove the following results

Theorem 3. One has

$$(4.1) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{A(n) \log_2 n}{n} \geq 2.$$

Theorem 4. One has

$$(4.2) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{B(n) \log_2 n}{n} \geq 2.$$

Proof of Theorem 3. Let M be now an arbitrary A -matrix of order $s \times n$. Let us divide the row-vectors of M in two classes. A row-vector u of M belongs to the first class if it contains less than h elements equal to 1, where $h = \sqrt{n \log n}$; otherwise it belongs to the second class. We shall give first an upper estimate for the number of different column-vectors v_e consisting of the row-sums of the submatrix $M(e)$ of M consisting of the columns of M belonging to the set e ; here e is an arbitrary subset of the set E of columns of M . Clearly any component of v_e corresponding to a row belonging to the first class may take on at most h different values. On the other hand if a row u_j of M belongs to the second class, and contains m ones ($m \geq h$) then the number of possible choices of the subset e of the columns for which the sum of the elements of the row u_j standing in the selected columns does not lie between the bounds $\frac{m}{2} \pm \lambda \sqrt{m \log m}$ (where the positive constant λ will be chosen later) is equal to

$$(4.3) \quad 2^{n-m} \sum_{\left| k - \frac{m}{2} \right| > \lambda \sqrt{m \log m}} \binom{m}{k}.$$

According to the Moivre—Laplace theorem we have

$$(4.4) \quad \sum_{\left|k - \frac{m}{2}\right| > \lambda \sqrt{m \log m}} \binom{m}{k} = O\left(\frac{2^m}{m^{2\lambda^2}}\right).$$

Let us call a subset e of the set E of columns a „bad” subset, if there exists a row u_j belonging to the second class and containing m ones, for which the sum of the elements of u_j standing in the columns belonging to e lies outside the bounds $\frac{m}{2} \pm \lambda \sqrt{m \log m}$. Otherwise we call e a „good” subset. Clearly by

(4.4) if N denotes the number of bad subsets we have

$$(4.5) \quad N = O\left(\frac{n 2^n}{h^{2\lambda^2}}\right) = O\left(\frac{2^n}{n^{(\lambda^2-1)} (\log n)^{\lambda^2}}\right).$$

Thus if $\lambda^2 \geq 1$ we have

$$(4.6) \quad N = O\left(\frac{2^n}{\log n}\right).$$

On the other hand, denoting by V the number of different values of the vector v_e if e runs over the good subsets, we have

$$(4.7) \quad V \leq h^x [2\lambda \sqrt{n \log n}]^{s-x} \leq (2\lambda \sqrt{n \log n})^s.$$

As M is by supposition an A -matrix, the inequality

$$(4.8) \quad V \geq 2^n - N$$

has to be valid, which implies by (4.6) and (4.7)

$$(4.9) \quad (2\lambda \sqrt{n \log n})^s \geq 2^n \left(1 - O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right).$$

Thus we obtain that the inequality

$$(4.10) \quad s \geq \frac{2n}{\log_2 n + O(\log \log n)}$$

holds, from which Theorem 3 immediately follows.

Proof of Theorem 4. Theorem 4 can be proved in a similar way as we proved Theorem 3. The only difference is that the distinction between rows of the first and second class is now unnecessary. Let M be a B -matrix of order $s \times n$. Let U denote again the set of all possible rows of n elements each of which is equal either to 0 or to 1. Let u_1, u_2, \dots, u_s denote the rows of the matrix M . An element u of U will be called „bad” if there is a row u_j of M such that the number of coincidences $c(u, u_j)$ of u and u_j , does not lie in the interval $\frac{n}{2} \pm \lambda \sqrt{n \log n}$; otherwise u will be called „good”. If N denotes the number of „bad” elements u of U we have by Chebyshev's inequality

$$(4.11) \quad N = O\left(\frac{2^n}{\log n}\right).$$

On the other hand if W denotes the number of possible values of the vector $w_u = (c(u, u_1), \dots, c(u, u_s))$ where u runs over the „good” elements of U , we have

$$(4.12) \quad W \leq (2 \sqrt{n \log n})^s.$$

As M is a B -matrix, we have

$$(4.13) \quad W \geq 2^n - N.$$

Thus it follows from (4.11) and (4.12) that

$$(4.14) \quad s \geq \frac{2n}{\log_2 n + O(\log \log n)}$$

which proves Theorem 4.

§ 5. Discussion of a modified form of both problems

Let U denote again the set of all possible sequences of length n consisting of zeros and ones. Let M denote again a matrix of order $s \times n$ consisting of zeros and ones; let u_1, \dots, u_s denote the rows of M . Let (u, u') where $u \in U$, $u' \in U$ denote the inner product of the vectors u and u' , i.e. the number of places in which 1 stands both in u and u' . Let $c(u, u') = n - \|u - u'\|^2$ denote the number of coincidences of the vectors u and u' , i.e. the number of places in which the same number stands both in u and u' . A matrix M will be called a p - A matrix (resp. a p - B matrix) where $0 < p < 1$ if by choosing at random an element u of U (so that each of the 2^n elements of U has the same probability to be chosen) the probability that u is uniquely determined by the sequence of numbers $(u, u_1), (u, u_2), \dots, (u, u_s)$ (resp. by the sequence $c(u, u_1), c(u, u_2), \dots, c(u, u_s)$) exceeds p . Let $s_A(n, p)$ and $s_B(n, p)$ respectively denote the minimal value of s for which a p - A matrix resp. a p - B matrix M of order $s \times n$ exists. Then the following results hold:

Theorem 5. For any fixed p with $0 < p < 1$ one has

$$(5.1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_A(n, p)}{\left(\frac{2n}{\log_2 n} \right)} = 1.$$

Theorem 6. For any fixed p with $0 < p < 1$ one has

$$(5.2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_B(n, p)}{\left(\frac{2n}{\log_2 n} \right)} = 1.$$

Proof of Theorems 5 and 6. Let M denote the set of all $s \times n$ matrices the elements of which are zeros and ones. Let $\mathbf{P}_A(M)$ and $\mathbf{P}_B(M)$ resp. denote the probability that by choosing at random an element u of U this element should be uniquely determined by the sequence $(u, u_1), (u, u_2), \dots, (u, u_s)$ resp. by the sequence $c(u, u_1), c(u, u_2), \dots, c(u, u_s)$ where u_1, \dots, u_s denote the rows of the

matrix M . Clearly the assertions that $s_A(n, p) \leq s$ and $s_B(n, p) \leq s$ resp. are equivalent to the assertions that

$$(5.3) \quad \max_{M \in \mathbb{M}} \mathbf{P}_A(M) \geq p$$

and

$$(5.4) \quad \max_{M \in \mathbb{M}} \mathbf{P}_B(M) \geq p.$$

Evidently if $\overline{\mathbf{P}_A(M)}$ and $\overline{\mathbf{P}_B(M)}$ denote the mean value of $\mathbf{P}_A(M)$ and $\mathbf{P}_B(M)$ when M is chosen at random so that M may be equal to any element of \mathbb{M} with the same probability $\frac{1}{2^{sn}}$, then

$$(5.5) \quad \max_{M \in \mathbb{M}} \mathbf{P}_A(M) \geq \overline{\mathbf{P}_A(M)}$$

and

$$(5.6) \quad \max_{M \in \mathbb{M}} \mathbf{P}_B(M) \geq \overline{\mathbf{P}_B(M)}.$$

Thus if we prove that for a certain value of s we have

$$\overline{\mathbf{P}_A(M)} \geq p$$

and

$$\overline{\mathbf{P}_B(M)} \geq p,$$

it follows that the inequalities $s_A(n, p) \leq s$ and $s_B(n, p) \leq s$ hold.

Let $A(u, M)$ denote the event that the row vector $u \in U$ is uniquely determined by the sequence $(u, u_1), \dots, (u, u_s)$ and $B(u, M)$ the event that the row vector $u \in U$ is uniquely determined by the sequence $c(u, u_1), \dots, c(u, u_s)$ where u_1, \dots, u_s denote the rows of M . Then evidently

$$(5.7) \quad \overline{\mathbf{P}_A(M)} = \mathbf{P}(A(u, M))$$

and

$$(5.8) \quad \overline{\mathbf{P}_B(M)} = \mathbf{P}(B(u, M))$$

where on the right hand side of (5.7) and (5.8) u is a randomly chosen element of U and M a randomly chosen element of \mathbb{M} . Let us put

$$(5.9) \quad 1 - \mathbf{P}(A(u, M)) = \mathbf{Q}_A(s, n)$$

and

$$(5.10) \quad 1 - \mathbf{P}(B(u, M)) = \mathbf{Q}_B(s, n).$$

We obtain by a similar argument as that used in § 2 and § 3 resp.

$$(5.11) \quad \mathbf{Q}_A(s, n) \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \sum_{i+j>0} \binom{k}{i} \binom{n-k}{j} \left[\frac{\binom{i+j}{i}}{2^{i+j}} \right]^s$$

and

$$(5.12) \quad Q_B(s, n) \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{i=j \bmod 2 \\ i+j>0}} \binom{k}{i} \binom{n-k}{j} \left[\frac{\binom{i+j}{2}}{2^{i+j}} \right]^s.$$

and therefore

$$Q_A(s, n) \leq \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \right) \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} \sum_{i=0}^l \left[\frac{\binom{l}{i}}{2^l} \right]^s$$

and

$$Q_B(s, n) \leq \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{2^n} \right) \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2l} \left[\frac{\binom{2l}{l}}{2^{2l}} \right]^s.$$

Using again the inequalities $\binom{l}{i} \leq \binom{l}{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \leq \frac{2^l}{\sqrt{l+1}}$

it follows that

$$(5.13) \quad Q_A(s, n) \leq \sum_{l=1}^n \frac{\binom{n}{l}}{(l+1)^{s/2-1}}$$

and

$$(5.14) \quad Q_B(s, n) \leq \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\binom{n}{2l}}{(2l+1)^{s/2}}.$$

Thus if $s \sim \frac{\alpha n}{\log_2 n}$ we obtain

$$(5.15) \quad Q_A(s, n) \leq 2^{n \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + O\left(\frac{n \log \log n}{\log n}\right)}$$

and similarly

$$(5.16) \quad Q_B(s, n) \leq 2^{n \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + O\left(\frac{n \log \log n}{\log n}\right)}.$$

Thus if $\alpha > 2$ we have

$$(5.17) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_A(s, n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_B(s, n) = 0.$$

By (5.9) and (5.10) this implies

$$(5.18) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A(u, M)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(B(u, M)) = 1$$

and thus by (5.5)—(5.8) it follows

$$(5.19) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{M \in \mathcal{M}} \mathbf{P}_A(M) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{M \in \mathcal{M}} \mathbf{P}_B(M) = 1.$$

As mentioned above this proves Theorems 5 and 6.

(Received July 28, 1963.)

REFERENCES

- [1] SHAPIRO, H. S.: „Problem E 1399.” *American Mathematical Monthly* **67** (1960) p. 82.
- [2] FINE, N. I.: „Solution of problem E 1399.” *American Mathematical Monthly* **67** (1960) p. 697.

Remark, added on september 24, 1963

Since the present paper was given to print, we have been informed that quite a number of mathematicians worked on the first problem of the present paper, and obtained results which are closely related to our results. None of these results are published but some of them are in print. As W. MOSER informed us, D. G. CANTOR has proved in a paper in print in the *Canadian Journal of Mathematics* the relation (1.5); in fact he obtained the estimate $A(n) = O\left(\frac{n \log \log n}{\log n}\right)$. L. MOSER (University of Alberta, Edmonton) informed us that, he obtained together with ABBOT, that

$$(*) \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{A(n) \log_2 n}{n} \leq \log_2 27.$$

While this upper bound is greater by the factor $3/2$ than our bound $\log_2 9$, the method of proof applied by ABBOTT and L. MOSER has the advantage that it is constructive; they exhibit effectively A -matrices of size $s \times n$ where $s \sim \frac{n \log_2 27}{\log_2 n}$.

The same result has been obtained by H. S. SHAPIRO and S. SÖDERBERG. Their paper is in print in the *American Mathematical Monthly*. E. R. BERLEKAMP (Bell Telephone Laboratories) has obtained by a method, essentially the same as our method, that

$$A(n) \leq \frac{n \log_2 9}{\log_2 n}.$$

This result is slightly better than our result (1.6) (by the factor $1 + \delta$). To get rid of the unnecessary factor $(1 + \delta)$ one has to use instead of the rough estimate (2.5) a sharper estimate following from Stirling's formula.

BERLEKAMP conjectured also that (1.8) holds, and gave a heuristic argument for his conjecture.

Other proofs of (1.8) have been given by B. GORDON (University of California, Los Angeles) and L. MOSER. E. MILLS has also proved that $A(n) = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$. Quite recently B. LINDSTRÖM (University of Stockholm) has proved the conjecture (1.7) with $\alpha = 2$. His paper will be printed in the next issue of this journal.

О ДВУХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

P. ERDŐS и A. RÉNYI

Резюме

Пусть U множество всех 2^n последовательностей $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ где $\varepsilon_k = 0$ или $\varepsilon_k = 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Пусть M некоторая матрица с размерами $s \times n$, элементы которой все равны или 0 или 1. Пусть u_1, \dots, u_s строки матрицы M . Положим для $u = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in U$ и $u' = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n) \in U$

$$(u, u') = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \varepsilon'_k \text{ и } c(u, u') = n - \sum_{k=1}^n (\varepsilon_k - \varepsilon'_k)^2 = n - \|u - u'\|^2. \text{ Матрица } M$$

называется A -матрицей (соотв. B -матрицей) если все элементы u от U однозначно определены заданием чисел $(u, u_1), \dots, (u, u_s)$ (соотв. чисел $c(u, u_1), \dots, c(u, u_s)$). Пусть $A(n)$ (соотв. $B(n)$) означает минимальное значение s для которого существует A -матрица (соотв. B -матрица) с размерами $s \times n$.

В работе доказано, что

$$2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{A(n) \log_2 n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{A(n) \log_2 n}{n} \leq \log_2 9$$

и

$$2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{B(n) \log_2 n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{B(n) \log_2 n}{n} \leq \log_2 9.$$

BIBLIOGRAPHY¹
LIST OF RECENT PAPERS AND
BOOKS WRITTEN BY MEMBERS
OF THE INSTITUTE, PUBLISHED
OR IN PRINT ELSEWHERE IN
FOREIGN LANGUAGES

БИБЛИОГРАФИЯ¹
СПИСОК НОВЫХ РАБОТ
ЧЛЕНОВ ИНСТИТУТА,
ОПУБЛИКОВАННЫХ В ДРУГИХ
МЕСТАХ В ИНОСТРАННЫХ
ЯЗЫКАХ

- [1] ÁDÁM, A.: „The quasi-series decomposition of two-terminal graphs.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*.*
- [2] ADLER, G.: „Généralisation de la notion de l’enveloppe.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **13** (1962) 393—396.
- [3] ADLER, G.: „Maggiorazione del gradiente delle funzioni biarmoniche di due variabili.” *Rend. dell’Accad. Sci. Fis. Mat. della Soc. Naz. di Sci. Lettere ed Arti in Napoli, Serie IV*, **28** (1961) 225—239.
- [4] ADLER, G.: „Sur la stabilité de la solution du problème de Neumann relative à l’équation de la chaleur.”*
- [5] ALEXITS, G.: „Sur les bornes de l’approximation des fonctions continues.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*.*
- [6] ALEXITS, G.—KRÁLIK, D.: „Über den Annäherungsgrad der Approximation im starken Sinne von stetigen Funktionen.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*.*
- [7] ALPÁR, L.: „Sur certaines transformées des séries de puissance absolument convergentes sur la frontière de leur cercle de convergence.” *International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications, Stockholm, 1962*, p. 59.
- [8] BÁNKÖVI, G.—VAS, É.: „Erfahrungen zur Einführung der statistischen Qualitätskontrolle in der Schaubenfertigung.” *Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität, Berlin*.*
- [9] BOGNÁR, J.: „On the existence of square-roots of J -selfadjoint operators.” *International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications, Stockholm, 1962*, p. 64.
- [10] BOGNÁR, J.: „Nonnegativity properties of operators in spaces with indefinit metric.” *Ann. Acad. Sci. Fennicae Series A. I.* No 336/10 (1963).
- [11] CSÁKI, E.—VINCZE, I.: „On some combinatorial relations concerning the symmetric random walk.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*.*
- [12] CSÁKI, E.—VINCZE, I.: „Two joint distribution laws in the theory of order statistics.” *Mathematica (Cluj). Series A. I.* No 336/10 (1963).
- [13] CSÁSZÁR, Á.: „Complétion d’espaces non séparés.” *International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications, Stockholm, 1962*, p. 128.
- [14] CSÁSZÁR, Á.: „Sur les critères locaux de monotonité.” *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica* **5** (1962).*
- [15] FENYŐ, I.: „Über die Unabhängigkeit von Funktionen.” *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*.*
- [16] FENYŐ, I.: „Eine neue Analogrechner mit Speicher.” *Colloquium on Mathematical Logic and Applications for Mathematical Machines, Tihany, 1962*.*

¹ Papers or books with incomplete bibliographical data, marked by an asterisk, are in print.

¹ Работы с неполными библиографическими данными, отмеченные звездочкой, находятся в печати.

- [17] FISCHER, J.: „Erfahrungen mit einigen in Ungarn erarbeiteten biometrischen Verfahren.“ *Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften*.*
- [18] FISCHER, J.—PALKOVITS, M.: „Bewertung der Messergebnisse bei unterschiedlicher Gewebsstruktur und Zellkernform.“ *Zeitschrift für mikroskopisch-anatomische Forschung*.*
- [19] FREUD, G.: „On local differentiability of higher order of functions.“ International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications, Stockholm, 1962, p. 76.
- [20] FREUD, G.: „Über die $(C, 1)$ Summen der Entwicklungen nach orthogonalen Polynomen.“ *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **14** (1963) 197—208.
- [21] FREUD, G.—KNAPOWSKI, S.: „Some remarks on approximation, I.“ *Studia Mathematicae*.*
- [22] GEHÉR, L.—FOIAS, C.: „Über die Weylsche Vertauschungsrelation.“ *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*.*
- [23] GRÄTZER, G.: „A theorem on doubly transitive permutation group with applications to universal algebra.“ *Fundamenta Math.**
- [24] GRÄTZER, G.: „A representation theorem of multi-algebras.“ *Archiv der Mathematik* **13** (1962) 452—456.
- [25] GRÄTZER, G.: „Some examples of complemented modular lattices.“ *Canadian Math. Bull.* **5** (1962) 111—121.
- [26] GRÄTZER, G.: „On Boolean functions. (Notes on lattice theory, II.).“ *Revue de Mathématiques* **7** (1962) 693—697.
- [27] GRÄTZER, G.: „On discrete lattices whose congruences form a Boolean algebra.“ *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*
- [28] GRÄTZER, G.: „A generalization of Stone's representation theorem for Boolean algebra.“ *Duke Math. Journ.**
- [29] GRÄTZER, G.: „Some results on universal algebras.“ (Mimeographed note.)
- [30] JUVANČZ, I.: „Biometrical aspects in the Chinese drive for supervision of the traditional curative methods.“ *Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften*.*
- [31] KALMÁR, L.: „Wissenschaftliche Abstraktion und die Anwendung mathematischer Methoden in Biologie und Medizin. Thesen und Referate zum Thema „Die philosophische Bedeutung und Anwendung der Kybernetik auf Biologie und Medizin.“ Arzt und Philosophie, Berlin, 1961, S. 132—133, 150, 164.
- [32] KALMÁR, L.: „Some heuristical ideas about a qualitative theory of information.“ International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications, Stockholm, 1962, p. 8.
- [33] KOVÁCS, I.—FOIAS, C.: „Une caractérisation nouvelle des algèbres de von Neumann finies.“ *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **23** (1962) 274—278.
- [34] LEE, A.: „Über Permutations-invariante Matrizen.“ *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*.*
- [35] MAKAI, E.: „On the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam.“ Studies in Mathematical Analysis and related topics, Stanford University Press, 1962, pp. 227—231.
- [36] MAKAI, E.: „On a minimum problem.“ *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*
- [37] MAKKAI, M.: „Über die transfinite Induktion in zahlentheoretischen Formalismen.“ Colloquium on Mathematical Logic and Applications for Mathematical Machines, Tihany, 1962.*
- [38] PALÁSTI, I.: „Threshold functions for subgraphs of given type of the bichromatic random graph.“ International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications, Stockholm, 1962, p. 164.
- [39] POLLÁK, G.—PEÁK, I.: „Bemerkungen über die Halbgruppen mit Minimalbedingung, II.“ *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica*.*
- [40] RÉNYI, A.: „A new approach to the theory of Engel's series.“ *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica*. **5** (1962) 25—32.
- [41] RÉNYI, A.: „Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations.“ *Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Clermont* **2** (1962) 7—13.
- [42] RÉNYI, A.: „On the theory of outstanding observations.“ International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications, Stockholm, 1962, pp. 165—166.
- [43] RÉNYI, A.: „Sur les graphes aléatoires, I—II.“ L'Inst. H. Poincaré.

- [44] RÉNYI, A.—SULANKE, R.: „Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten." *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* **2** (1963) 75—84.
- [45] RÉNYI, A.—ERDŐS, P.: „Asymmetric graphs." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*
- [46] RÓZSA, P.—LOVASS NAGY, V.: „The Matrix Analysis for the Transient Voltage Distribution of Alternating Ladder Networks." *Proc. JEE*.*
- [47] SARKADI, K.: „Prüfung des Verteilungstyps." *Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften* (1963).*
- [48] SCHMIDT, E. T.: „Universale Algebren mit gegebenen Automorphismengruppen und Kongruenzverbänden." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*
- [49] SCHMIDT, E. T.: „Universale Algebren mit gegebenen Automorphismengruppen und Unterhalbgruppenverbänden." *Acta Scientiarum Mathematicarum*.*
- [50] SCHMIDT, E. T.: „Über die Kongruenzverbände der Verbände." *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*.*
- [51] SCHMIDT, E. T.: „Characterization of congruence lattice of lattices." *Transactions of the American Mathematical Society*.*
- [52] SERES, I.: „Über Irreduzibilität gewisser Polynome." *Acta Arithmetica*.*
- [53] STEINFELD, O.: „Über Semiringe mit multiplikativer Kürzungsregel." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*.*
- [54] STEINFELD, O.: „Über die Operatorenendomorphismen gewisser Operatorhalbgruppen." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*
- [55] STEINFELD, O.—FUCHS, L.: „Principal components and prime factorization in partially ordered semigroups." *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös nominatae, Sectio Mathematica*.*
- [56] SURÁNYI, J.: „On the fundamental theorem of the number theory."**
- [57] SURÁNYI, J.—FARAGÓ, L.—Mrs. GÁDOR, E.: „Quelques questions concernant l'enseignement des mathématiques, la location de l'enseignement, la reforme et l'opinion publique." UNESCO, 1962, 18 pp.
- [58] SZABÓ, Á.: „Der mathematische Begriff Dynamis und das sog. geometrische Mittel." *Maia*.*
- [59] SZABÓ, Á.: „Der Ursprung des „Euklidischen Verfahrens" und die Harmonielehre der Pythagoreer." *Math. Annalen* **150** (1963) 203—217.
- [60] SZABÓ, Á.: „Terminologiesgeschichte und Griechische Mathematikgeschichte." International Congress of Mathematicians. Outlines of One-hour and Half-hour Addresses. Stockholm, 1962, pp. 243—245.
- [61] SZÁSZ, F.: „Die Halbgruppen deren endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale sind." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)*.*
- [62] SZÁSZ, F.: „Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, III." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*
- [63] SZILÁRD, K.: „Die Analoga der ganzen rationalen Funktionen in verallgemeinerten Funktionenklassen." International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications, Stockholm, 1962, pp. 115—116.
- [64] SZÓKEFALVI-NAGY, B.: „The 'Outer Functions' and their Role in Function Calculus." International Congress of Mathematicians. Outlines of One-hour and Half-hour Addresses, Stockholm, 1962, pp. 245—246.
- [65] SZÓKEFALVI-NAGY, B.—FOIAŞ, C.: „Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI. Calcul fonctionnel." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **23** (1962) 130—167.
- [66] SZÓKEFALVI-NAGY, B.—FOIAŞ, C.: „Remark to the preceding paper of J. FELDMANN." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **23** (1962) 272—273.
- [67] TURÁN, P.: „A comparative theory of prime numbers." International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communications, Stockholm, 1962, p. 55.
- [68] TURÁN, P.: „On some questions concerning determinants." *Annales Polon. Mat.* **12** (1962) 49—53.
- [69—73] TURÁN, P.—KNAPOWSKI, S.: „Comparative prime-number theory, II, III, IV, V, VI." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **13** (1962) 315—342, 343—364; **14** (1963) 31—42, 43—63, 65—78.
- [74—75] TURÁN, P.—KNAPOWSKI, S.: „Comparative prime-number theory, VII, VIII." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*.*
- [76] VARGA, O.: „Herleitung des Cartanschen euklidischen Zusammenhanges in Finsl r-räumen mit Hilfe der Riemannschen Geometrie." *Acta Math. et Phys. Univ. Debreceniensis* **1** (1962) 117—120.

- [77] VARGA, O.: „Eine einfache Herleitung des Cartanschen Übertragung der Finslergeometrie." *Mathematicae Notae* **18** (1962).*
- [78] VINCZE, I.: „On a generating function in the theory of order statistics." *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*.*
- [79] VINCZE, I.: „Über einige Verteilungssätze in der Theorie der geordneten Stichproben." *Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften*.*
- [80] VINCZE, I.: „Some combinatorial relations concerning the symmetric random walk." *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées*.*
- VINCZE, I.: see [11]—[12].

**EXACT DATA OF PAPERS
MENTIONED EARLIER WITH
INCOMPLETE BIBLIOGRAPHICAL
DATA²**

**ТОЧНОЕ ДАННЫЕ РАБОТ
ПРИВЕДЕННЫХ РАНЬШЕ
С НЕПОЛНЫМИ
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИМИ
ДАНЫМИ²**

- VI.: [35] RÉNYI, A.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Anhang über Informationstheorie*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962. Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 54.
- VI.: [48] SZÁSZ, F.: „Die Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptidealsideale sind." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **13** (1962) 115—132.
- VII.: [1] ADÁM, A.: „Über die monotone Superposition der Wahrheitsfunktionen." *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **23** (1962) 18—37.
- VII.: [3] ADLER, G.: „Principes du maximum relatifs aux équations du type elliptique et parabolique dans le cas des conditions aux limites et des conditions initiales respectivement non-continues et non limitées." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **13** (1962) 289—297.
- VII.: [11] BÁNKÖVI, G.—HORVÁTH, J.—JAKOB, K.—SARKADI, K.: „Über Entwurf und Auswertung von Dieselölentschwefelungsversuchen mit mathematisch-statistischen Methoden." *Acta Chimica Hungarica* **31** (1962) 23—30.
- VII.: [14] CSÁKI, P.—FISCHER, J.: „Analysis of reaction curves by extreme values." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **18** (1962) 363—370.
- VII.: [15] CSÁSZÁR, Á.: *Foundations of General Topology*. Pergamon Press, Oxford—London—New York, 1963.
- VII.: [17] CSÁSZÁR, Á.: „Complétion et compactification d'espaces syntopogènes." *Gen. Top. Rel. Mod. Anal. Alg. Prague*, 1961, 133—137.
- VII.: [18] CSISZÁR, I.: „On the dimension and entropy of order α of the mixture of probability distributions." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **13** (1962) 245—255.
- VII.: [23] FREUD, G.: „Über die Konvergenz im Mittel von Lagrangeschen Interpolationspolynomfolgen." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **13** (1962) 257—268.
- VII.: [24] GRÄTZER, G.—SCHMIDT, E. T.: „On congruence lattices of lattices." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **13** (1962) 179—185.
- VII.: [31] LEE, A.: „Über einige Extremalaufgaben bezüglich endlicher Körper." *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **13** (1962) 235—243.

² The numbers preceding the serial numbers refer to the volume containing the respective list of papers.

² Римская цифра стоящая перед номером работы оказывает на том в котором фигурирует работа с неполными библиографическими данными.

- VII.: [38] RÉNYI, A.—ERDŐS, P.: „On a problem of A. Zygmund.” *Studies in Mathematical Analysis and Related Topics*, (ed. Gilborg, Solomon, etc.), Stanford University Press, 1962, pp. 110—116.
- VII.: [39] RÉNYI, A.: „On random subsets of a finite set.” *Mathematica (Cluj)* **3** (26) (1961) 355—362.
- VII.: [46] SZABÓ, Á.: „Analogia”. *Acta Antiqua Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1962) 237—245.
- VII.: [48] SZÁSZ, F.: „Verbandstheoretische Bemerkungen zum Fuchsschen Zeroidradikal der nichtassoziativen Ringe.” *Archiv der Mathematik* **12** (1961) 282—289.
- VII.: [49] SZÁSZ, F.: „Observations on the Brown-McCoy radical of rings.” *Proceedings of the Japanese Academy of Sciences* **37** (1961) 413—416.
- VII.: [50] SZÁSZ, F.: „Bemerkungen zu den assoziativen Hauptidealringen.” *Indagationes Mathematicae* **23** (1961) 577—583.
- VII.: [51] SZÁSZ, F.: „Bemerkungen zu meiner Arbeit 'Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind'.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **23** (1962) 64—66.
- VII.: [53] SZŐKEFALVI-NAGY, B.—FOIAŞ, C.: „Sur les contractions de l'espace de Hilbert, V.” *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **23** (1962) 106—129.
- VII.: [54] SZŐKEFALVI-NAGY, B.: Przemówienie wygłoszone na uroczystości ku uczczeniu pamięci Stefana Banacha.” *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II.: Wiadomości Matematyczne* **4** (1961) 269—270.
- VII.: [58] TURÁN, P.: „On Lindelöf's conjecture concerning Riemann zeta-function.” *Illinois Journal of Mathematics* **6** (1962) 95—97.
- VII.: [61] TURÁN, P.—KNAPOWSKI, S.: „Comparative prime-number theory, I.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **13** (1962) 299—314.
- VII.: [62] VARGA, O.: „Zur Begründung der Hilbertschen Verallgemeinerung der nicht-euklidischen Geometrie.” *Monatshefte für Mathematik* **66** (1962) 265—275.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Vidosa László

A kézirat nyomdába érkezett: 1963. VIII. 15. — Példányszám: 800 — Terjedelem: 21,8 (A/5) ív

63.57638 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ: RÉNYI ALFRÉD

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG: FREUD GÉZA, GALLAI TIBOR, GRÄTZER GYÖRGY, HEPPES ALADÁR,
MAKAI ENDRE, MEDGYESSY PÁL

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, CSISZÁR IMRE

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEINEK előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft, *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hirlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

РЕДКОЛЛЕГИЯ: GÉZA FREUD, TIBOR GALLAI, GYÖRGY GRÄTZER, ALADÁR HEPPES,
ENDRE MAKAI, PÁL MEDGYESSY

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, IMRE CSISZÁR

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15. ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюме на языках отличающихся от языка статьи.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает *Kultúra*, Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR IN CHIEF: ALFRÉD RÉNYI

EDITORIAL BOARD: GÉZA FREUD, TIBOR GALLAI, GYÖRGY GRÄTZER, ALADÁR HEPPES,
ENDRE MAKAI, PÁL MEDGYESSY

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, IMRE CSISZÁR

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

THE PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor in 2 type-written copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 7.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the *Kultúra* from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15. Hungary).

INDEX

СОДЕРЖАНИЕ

DAVENPORT, H.—ERDŐS, P.: A theorem on uniform distribution.....	3
FÉNYES, T.: Über restriktive lineare partielle Differential-Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten	13
CSÁKI, P.—FISCHER, J.: On the general notion of maximal correlation.....	27
FEJES TÓTH, L.: On the isoperimetric property of the regular hyperbolic tetrahedra	53
BÉKÉSSY, A.: On classical occupancy problems I.	59
RÉVÉSZ, P.: On sequences of quasi-equivalent events I.	73
CSISZÁR, I.: Eine informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizität von Markoffschen Ketten	85
MAKAI, E.: On the fundamental frequencies of two and three dimensional membranes	109
BÁRTFAI, P.: Irrfahrtsprobleme mit einer spiegelnden Wand.....	125
GALLAI, T.: Neuer Beweis eines Tutte'schen Satzes.....	135
ALPÁR, L.: Sur une forme symétrique des équations de Beltrami.....	141
LEINDLER, L.: О безусловной сходимости тригонометрических рядов.....	151
MAKAI, E.—TURÁN, P.: Hermite expansion and distribution of zeros of polynomials	157
GALLAI, T.: Kritische Graphen I.	165
GRÄTZER, G.: Free algebras over first order axiom systems	193
BOGNÁR, J.: О некоторых соотношениях неотрицательности операторов в про- странствах индефинитной метрикой	201
PÉTER, R.: Über die Rekursivität der Begriffe der mathematischen Grammatiken	213
ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On two problems of information theory.....	229
Bibliography. List of recent papers and books written by members of the institute, published or in print elsewhere in foreign languages.....	245

307.801

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

VIII. ÉVFOLYAM, A. SOROZAT, 3. FÜZET
1963

★

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ
ТОМ VIII, СЕРИЯ А, ВЫПУСК 3.
1963

★

PUBLICATIONS
OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
VOLUME VIII, SERIES A, FASC. 3.
1963



1964

2

INDEX

СОДЕРЖАНИЕ

SZEGŐ, G.: On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials	255
BIHARI, I.: An oscillation theorem concerning the half-linear differential equation of second order	275
CSÁKI, E.—VINCZE, I.: On some distributions connected with the arcsine law	281
HAJÓS, G.: Über eine Extremaleigenschaft der affin-regulären Polygone	293
FEJES TÓTH, L.: Über eine Extremaleigenschaft der affin-regulären Vielecke	299
PERGEL, J.: On a "Big Deviations" Problem	303
FRIVALDSZKY, S.: Теория обобщенных функций Соболева в случае общих (не звездообразных) областей	309
ALEXITS, G.—KRÁLIK, D.: Über den Annäherungsgrad der Approximation im starken Sinne von stetigen Funktionen	317
ALEXITS, G.: Sur les bornes de la théorie de l'approximation des fonctions continues par polynômes	329
SZÜSZ, P.: Über einen Satz der Kettenbruchlehre	341
SALLAY, M.: Über einen linearen mehrdimensionalen Approximationsprozess	347
PÓSA, L.: On the circuits of finite graphs	355
HEPPES, A.: Filling of a domain by discs	363
GALLAI, T.: Kritische Graphen II.	373
GRÄTZER, G.: On the Jordan-Hölder theorem for universal algebras	397
ERDŐS, P.—GINZBURG, A.: On a combinatorial problem in latin squares	407
CSÁSZÁR, Á.: Sur un critère d'approximation uniforme	413
SZILÁRD, K.: Über die topologische Natur einiger allgemeiner Sätze der Theorie der elliptischen Funktionen	417
MEDGYESSY, P.: On the interconnection between the representation theorems of characteristic functions of unimodal distribution functions and of convex characteristic functions	425
PALÁSTI, I.: On the connectedness of bichromatic random graphs	431
SZÁSZ, F.: Über Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind	443
ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On random matrices	455
ROßBERG, H. J.: Über das asymptotische Verhalten der Rand- und Zentralglieder einer Variationsreihe	463
KREM, A.: On the independence in the limit of extreme and central order statistics	469
BIHARI, I.: The asymptotic behaviour of a system of nonlinear differential equations	475

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

VIII. ÉVFOLYAM, A. SOROZAT, 3. FÜZET

1963

★

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ
ТОМ VIII, СЕРИЯ А, ВЫПУСК 3.

1963

★

PUBLICATIONS
OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
VOLUME VIII, SERIES A, FASC. 3.

1963



1964

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ: RÉNYI ALFRÉD

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG: FREUD GÉZA, GALLAI TIBOR, GRÄTZER GYÖRGY, HEPPES ALADÁR,
MAKAI ENDRE, MEDGYESSY PÁL

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, CSISZÁR IMRE

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azokról különböző nyelvű kivonatok csatolnak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEINEK előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft. Belföldön előfizethető a Posta Központi Hirlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. A folyóirat egyes füzetel 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

РЕДКОЛЛЕГИЯ: GÉZA FREUD, TIBOR GALLAI, GYÖRGY GRÄTZER, ALADÁR HEPPES,
ENDRE MAKAI, PÁL MEDGYESSY

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, IMRE CSISZÁR

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия A и B. Серия A выходит на иностранных языках, Серия B — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии A и одного выпуска серии B. Статьи снабжены с резюме на языках отличающихся от языка статьи. Работы, предназначенные для опубликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR IN CHIEF: ALFRÉD RÉNYI

EDITORIAL BOARD: GÉZA FREUD, TIBOR GALLAI, GYÖRGY GRÄTZER, ALADÁR HEPPES,
ENDRE MAKAI, PÁL MEDGYESSY

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, IMRE CSISZÁR

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 7,— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

ON BI-ORTHOGONAL SYSTEMS OF TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS¹

by
GÁBOR SZEGŐ²

To Karl Loewner
in friendship

§ 1. Introduction

1. Let $w(\theta)$ be a non-negative function of the class $L(0, 2\pi)$ which is not a zero function. It is convenient to interpret it as the weight function of a distribution $w(\theta)d\theta$ on the unit circle $z = e^{i\theta}$. More generally we may consider an arbitrary distribution (measure) $da(\theta)$ on the unit circle; in what follows, however, we restrict ourselves, for the sake of simplicity, to the previously defined case, i.e., to the case when $a(\theta)$ is absolutely continuous.

It is well known ([1], chapter 2; [2], chapter 11)³ that a uniquely determined system of polynomials $\{\varphi_n(z)\}$ can be formed which is orthonormal on the unit circle with respect to the given distribution; more precisely,

$$(a) \quad \varphi_n(z) = k_n z^n + \dots + l_n \text{ is a polynomial of the precise degree } n; \\ k_n > 0;$$

$$(b) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)} w(\theta) d\theta = \delta_{nm}, \quad z = e^{i\theta}; \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

In the following we shall use the standard notation in (a).

In an analogous manner we may consider a weight function $W(x)$ (not a zero function) on the real interval $-1 \leq x \leq 1$, and form the uniquely determined system of orthonormal polynomials $\{p_n(x)\}$ defined by the following conditions:

$$(a) \quad p_n(x) = k'_n x^n + \dots \text{ is a polynomial of the precise degree } n; \quad k'_n > 0;$$

$$(b) \quad \int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) W(x) dx = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

A simple and useful relation exists between these two classes of orthonormal polynomials ([2], 11.5). We assume that the weight function $w(\theta)$ of the unit circle is *even*, $w(-\theta) = w(\theta)$. We further assume the following relation between the weight functions $w(\theta)$ and $W(x)$:

$$(1.1) \quad w(\theta) = W(\cos \theta) |\sin \theta|,$$

¹This research was supported by the National Science Foundation.

²Stanford University, California, USA.

³Numbers refer to the Bibliography.

or in another form, $w(\theta) d\theta = W(x) |dx|$ where $x = \cos \theta$. The meaning of the last condition is obvious; it expresses the invariance of the mass element in the transition from the upper (or lower) semi-circle to the interval.

Under the condition (1.1) the following identities (1.2) hold:

$$\begin{aligned}
 p_n(x) &= (2\pi)^{-1/2} \left(1 + \frac{l_{2n}}{k_{2n}} \right)^{-1/2} (z^{-n} \varphi_{2n}(z) + z^n \varphi_{2n}(z^{-1})) = \\
 &= (2\pi)^{-1/2} \left(1 - \frac{l_{2n}}{k_{2n}} \right)^{-1/2} (z^{-n+1} \varphi_{2n-1}(z) + z^{n-1} \varphi_{2n-1}(z^{-1})); \\
 (1.2) \quad q_{n-1}(x) &= \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{l_{2n}}{k_{2n}} \right)^{-1/2} \frac{z^{-n} \varphi_{2n}(z) - z^n \varphi_{2n}(z^{-1})}{z - z^{-1}} = \\
 &= \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{l_{2n}}{k_{2n}} \right)^{-1/2} \frac{z^{-n+1} \varphi_{2n-1}(z) - z^{n-1} \varphi_{2n-1}(z^{-1})}{z - z^{-1}}; \quad x = \frac{z + z^{-1}}{2}.
 \end{aligned}$$

Here $\{\varphi_n(z)\}$ and $\{p_n(x)\}$ have the same meaning as above and $\{q_n(x)\}$ designates the orthonormal system associated with the weight function $(1 - x^2)W(x)$ on $-1 \leq x \leq 1$. These relations can be used for the calculation of the systems $\{p_n(x)\}$ and $\{q_n(x)\}$ provided the system $\{\varphi_n(z)\}$ is known, as well as for the solution of the inverse problem. Indeed, $\varphi_n(z)$ can be expressed as a linear combination of two appropriate polynomials of the systems $\{p_n(x)\}$ and $\{q_n(x)\}$; we observe also that each function $(1 - x^2)q_{n-1}(x)$ is a linear combination of $p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$ and $p_{n+1}(x)$ [cf. 2, 2.5].

2. The purpose of the present investigation is to extend these relations to the case when the weight $w(\theta)$ is not necessarily even. In this more general case it is convenient to introduce a certain bi-orthogonal system of *trigonometric polynomials* which are orthogonal with respect to the given weight $w(\theta)$. They represent natural generalizations of the simplest bi-orthogonal trigonometric system, namely $\{\cos n\theta, \sin n\theta\}$, corresponding to the weight $w(\theta) = 1$. The trigonometric polynomials thus defined depend only on $w(\theta)$. They can easily be expressed in terms of $\{p_n(x)\}$ and $\{q_n(x)\}$ in the case when $w(\theta)$ is even. From this point of view they appear as certain generalizations of the orthogonal polynomials on a finite interval.

We shall study the principal properties of these trigonometric polynomials systematically; some of these properties are of algebraic (formal) character, some others are of the transcendental (asymptotic) nature. One instance of the latter kind is the question of the asymptotic behavior for large values of the degree and the connected expansion problem. This expansion of an arbitrary function in terms of the bi-orthogonal trigonometric polynomials, represents a very natural generalization of the classical Fourier series.

3. A trigonometric polynomial of degree n with the highest term $a \cos n\theta + a' \sin n\theta$ is called of the precise degree n if the constants a and a' are not both zero. Two trigonometric polynomials $A(\theta) = a \cos n\theta + a' \sin n\theta + \dots$, $B(\theta) = b \cos n\theta + b' \sin n\theta + \dots$ of degree n are called linearly independent if the determinant $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}$ is not zero. As a consequence, $A(\theta)$ and $B(\theta)$ must be of the precise degree n .

Given the weight function $w(\theta)$, we define the corresponding biorthogonal system of trigonometric polynomials $\{A_n(\theta), B_n(\theta)\}$ by the following conditions:

- (a) $A_n(\theta)$ and $B_n(\theta)$ are linearly independent trigonometric polynomials of degree n ;
- (b) they are orthonormal in the following sense:

$$(1.3) \quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_n(\theta) A_m(\theta) w(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} B_n(\theta) B_m(\theta) w(\theta) d\theta = \delta_{nm}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A_n(\theta) B_m(\theta) w(\theta) d\theta = 0, \end{cases} \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

The system $\{A_n(\theta), B_n(\theta)\}$ is of course not unique; the most general system of this sort arises by multiplying each vector (matrix) $(A_n(\theta), B_n(\theta))$ with an arbitrary 2×2 orthogonal matrix O_n with constant elements depending on n :

$$(A_n(\theta), B_n(\theta)) \cdot O_n.$$

As mentioned above we may replace $w(\theta)d\theta$ by an arbitrary distribution $d\alpha(\theta)$.

4. The trigonometric polynomials under consideration can be obtained by a straight-forward application of the Gram-E. Schmidt process. Another way of generating them is a simple relationship which permits us to derive the bi-orthogonal system from the polynomials $\{\varphi_n(z)\}$ defined in 1. The resulting formulas are generalizations of the identities (1.2) to which they reduce when $w(\theta)$ is an even function, $w(-\theta) = w(\theta)$. In this case the bi-orthogonal trigonometric polynomials can be expressed in terms of the polynomials $\{p_n(x)\}$ and $\{q_n(x)\}$ which are orthogonal on the interval $-1 \leq x \leq 1$. Another interesting specialization appears when $w(\theta)$ is the reciprocal of a positive trigonometric polynomial.

There is a simple recurrence relation satisfied by the bi-orthogonal trigonometric polynomials, generalizing the classical difference equation satisfied by the polynomials orthogonal on the real interval $-1 \leq x \leq 1$. Also the location of the zeros of the bi-orthogonal trigonometric polynomials is studied together with a formula for a mechanical quadrature.

In the further course the finite kernel function of the bi-orthogonal system is introduced and its relation to the finite kernel function of the system $\{\varphi_n(z)\}$ is discussed.

This terminates the part dealing with algebraic properties. So far as asymptotic theorems for the trigonometric polynomials are concerned, they can be easily deduced from the corresponding results on $\varphi_n(z)$; the same holds for the equiconvergence theorem of the „Fourier expansion”.

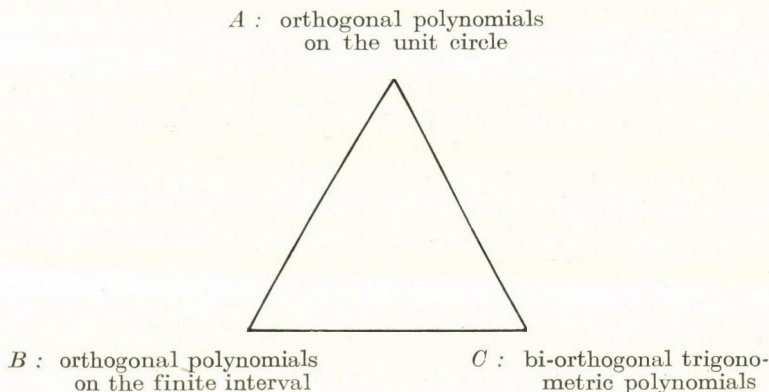
In a short closing section we deal with a corresponding system of surface harmonics which are orthogonal on the unit sphere with respect to a given distribution on this sphere.

5. The relationship between the three orthogonal systems defined above can be described as follows:

The transition from A to B is given by the formulas (1.2); the weight function is even.

The transition from A to C is given by Theorems 1 and 2 of Section 3; the weight function is arbitrary.

The transition from C to B is obtained when the weight in C is even; the suitably normalized bi-orthogonal trigonometric polynomials are in this case pure cosine and pure sine polynomials, respectively, and for $\cos \theta = x$ they yield the polynomials of the type B .



6. Section 2 contains certain preliminaries on trigonometric polynomials in general and on the polynomials orthogonal on the unit circle (cf. A). In Section 3 we describe the generation of the bi-orthogonal system and the transition from A to C . Section 4 deals with a generalization of the recurrence formula well known in the case B . In Section 5 we discuss the location of the zeros of the bi-orthogonal trigonometric polynomials and the associated mechanical quadrature. In Section 6 we define the finite kernel function. In Section 7 we deal with some special cases and in some generality with the asymptotic behavior of the bi-orthogonal trigonometric polynomials and of the kernel function. In Section 8 we prove an equiconvergence theorem. Finally, in Section 9 we define the space analog of C , namely the linear combinations of surface harmonics orthogonal on the unit sphere with respect to a given distribution.

§ 2. Preliminaries

1. An expression of the form

$$a_0 + 2(a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) + 2(a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta) + \dots + 2(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

with real coefficients a_k, b_k is called a trigonometric polynomial of degree n . It is of the precise degree n if a_n and b_n are not both zero. The well known special cases are the cosine and sine polynomials.

Let $A(\theta)$ and $B(\theta)$ be two trigonometric polynomials of degree n . They are linearly independent, if and only if each element of the linear manifold $\lambda A(\theta) + \mu B(\theta)$ is of the precise degree n , unless λ and μ are both zero. This is equivalent to the definition in 1.3.

In what follows we shall consider certain systems of the form

$$A_0(\theta); \{A_n(\theta), B_n(\theta)\} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

where $A_n(\theta)$ and $B_n(\theta)$ are of degree n and linearly independent for each n . Every trigonometric polynomial $T(\theta)$ of degree n can be written in the form

$$T(\theta) = \lambda_0 A_0(\theta) + \lambda_1 A_1(\theta) + \mu_1 B_1(\theta) + \dots + \lambda_n A_n(\theta) + \mu_n B_n(\theta)$$

where the constants $\lambda_0, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_n, \mu_n$ are uniquely determined. Indeed we can find unique λ_n, μ_n such that

$$T(\theta) - (\lambda_n A_n(\theta) + \mu_n B_n(\theta))$$

will be of degree $n - 1$.

2. A trigonometric polynomial $T(\theta)$ of the precise degree n has exactly $2n$ real or complex zeros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2n}$ provided we count the zeros as usual with their multiplicity and we restrict ourselves to the strip $-\pi < \text{Re}(\theta) \leq \pi$.

Let α and β be arbitrary constants; then

$$\sin \frac{\theta - \alpha}{2} \cdot \sin \frac{\theta - \beta}{2}$$

represents a trigonometric polynomial of the first degree. The trigonometric polynomial $T(\theta)$ considered above can be written in the following form:

$$T(\theta) = c \prod_{v=1}^n \sin \frac{\theta - \theta_{2v-1}}{2} \sin \frac{\theta - \theta_{2v}}{2}, \quad c \neq 0.$$

This representation is of course not unique.

Let $T(\theta)$ vanish for given values $\theta = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2m}$, $m \leq n$; we form the trigonometric polynomial

$$U(\theta) = \prod_{v=1}^m \sin \frac{\theta - \alpha_{2v-1}}{2} \sin \frac{\theta - \alpha_{2v}}{2}$$

of degree m ; then $T(\theta)$ is „divisible” by $U(\theta)$, i.e., a trigonometric polynomial $V(\theta)$ of degree $n - m$ can be found such that $T(\theta) = U(\theta) V(\theta)$.

3. Let

$$g(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$$

be a rational polynomial of degree n in z with arbitrary complex coefficients. We say that

$$g^*(z) = z^n \bar{g}(z^{-1}) = \bar{c}_n + \bar{c}_{n-1} z + \dots + \bar{c}_0 z^n$$

is reciprocal to $g(z)$. If $\{z_v\}$ are the zeros of $g(z)$, those of $g^*(z)$ will be $\{\bar{z}_v^{-1}\}$. (The modification necessary for $z_v = 0$ or ∞ is obvious.) A polynomial $g(z)$ is called self-reciprocal, or briefly reciprocal if $g(z) = g^*(z)$, i.e., $c_v = \bar{c}_{n-v}$. Let $T(\theta)$ be a trigonometric polynomial of degree n ; then $T(\theta) = z^{-n} G(z)$ where $G(z) = G^*(z)$ is a reciprocal polynomial of degree $2n$, so that $T(\theta) = z^{-n} G(z) = z^n \bar{G}(z^{-1})$; $z = e^{i\theta}$.

4. **Theorem** of L. FEJÉR and F. RIESZ. *Any trigonometric polynomial $T(\theta)$ which is non-negative for all real θ , can be written in the form $|g(z)|^2$, $z = e^{i\theta}$, where $g(z)$ is a polynomial of the same degree as $T(\theta)$. This representation of $T(\theta)$ will be unique if we subject $g(z)$ to one of the following two conditions:*

- (a) $g(z) \neq 0$ in $|z| < 1$; $g(0)$ is real and positive;
- (b) $g(z) \neq 0$ in $|z| > 1$; the leading coefficient of $g(z)$ is real and positive.

Conversely, if $g(z)$ is any rational polynomial, the expression $|g(z)|^2$, $z = e^{i\theta}$, represents a trigonometric polynomial which is non-negative for all real θ .

5. Finally, we note a few basic properties of the orthogonal polynomials $\{\varphi_n(z)\}$ defined in 1.1 (cf. [1], chapter 2; [2], chapter 11).

(a) The polynomial $\varphi_n(z)$ is determined (except for a constant factor) by the following property:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(z) \overline{q(z)} w(\theta) d\theta = 0 \quad z = e^{i\theta},$$

where $q(z)$ is an arbitrary polynomial of degree $n-1$.

(b) The polynomial

$$(2.1) \quad \sum_{v=0}^n \overline{\varphi_v(a)} \varphi_v(z) = s_n(a, z)$$

is called the kernel polynomial of degree n . It has the reproducing property:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(a, z) \overline{q(z)} w(\theta) d\theta = \overline{q(a)}, \quad z = e^{i\theta},$$

where $q(z)$ is any polynomial of degree n . This kernel can be represented as follows:

$$(2.2) \quad s_n(a, z) = \frac{\overline{\varphi_{n+1}^*(a)} \varphi_{n+1}^*(z) - \overline{\varphi_{n+1}(a)} \varphi_{n+1}(z)}{1 - \bar{a}z}.$$

(c) From (2.2) we conclude easily the identities where k_n and l_n are defined as in 1.1:

$$(2.3) \quad \begin{cases} k_n z \varphi_n(z) = k_{n+1} \varphi_{n+1}(z) - l_{n+1} \varphi_{n+1}^*(z), \\ k_n \varphi_{n+1}(z) = k_{n+1} z \varphi_n(z) + l_{n+1} \varphi_n^*(z). \end{cases}$$

(d) We have

$$(2.4) \quad \sum_{v=0}^n |l_v|^2 = k_n^2.$$

(e) All zeros of $\varphi_n(z)$ are in the open unit circle $|z| < 1$.

(f) Let $w(\theta) = 1/h(\theta)$ where $h(\theta)$ is a positive trigonometric polynomial of the precise degree h . Representing $h(\theta)$ in the form $|g(z)|^2$, $z = e^{i\theta}$, where $g(z)$ is the (uniquely determined) polynomial of degree h with all its zeros in $|z| < 1$ and such that its leading coefficient is real and positive, we have

$$(2.5) \quad \varphi_n(z) = z^{n-h} g(z), \quad n \geq h.$$

§ 3. Construction of the bi-orthogonal system

1. Let $w(\theta)$ be a given weight function characterizing a distribution on the unit circle. We define a linear function space by the following scalar product and norm:

$$(3.1) \quad \begin{cases} (f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) g(\theta) w(\theta) d\theta, \\ \|f\|^2 = (f, f). \end{cases}$$

Here w , f , and g are such that the integrals occurring exist in the Lebesgue sense and w is not a zero function.

With this metric we orthogonalize the elementary functions

$$1, \cos \theta, \sin \theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \dots, \cos n\theta, \sin n\theta, \dots,$$

arranged in a linear order, according to the Gram—E. Schmidt process. This leads at once to certain trigonometric polynomials $A_n(\theta)$, $B_n(\theta)$ having the property described in 1.3. The matrix of the leading coefficients in $A_n(\theta)$, $B_n(\theta)$ has the form

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & b' \end{pmatrix}$$

where a and b' are different from zero. The most general system of this kind arises by the formula

$$A_n(\theta) \cos \delta - B_n(\theta) \sin \delta, \pm (A_n(\theta) \sin \delta + B_n(\theta) \cos \delta),$$

where $\delta = \delta_n$ are arbitrary real constants. In what follows we shall describe another way of generating the same bi-orthogonal systems, based on the polynomials $\{\varphi_n(z)\}$.

In the special case when $w(\theta)$ is even, the functions defined by the Gram—E. Schmidt process are obviously cosine and sine polynomials, respectively.

2. We prove the following

Theorem 1. *Let $\{\varphi_n(z)\}$ be the orthonormal system of polynomials associated with the weight function $w(\theta)$, $\varphi_n(0) = l_n$. Let the angle γ_{2n} be chosen such that $\exp(-2i\gamma_{2n}) \cdot l_{2n}$ is real. The trigonometric polynomials $f_n(\theta)$ and $g_n(\theta)$ defined by*

$$(3.2) \quad \exp(-i\gamma_{2n}) \cdot z^{-n} \varphi_{2n}(z) = f_n(\theta) + ig_n(\theta), \quad z = e^{i\theta}, n = 0, 1, 2, \dots,$$

satisfy the orthogonality (but not the normalization) conditions (1.3).

Thus multiplying $f_n(\theta)$ and $g_n(\theta)$ by appropriate constants, we obtain another generation of the bi-orthogonal system. We have

$$(3.3) \quad \begin{aligned} 2f_n(\theta) &= \exp(-i\gamma_{2n}) \cdot z^{-n} \varphi_{2n}(z) + \exp(i\gamma_{2n}) \cdot z^n \bar{\varphi}_{2n}(z^{-1}), \\ 2ig_n(\theta) &= \exp(-i\gamma_{2n}) \cdot z^{-n} \varphi_{2n}(z) - \exp(i\gamma_{2n}) \cdot z^{-n} \bar{\varphi}_{2n}(z^{-1}), \quad z = e^{i\theta}. \end{aligned}$$

We note that γ_{2n} is determined mod $(\pi/2)$ provided $l_{2n} \neq 0$. If $l_{2n} = 0$, γ_{2n} is arbitrary. The different choices of γ_{2n} ($\gamma_{2n} \pm \pi/2$ and $\gamma_{2n} + \pi$) cause only unessential changes of the vector $(f_n(\theta), g_n(\theta))$.

The proof is immediate. Indeed, any trigonometric polynomial of degree $n-1$ is a linear combination of the functions $z^v = e^{iv\theta}$, $-n+1 \leq v \leq n-1$. Now

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z^{-n} \varphi_{2n}(z) z^v w(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{2n}(z) \bar{z}^{n-v} w(\theta) d\theta = 0, \end{aligned} \quad z = e^{i\theta}.$$

Here $f_n(\theta)$ and $g_n(\theta)$ are orthogonal to any trigonometric polynomial of degree $n-1$. Further we form

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\exp(-i\gamma_{2n}) z^{-n} \varphi_{2n}(z))^2 w(\theta) d\theta = \|f_n\|^2 - \|g_n\|^2 + 2i(f_n, g_n), \quad z = e^{i\theta}.$$

In view of the orthogonality this integral is

$$\begin{aligned} &= \exp(-2i\gamma_{2n}) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{2n}(z) z^{-2n} \varphi_{2n}(z) w(\theta) d\theta = \\ &= \exp(-2i\gamma_{2n}) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{2n}(z) l_{2n} z^{-2n} w(\theta) d\theta = \\ &= \exp(-2i\gamma_{2n}) \cdot \frac{l_{2n}}{k_{2n}} = \pm \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}}, \end{aligned}$$

so that $(f_n, g_n) = 0$ and $\|f_n\|^2 - \|g_n\|^2 = \pm |l_{2n}|/k_{2n}$. Also, $\|f_n\|^2 + \|g_n\|^2 = 1$, so that

$$\|f_n\|^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}} \right), \quad \|g_n\|^2 = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}} \right).$$

Let us choose γ_{2n} such that the upper signs hold. The trigonometric polynomials

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{aligned} A_n(\theta) &= 2^{1/2} \left(1 + \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}} \right)^{-1/2} f_n(\theta) = \\ &= 2^{-1/2} \left(1 + \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}} \right)^{-1/2} (\exp(-i\gamma_{2n}) \cdot z^{-n} \varphi_{2n}(z) + \exp(i\gamma_{2n}) \cdot z^n \bar{\varphi}_{2n}(z^{-1})), \\ B_n(\theta) &= 2^{1/2} \left(1 - \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}} \right)^{-1/2} g_n(\theta) \\ &= 2^{-1/2} \left(1 - \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}} \right)^{-1/2} \cdot -i(\exp(-i\gamma_{2n}) \cdot z^{-n} \varphi_{2n}(z) - \exp(i\gamma_{2n}) \cdot z^n \bar{\varphi}_{2n}(z^{-1})), \end{aligned} \right. \quad z = e^{i\theta},$$

form then a bi-orthogonal and normalized set. We note that

$$(3.5) \quad 2^{1/2} \exp(-i\gamma_{2n}) \cdot z^{-n} \varphi_{2n}(z) = \\ = \left(1 + \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}}\right)^{1/2} A_n(\theta) + i \left(1 - \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}}\right)^{1/2} B_n(\theta), \quad z = e^{i\theta}.$$

If $\exp(-2i\gamma_{2n}) \cdot l_{2n} = -|l_{2n}|$, the normalizing factors in (3.4) and (3.5) have to be modified replacing $|l_{2n}|$ by $-|l_{2n}|$.

3. In the first identity (2.3) we replace n by $2n - 1$ and we obtain the following formulas in which the same symbols are used as in 2.

Theorem 2. For each n

$$\begin{aligned} \exp(-i\gamma_{2n}) \cdot z^{1-n} \varphi_{2n-1}(z) &= \\ &= \left(1 - \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}}\right)^{-1/2} f_n(\theta) + i \left(1 + \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}}\right)^{-1/2} g_n(\theta), \\ 2 \left(1 - \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}}\right)^{-1/2} f_n(\theta) &= \\ &= \exp(-i\gamma_{2n}) \cdot z^{1-n} \varphi_{2n-1}(z) + \exp(i\gamma_{2n}) \cdot z^{n-1} \bar{\varphi}_{2n-1}(z^{-1}), \\ 2 \left(1 + \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}}\right)^{-1/2} i g_n(\theta) &= \\ &= \exp(-i\gamma_{2n}) \cdot z^{1-n} \varphi_{2n-1}(z) - \exp(i\gamma_{2n}) \cdot z^{n-1} \bar{\varphi}_{2n-1}(z^{-1}), \\ 2^{1/2} \exp(-i\gamma_{2n}) \cdot z^{1-n} \varphi_{2n-1}(z) &= \\ &= \left(1 - \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}}\right)^{1/2} A_n(\theta) + i \left(1 + \frac{|l_{2n}|}{k_{2n}}\right)^{1/2} B_n(\theta), \quad z = e^{i\theta}. \end{aligned}$$

Indeed, $z = e^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} k_{2n-1} z^{1-n} \varphi_{2n-1}(z) &= \\ &= k_{2n} z^{-n} \varphi_{2n}(z) - l_{2n} z^n \bar{\varphi}_{2n}(z^{-1}) = \\ &= k_{2n} \exp(i\gamma_{2n}) \cdot (f_n(\theta) + i g_n(\theta)) - l_{2n} \exp(-i\gamma_{2n}) \cdot (f_n(\theta) - i g_n(\theta)) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{k_{2n} - \exp(-2i\gamma_{2n}) \cdot l_{2n}}{k_{2n-1}} &= \frac{k_{2n} - |l_{2n}|}{(k_{2n}^2 - |l_{2n}|^2)^{1/2}}, \\ \frac{k_{2n} + \exp(-2i\gamma_{2n}) \cdot l_{2n}}{k_{2n-1}} &= \frac{k_{2n} + |l_{2n}|}{(k_{2n}^2 - |l_{2n}|^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Here we used (2.4). Again we assumed that $\exp(-2i\gamma_{2n}) \cdot l_{2n} = |l_{2n}|$. If $\exp(-2i\gamma_{2n}) \cdot l_{2n} = -|l_{2n}|$, the normalizing factors in Theorem 2 must be modified as in 2.

§ 4. Recurrence relations

1. In the second identity (2.3) we replace n by $2n$ and obtain

$$k_{2n} z^{-n} \varphi_{2n+1}(z) = k_{2n+1} z \cdot z^{-n} \varphi_{2n}(z) + l_{2n+1} z^n \bar{\varphi}_{2n}(z^{-1}),$$

so that in view of Theorems 1 and 2:

$$\begin{aligned} k_{2n} \exp(i\gamma_{2n+2}) \cdot (p_n f_{n+1}(\theta) + i q_n g_{n+1}(\theta)) &= \\ &= k_{2n+1} z \exp(i\gamma_{2n}) \cdot (f_n(\theta) + i g_n(\theta)) + \\ &+ l_{2n+1} \exp(-i\gamma_{2n}) \cdot (f_n(\theta) - i g_n(\theta)) = \\ &= k_{2n+1} z \exp(i\gamma_{2n}) \cdot (f_n(\theta) + i g_n(\theta)) + \\ &+ |l_{2n+1}| \exp[i(2\gamma_{2n+1} - \gamma_{2n})] \cdot (f_n(\theta) - i g_n(\theta)), \end{aligned}$$

where

$$(4.1) \quad p_n = q_n^{-1} = \left(\frac{1 - |l_{2n+2}|/k_{2n+2}}{1 + |l_{2n+2}|/k_{2n+2}} \right)^{1/2}$$

and

$$\exp(-2i\gamma_{2n+1}) \cdot l_{2n+1} = |l_{2n+1}|, \quad z = e^{i\theta}.$$

Hence we conclude the relations

$$(4.2) \quad \begin{cases} k_{2n} p_n f_{n+1}(\theta) = (k_{2n+1} \cos(\theta + \delta_n) + |l_{2n+1}| \cos \delta'_n) f_n(\theta) + \\ \quad + (-k_{2n+1} \sin(\theta + \delta_n) + |l_{2n+1}| \sin \delta'_n) g_n(\theta); \\ k_{2n} q_n g_{n+1}(\theta) = (k_{2n+1} \sin(\theta + \delta_n) + |l_{2n+1}| \sin \delta'_n) f_n(\theta) + \\ \quad + (k_{2n+1} \cos(\theta + \delta_n) - |l_{2n+1}| \cos \delta'_n) g_n(\theta), \end{cases}$$

where

$$(4.3) \quad \delta_n = \gamma_{2n} - \gamma_{2n+2}, \quad \delta'_n = 2\gamma_{2n+1} - \gamma_{2n} - \gamma_{2n+2}.$$

It is easy to transcribe these relations into some others between the normalized functions $A_n(\theta)$, $B_n(\theta)$. Here we have chosen $\exp(-2i\gamma_{2n+2}) \cdot l_{2n+2}$ and $\exp(-2i\gamma_{2n+1}) \cdot l_{2n+1}$ to be positive (≥ 0) and $\exp(-2i\gamma_{2n}) \cdot l_{2n}$ real. In the case when the first of these three quantities is negative, p_n and q_n must be interchanged; when the second quantity is negative, $|l_{2n+1}|$ must be replaced by $-|l_{2n+1}|$.

The relations (4.2) can be written in the matrix form

$$(4.4) \quad (f_{n+1}(\theta), g_{n+1}(\theta)) = (f_n(\theta), g_n(\theta)) \begin{pmatrix} a_n(\theta) & b_n(\theta) \\ c_n(\theta) & d_n(\theta) \end{pmatrix}$$

where the elements of the 2×2 matrix are trigonometric polynomials of the first order.

A typical instance is the trivial case $w(\theta) = 1$; the recurrences assume the form

$$(4.5) \quad \begin{cases} \cos(n+1)\theta = \cos\theta \cos n\theta - \sin\theta \sin n\theta, \\ \sin(n+1)\theta = \sin\theta \cos n\theta + \cos\theta \sin n\theta. \end{cases}$$

2. The special case when $w(\theta)$ is even, $w(-\theta) = w(\theta)$, is of particular interest; the recurrences (4.2) become then the classical recurrence relations for orthogonal polynomials of a finite real interval. Indeed, in this case all coefficients of the polynomials $\varphi_n(z)$ are real, thus l_n is real. We choose $\gamma_{2n} = 0$ for all n , so that $f_n(\theta)$ will be a cosine and $g_n(\theta)$ a sine polynomial. Also we choose $\gamma_{2n+1} = 0$ or $\pi/2$ according as l_{2n+1} is positive or negative. We have then the relations

$$(4.6) \quad \begin{cases} k_{2n} p_n f_{n+1}(\theta) = (k_{2n+1} \cos \theta + l_{2n+1}) f_n(\theta) - k_{2n+1} \sin \theta \cdot g_n(\theta), \\ k_{2n} q_n g_{n+1}(\theta) = k_{2n+1} \sin \theta \cdot f_n(\theta) + (k_{2n+1} \cos \theta - l_{2n+1}) g_n(\theta), \end{cases}$$

$$p_n = q_n^{-1} = \left(\frac{1 - l_{2n+2}/k_{2n+2}}{1 + l_{2n+2}/k_{2n+2}} \right)^{1/2}.$$

From the first equation we derive

$$\begin{aligned} -k_{2n+1} \sin \theta \cdot g_n(\theta) &= k_{2n} p_n f_{n+1}(\theta) - (k_{2n+1} \cos \theta + l_{2n+1}) f_n(\theta), \\ -k_{2n+3} \sin \theta \cdot g_{n+1}(\theta) &= k_{2n+2} p_{n+1} f_{n+2}(\theta) - (k_{2n+3} \cos \theta + l_{2n+3}) f_{n+1}(\theta). \end{aligned}$$

Combining this with the second equation (4.6) and taking the identity

$$k_{2n+1} \sin^2 \theta + (k_{2n+1} \cos \theta - l_{2n+1}) \frac{k_{2n+1} \cos \theta + l_{2n+1}}{k_{2n+1}} = k_{2n+1} - \frac{l_{2n+1}^2}{k_{2n+1}}$$

into account, we obtain a recurrence of the classical type

$$f_{n+2}(\theta) = (r_n \cos \theta + s_n) f_{n+1}(\theta) + t_n f_n(\theta)$$

for $f_n(\theta)$. Similarly, we can derive a recurrence for $g_n(\theta)$.

§ 5. Zeros. Mechanical quadrature

1. We use the previous notation and prove

Theorem 3. *Let a and b be real constants, not both zero. The trigonometric polynomial $a f_n(\theta) + b g_n(\theta)$ has real and distinct zeros. The zeros of $f_n(\theta)$ and $g_n(\theta)$ are interlacing each other.*

More generally, the zeros of

$$a f_n(\theta) + b g_n(\theta), \quad -b f_n(\theta) + a g_n(\theta)$$

interlace. The assertion is an immediate consequence of the argument principle applied to the rational function

$$(a - ib) \exp(-i \gamma_{2n}) \cdot z^{-n} \varphi_{2n}(z) = w,$$

which has a pole of order n at the origin and $2n$ zeros in $|z| < 1$. (The modification is obvious if $z = 0$ is a zero of $\varphi_{2n}(z)$.) Hence the index number of the curve described by w as $|z| = 1$, is $2n - n = n$. Consequently every

half ray issued from the origin $w = 0$, will be intersected by this curve at least n times in such a manner that the argument of w at the point of intersection is increasing. Choosing for these rays the real and imaginary semi-axes, we obtain at least $2n$, hence exactly $2n$ zeros for both trigonometric polynomials in question. The interlacing property will be obvious also.

2. Theorem 4. *Let us denote by $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2n}$ the zeros of the trigonometric polynomial $af_n(\theta) + bg_n(\theta)$ defined in Theorem 3. There exist certain positive constants $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n}$ such that for any trigonometric polynomial $T(\theta)$ of degree $2n - 1$ the following identity holds:*

$$(5.1) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta) w(\theta) d\theta = \sum_{v=1}^{2n} \lambda_v T(\theta_v).$$

The proof follows the classical pattern. We write $u(\theta) = af_n(\theta) + bg_n(\theta)$ and form the expression

$$h(\theta) = \sum_{v=1}^{2n} T(\theta_v) \left(\frac{u(\theta)}{2u'(\theta_v) \sin \frac{\theta - \theta_v}{2}} \right)^2.$$

Here $u'(\theta_v) \neq 0$. Let μ be any value different from v ; there exists a trigonometric polynomial $v(\theta)$ of degree $n - 1$ such that

$$u(\theta) = \sin \frac{\theta - \theta_v}{2} \sin \frac{\theta - \theta_\mu}{2} \cdot v(\theta),$$

so that

$$\left(\frac{u(\theta)}{2u'(\theta_v) \sin \frac{\theta - \theta_v}{2}} \right)^2 = \left(\frac{\sin \frac{\theta - \theta_\mu}{2}}{2u'(\theta_v)} \right)^2 (v(\theta))^2.$$

Hence $h(\theta)$ is a trigonometric polynomial of degree $2n - 1$, and obviously $h(\theta_v) = T(\theta_v)$. Consequently, $T(\theta) - h(\theta) = u(\theta) v_1(\theta)$ where $v_1(\theta)$ is of degree $n - 1$, so that

$$\int_{-\pi}^{\pi} (T(\theta) - h(\theta)) w(\theta) d\theta = 0.$$

Writing

$$\lambda_v = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{u(\theta)}{2u'(\theta_v) \sin \frac{\theta - \theta_v}{2}} \right)^2 w(\theta) d\theta$$

the assertion follows immediately.

§ 6. Kernel function

1. We define the finite reproducing kernel function of the bi-orthogonal system by

$$(6.1) \quad A_0(\alpha) A_0(\theta) + \sum_{v=1}^n (A_v(\alpha) A_v(\theta) + B_v(\alpha) B_v(\theta)) = K_n(\alpha, \theta)$$

where α and θ are real variables. Obviously, each term $A_v(\alpha) A_v(\theta) + B_v(\alpha) B_v(\theta)$ will be invariant if we multiply the vector $(A_v(\theta), B_v(\theta))$ by an arbitrary orthogonal matrix with real constant elements. Thus, $K_n(\alpha, \theta)$ depends only on the weight function $w(\theta)$ (and, of course, on α, θ, n).

The kernel function possesses the reproducing property

$$(6.2) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\alpha, \theta) \cdot t(\theta) w(\theta) d\theta = t(\alpha),$$

where $t(\theta)$ is an arbitrary trigonometric polynomial of degree n .

2. **Theorem 5.** Let $s_n(a, z)$ be the kernel function associated with the system $\{\varphi_n(z)\}$; let $a = e^{i\alpha}$, $z = e^{i\theta}$. We have the identity

$$(6.3) \quad K_n(\alpha, \theta) = (a\bar{z})^n s_{2n}(a, z).$$

Thus, the right-hand side is real. This follows also from the identity $s_{2n}(a, z) = (\bar{a}z)^{2n} s_{2n}(\bar{z}^{-1}, \bar{a}^{-1})$ [cf. 2, (11.3.4)] for $|a| = |z| = 1$.

For the proof of (6.3) we verify that the right-hand expression has the reproducing property. We choose $t(\theta) = z^v = e^{iv\theta}$ where v is an integer, $-n \leq v \leq n$. We have, using the reproducing property of $s_{2n}(a, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (a\bar{z})^n s_{2n}(a, z) \cdot t(\theta) w(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a^n s_{2n}(a, z) \cdot \bar{z}^{n-v} w(\theta) d\theta = \\ &= a^n \cdot \bar{a}^{n-v} = a^v = t(\alpha). \end{aligned}$$

3. Combining Theorem 5 with (2.2) and with the last formula in Theorem 2, we obtain a closed form for the kernel function (6.1). Indeed,

$$\begin{aligned} K_{n-1}(\alpha, \theta) &= (a\bar{z})^{n-1} \frac{\overline{\varphi_{2n-1}^*(a)} \varphi_{2n-1}^*(z) - \overline{\varphi_{2n-1}(a)} \varphi_{2n-1}(z)}{1 - \bar{a}z} = \\ &= \frac{(\bar{a}z)^{n-1/2} \varphi_{2n-1}(a) \overline{\varphi_{2n-1}(z)} - (a\bar{z})^{n-1/2} \overline{\varphi_{2n-1}(a)} \varphi_{2n-1}(z)}{(a\bar{z})^{1/2} - (\bar{a}z)^{1/2}} = \\ &= \frac{\operatorname{Im} \{(\bar{a}z)^{n-1/2} \varphi_{2n-1}(a) \overline{\varphi_{2n-1}(z)}\}}{\operatorname{Im} \{(a\bar{z})^{1/2}\}}. \end{aligned}$$

Writing $2r_n = 1 - |l_{2n}|/k_{2n}$, $2s_n = 1 + |l_{2n}|/k_{2n}$, we find

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \{ (\bar{a}z)^{n-1/2} \varphi_{2n-1}(a) \overline{\varphi_{2n-1}(z)} \} &= \\ &= \operatorname{Im} \{ (\bar{a}z)^{1/2} (r_n^{1/2} A_n(\alpha) + i s_n^{1/2} B_n(\alpha)) (r_n^{1/2} A_n(\theta) - i s_n^{1/2} B_n(\theta)) \} = \\ &= (r_n s_n)^{1/2} \cos \frac{\theta - \alpha}{2} (A_n(\theta) B_n(\alpha) - A_n(\alpha) B_n(\theta)) + \\ &+ \sin \frac{\theta - \alpha}{2} (r_n A_n(\alpha) A_n(\theta) + s_n B_n(\alpha) B_n(\theta)), \end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned} K_{n-1}(\alpha, \theta) &= \frac{1}{2} \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} \operatorname{ctg} \frac{\theta - \alpha}{2} (A_n(\alpha) B_n(\theta) - A_n(\theta) B_n(\alpha)) - \\ (6.4) \quad &- (r_n A_n(\alpha) A_n(\theta) + s_n B_n(\alpha) B_n(\theta)). \end{aligned}$$

Here we used the formula

$$(6.5) \quad 2r_n \cdot 2s_n = 1 - \frac{|l_{2n}|^2}{k_{2n}^2} = \left(\frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} \right)^2,$$

which is a consequence of (2.4).

§ 7. Special cases; asymptotic behavior

1. Let us consider the special case defined in Section 2.5 (f): $w(\theta) = 1/h(\theta)$ where $h(\theta) = |g(z)|^2$, $z = e^{i\theta}$, is a trigonometric polynomial of the precise degree h ; $g(z)$ is a polynomial of degree h , all zeros of which are in $|z| < 1$, and $g(z)$ has a positive leading coefficient.

We assume that $2n - 1 \geq h$. In view of (2.5) we have $l_{2n} = 0$ so that $\gamma_{2n} = \gamma$ is arbitrary. We have by the last formula in Theorem 2:

$$(7.1) \quad 2^{1/2} e^{-i\gamma} z^{n-h} g(z) = A_n(\theta) + i B_n(\theta), \quad z = e^{i\theta}.$$

Here γ is arbitrary real. Formula (3.5) yields the same result, and in addition also the case $2n = h$; we have then $l_{2n} = l_h = g(0)$ and γ is defined as in Theorem 1.

2. Now let $w(\theta)$ be a positive weight function defined on the unit circle and satisfying the Lipschitz-Dini condition

$$(7.2) \quad |w(\theta + \delta) - w(\theta)| < L |\log \delta|^{-1-\lambda},$$

where L and λ are positive constants. This case was considered in [2], chapters 10, 12 and 13; we refer here to those results which are relevant for our purposes.

There exists an analytic function $D(z)$ regular for $|z| < 1$ and continuous for $|z| \leq 1$, such that $w(\theta) = |D(e^{i\theta})|^2$. By the additional conditions $D(z) \neq 0$ in $|z| < 1$ and $D(0) > 0$, this function is uniquely determined.

For each n there exists a polynomial $h(z)$ of degree $n - 1$, $h(z) \neq 0$ for $|z| \leq 1$, such that

$$(7.3) \quad |D(z) - (h(z))^{-1}| < Q(\log n)^{-\lambda}$$

uniformly in $|z| \leq 1$ [cf. 2, (10.3.12)]. From this we conclude [cf. 2, (13.7.4)] that

$$(7.4) \quad |D(e^{i(\theta+\delta)}) - D(e^{i\theta})| < L' |\log \delta|^{-\lambda}.$$

Finally we have [2, Theorem 12.1.3]

$$(7.5) \quad \varphi_n(z) = z^n \{\overline{D(z)}\}^{-1} + \varepsilon_n(z), \quad |\varepsilon_n(z)| < C(\log n)^{-\lambda}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Here Q and C depend only on L , λ , and on the minimum and maximum of $w(\theta)$. We have, $z = e^{i\theta}$,

$$(7.6) \quad \begin{aligned} l_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(z) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z^n \{\overline{D(z)}\}^{-1} d\theta + O[(\log n)^{-\lambda}] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z^n [\{\overline{D(z)}\}^{-1} - \overline{h(z)}] d\theta + O[(\log n)^{-\lambda}] = O[(\log n)^{-\lambda}]. \end{aligned}$$

Thus we find from (3.5) that for $n \rightarrow \infty$, $z = e^{i\theta}$,

$$(7.7) \quad A_n(\theta) + iB_n(\theta) = 2^{1/2} \exp(-i\gamma_{2n}) \cdot z^n \{\overline{D(z)}\}^{-1} + O[(\log n)^{-\lambda}].^4$$

We conclude that $A_n(\theta)$ and $B_n(\theta)$ are uniformly bounded as $n \rightarrow \infty$. Another important consequence is that for $a = e^{ia}$, $z = e^{i\theta}$, we have

$$(7.8) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} (A_n(a) B_n(\theta) - A_n(\theta) B_n(a)) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} \operatorname{Im} \{ (A_n(a) - iB_n(a)) (A_n(\theta) + iB_n(\theta)) \} = \\ &= \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} \operatorname{Im} \{ \exp[in(\theta - a)] [D(a)]^{-1} [\overline{D(z)}]^{-1} \} + O[(\log n)^{-\lambda}], \\ &\hspace{25em} a = e^{ia}, z = e^{i\theta}, \end{aligned}$$

since k_{2n-1}/k_{2n} is bounded. We note also that in view of (2.4) and (7.6)

$$(7.9) \quad \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} = 1 + O(|l_{2n}|^2) = 1 + O[(\log n)^{-2\lambda}].$$

This formula will be used later.

⁴ It would be possible to make more precise statements about the constants occurring in the various remainder terms. For the sake of brevity we omit these details.

§ 8. Equiconvergence

1. Based on the previous preparations we prove now the following:

Theorem 6. *Let $f(\theta)$ be an arbitrary bounded and measurable function. We denote by*

$$(8.1) \quad s_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) K_n(\alpha, \theta) w(\theta) d\theta$$

the n^{th} partial sum of the expansion of $f(\theta)$ in the generalized Fourier series proceeding in terms of the bi-orthogonal trigonometric polynomials associated with the weight function $w(\theta)$. Here $w(\theta)$ satisfies the Lipschitz-Dini condition (7.2) with $\lambda > 1$.

We denote by

$$(8.2) \quad s'_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \frac{\sin(2n+1) \frac{\theta - \alpha}{2}}{\sin \frac{\theta - \alpha}{2}} d\theta$$

the n^{th} partial sum of the ordinary Fourier series of $f(\theta)$. Both s_n and s'_n are taken at $\theta = \alpha$. Then

$$(8.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s'_n) = 0.$$

2. We make first some preliminary observations.

(a) As remarked in Section 7, $A_n(\theta)$ and $B_n(\theta)$ are uniformly bounded as $n \rightarrow \infty$. By Riemann's Lemma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) w(\theta) A_n(\theta) d\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) w(\theta) B_n(\theta) d\theta = 0.$$

The assertions

$$(8.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n-1} - s'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(s_{n-1} - \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} s'_n \right) = 0$$

are equivalent with (8.3) since $s'_n = O(\log n)$ (Lebesgue constants) so that in view of (7.9), $2\lambda > 1$, we have

$$\left(\frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} - 1 \right) s'_n = o(1), \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

We shall use (6.4). The contribution of the second term of (6.4) to s_{n-1} tends to zero.

(b) We assume that $|\theta - \alpha| < \varepsilon/n$ where $\varepsilon > 0$ is independent of n . The expression (7.8) as a function of θ is uniformly bounded; hence, by S. Bernstein's theorem, its derivative is $O(n)$, so that the corresponding parts of the integrals (8.1) and (8.2) are equal to $\varepsilon \cdot O(1/n) \cdot O(n) = \varepsilon \cdot O(1)$.

(c) Let $|\theta - \alpha| \geq \varepsilon/n$. Taking (8.4) into account, the first term in the last expression of (7.8) will yield:

$$(8.5) \quad \frac{1}{2\pi} \int f(\theta) \operatorname{Im} \left\{ \exp [i(n+1/2)(\theta - \alpha)] \left(\sin \frac{\theta - \alpha}{2} \right)^{-1} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{D(z)}{D(a)} \exp [-i(\theta - \alpha)/2] \cos \frac{\theta - \alpha}{2} - 1 \right] \right\} d\theta, \quad a = e^{ia}, \quad z = e^{i\theta},$$

where we integrate over $|\theta - \alpha| \geq \varepsilon/n$. Now by (7.4)

$$\frac{D(z)}{D(a)} - 1 = O[|\log |\theta - \alpha||^{-\lambda}]$$

and

$$|\theta - \alpha|^{-1} \cdot |\log |\theta - \alpha||^{-\lambda}$$

is integrable. The same holds for

$$\left(\sin \frac{\theta - \alpha}{2} \right)^{-1} \left[\exp [-i(\theta - \alpha)/2] \cos \frac{\theta - \alpha}{2} - 1 \right]$$

(this function is continuous), so that

$$(8.6) \quad f(\theta) \cdot \left(\sin \frac{\theta - \alpha}{2} \right)^{-1} \left[\frac{D(z)}{D(a)} \exp [-i(\theta - \alpha)/2] \cos \frac{\theta - \alpha}{2} - 1 \right]$$

is integrable. Adding now to (8.5) the same integral extended over $|\theta - \alpha| < \varepsilon/n$, the added part will be

$$O(1) \cdot \int_{|\theta - \alpha| < \varepsilon/n} |\theta - \alpha|^{-1} \cdot |\log (\theta - \alpha)|^{-\lambda} d\theta = O[(\log n)^{1-\lambda}] = o(1) \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

since $\lambda > 1$. Using Riemann's Lemma, the total expression (8.5) (extended over the whole period $-\pi \leq \theta \leq \pi$) tends to zero as $n \rightarrow \infty$.

(d) Finally we deal with the contribution of the remainder term in (7.8). Since

$$\int_{|\theta - \alpha| \geq \varepsilon/n} \left| \sin \frac{\theta - \alpha}{2} \right|^{-1} d\theta = O(\log n),$$

we obtain $O(\log n) \cdot O[(\log n)^{-\lambda}] = o(1)$, taking again $\lambda > 1$ into account.

Thus the theorem on equiconvergence is established.

§ 9. Problems on the sphere

There is an analog of the bi-orthogonal trigonometric polynomials in higher dimensional euclidean spaces. They are linear combinations of surface harmonics orthogonal on the unit sphere with respect to a given weight function. The construction described in 3.1 can be applied. However, the problems about nodal lines, asymptotic behavior and equiconvergence seem to be rather difficult. There is, of course, no analog of the polynomials $\{\varphi_n(z)\}$ of a complex variable z . For the sake of simplicity we restrict ourselves to the three-dimensional case.

1. Let θ and φ be the usual coordinates on the unit sphere, θ the distance from the pole, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi \leq \varphi < \pi$. Let $w(\theta, \varphi)$ be a positive and continuous weight function on the unit sphere. We denote the surface harmonics of degree n , namely the functions

$$(9.1) \quad P_n(\cos \theta); (\sin \theta)^r P_n^{(v)}(\cos \theta) \exp(i v \varphi), \quad 1 \leq v \leq n,$$

briefly (in any fixed order) by

$$(9.2) \quad Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots, Y_N^{(n)}, \quad N = 2n + 1.$$

We apply now the Gram—E. Schmidt process to the functions

$$(9.3) \quad Y_k^{(m)}, \quad 1 \leq k \leq 2m + 1; \quad m = 0, 1, \dots, n - 1; \quad Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots, Y_h^{(n)},$$

where $1 \leq h \leq 2n + 1$. The ordering of the systems $\{Y_k^{(m)}\}$, $m < n$, is immaterial, but the ordering of the harmonics of degree n is essential. The scalar product is defined as follows:

$$(9.4) \quad (f, g) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi f(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi) w(\theta, \varphi) d\theta d\varphi.$$

We obtain certain surface harmonics of degree $\leq n$; the terms of degree n can be described as a linear transformation of $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \dots, Y_{2n+1}^{(n)}$, the matrix of which has main diagonal elements $\neq 0$ and all elements above the main diagonal are $= 0$.

The most general orthogonal system of this kind arises by applying to the system of functions of degree n , thus defined, an arbitrary orthogonal transformation of order $2n + 1$ with constant coefficients.

2. The „zonal” case, i.e., the case when $w(\theta, \varphi)$ is independent of φ , $w(\theta, \varphi) = w(\theta)$, allows certain simplifications. We have then an orthogonal system of the following kind:

$$(9.5) \quad p_n(\cos \theta); (\sin \theta)^r p_{nv}(\cos \theta) \exp(i v \varphi), \quad 1 \leq v \leq n.$$

Here $p_n(x)$ and $p_{nv}(x)$ are polynomials of degree n and $n - v$, respectively, satisfying the following orthogonality conditions [cf. 1.1]:

$$(9.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) W(x) dx = \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots; \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p_{nv}(x) p_{mv}(x) \cdot (1 - x^2)^r W(x) dx = \delta_{nm}, \quad n, m = v, v + 1, v + 2, \dots \end{array} \right.$$

(Received April 1, 1963)

BIBLIOGRAPHY

- [1] GRENANDER, U. and SZEGÖ, G.: *Toeplitz Forms and their Applications*. Univ. of Calif. Press, Berkeley and Los Angeles, 1957.
 [2] SZEGÖ, G.: „Orthogonal Polynomials”. *American Mathematical Society, Colloquium Publications*, Vol. **23**, Revised edition; New York, 1959.

О БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

G. SZEGÖ

Резюме

Пусть $w(\theta)$ неотрицательная, L -интегрируемая, не идентично исчезающая весовая функция с периодом 2π . Тогда существует система тригонометрических многочленов $(f_n(\theta), g_n(\theta))$, ортонормированных с весом $w(\theta)$ в смысле (1.3). Функция $w(\theta)$ определяет эти многочлены с точностью до ортогональных преобразований векторов $(f_n(\theta), g_n(\theta))$. В том частном случае, когда $w(\theta)$ является четной функцией, функции $f_n(\theta)$ и $g_n(\theta)$ можно легко выразить через некоторые многочлены переменной $x = \cos \theta$, являющиеся ортогональными на отрезке $-1 \leq x \leq 1$, в отношении подходящих весов на этом отрезке. В этом смысле наши тригонометрические многочлены представляют собой обобщение обыкновенных ортогональных тригонометрических многочленов конечного отрезка. Существует также тесная связь между многочленами $f_n(\theta)$ и $g_n(\theta)$ и многочленами величины $e^{i\theta}$, являющимися ортонормированными относительно подходящей весовой функции на единичной окружности. В статье исследуются разные свойства функции $f_n(\theta)$ и $g_n(\theta)$, например рекурсивные соотношения места нулей, керн-функция, механическая квадратура, и т. д. Кроме того, исследуется для больших индексов n асимптотическое поведение функций $f_n(\theta)$ и $g_n(\theta)$ и устанавливается одна теорема равномерности. При помощи последней теоремы могут быть легко обобщены некоторые классические свойства обыкновенных рядов Фурье.

Аналогические системы ортонормированных функций, представляющих собой соответствующие обобщения классических сферических функций Лапласа, могут быть исследованы на шаре.

AN OSCILLATION THEOREM CONCERNING THE HALF—LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF SECOND ORDER

by
IMRE BIHARI

1. By the equation in question we understand

$$(1) \quad x'' + f(t)g(x, x') = 0$$

provided that the function $g(u, v)$ possesses for arbitrary u, v, λ the following two properties: $g(\lambda u, \lambda v) = \lambda g(u, v)$ and $\operatorname{sg} g(u, v) = \operatorname{sg} u$. In this case equation (1) has namely with the linear equations the property in common that with $x(t)$ also $cx(t)$ is a solution for an arbitrary constant c .

In some previous papers [1]—[4] several problems were treated concerning (1), as that of the eigenvalues under Sturmian boundary conditions, criteria for non-oscillation, periodic solutions for periodic $f(t)$, asymptotic behaviour for $t \rightarrow +\infty$, etc.

In the present paper sufficient conditions are given for the oscillation of every solution of (1).

Let us assume the continuity of $f(t)$ and $g(u, v)$, furthermore the uniqueness of the solutions for given initial conditions. Then it is easy to show that a separation theorem holds here too, consequently either every solution is oscillatory or none of them. Viz., the Wronskian $W(x_1, x_2) = x_1' x_2 - x_1 x_2'$ of the linearly independent solutions x_1, x_2 does not vanish, since if $W(x_1, x_2)$ vanished at a place t_0 , the system of equations

$$c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) = 0$$

$$c_1 x_1'(t_0) + c_2 x_2'(t_0) = 0$$

would have a non-trivial solution c_1, c_2 , that is

$$x_1(t_0) = \lambda x_2(t_0), \quad x_1'(t_0) = \lambda x_2'(t_0)$$

would hold, which implies on account of the uniqueness $x_1(t) = \lambda x_2(t)$ for all t . — It can be shown in the same way that x_1 and x_2 have no zeros in common. (Incidentally, we remark that the constancy or non-constancy of $W(x_1, x_2)$ is an open question and it is also unknown, whether $W(x_1, x_2)$ has a positive lower bound or not, provided $W(x_1(t_0), x_2(t_0)) > 0$.) The zeros of the linearly independent solutions $x_1(t)$ and $x_2(t)$ separate each other. For if t_1 and t_2 ($t_1 < t_2$) are two successive zeros of $x_1(t)$, and $x_2(t)$ did not vanish between them, then the function $\frac{x_1(t)}{x_2(t)}$ would continuously differentiable in $[t_1, t_2]$ and

vanished at $t = t_1$ and $t = t_2$. Therefore, according to Rolle's theorem there would exist a place $t = t_3$ with $t_1 < t_3 < t_2$, where

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x_2}{x_2^2} \right) = \frac{W(x_1, x_2)}{x_2^2} = 0.$$

This is however impossible and so x_2 possesses one zero — moreover exactly one — in (t_1, t_2) .

If in (1) $f(t) \geq \alpha > 0$ (α constant), then the equation is oscillatory, as may be shown by applying a comparison theorem of Sturmian type (see [1]). Viz., the solutions of the comparison equation $x'' + \alpha g(x, x') = 0$ are all periodic. The mere assumption $f(t) \geq 0$ does not make possible the application of the comparison theorem. — In case of the linear equation $x'' + f(t)x = 0$ A. WINTNER [5] has shown the sufficiency of the sole condition

$$\int f(t) dt = +\infty$$

without making use of the assumption $f(t) \geq 0$, moreover he has given a slightly more general condition, too. — In respect of (1) we have the following weaker result only:

Theorem 1. *If in (1)*

- 1° $f(t) \geq 0$ and is continuous, furthermore $\int f(t) dt = +\infty$,
- 2° $g(u, v)$ is continuous, $g(\lambda u, \lambda v) = \lambda g(u, v)$, $\operatorname{sg} g(u, v) = \operatorname{sg} u$ for arbitrary λ, u, v ,
- 3° the solution is uniquely determined by the initial conditions, then all solutions are oscillatory.

Proof. If $x(t)$ is a solution of (1), we have

$$\begin{aligned} x'(t) - x'(t_0) &= - \int_{t_0}^t f(s) g(x(s), x'(s)) ds = \\ (2) \quad &= - \int_{t_0}^t f(s) \sqrt{x^2 + x'^2} g\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + x'^2}}, \frac{x'}{\sqrt{x^2 + x'^2}}\right) ds. \end{aligned}$$

Equation (1) implies $xx'' \leq 0$, therefore the graph of $x(t)$ turns its concave side toward the t -axis; consequently if $x(t)$ were not oscillating and e.g. had a positive sign for $t \geq t_0$, then $x(t) \geq c$ would hold with a certain $c > 0$. Thus $-\sqrt{x^2 + x'^2} \leq -x \leq -c$. Since $x'' < 0$, x' decreases, therefore cannot tend to $+\infty$, i.e. $x' \leq k$ ($k > 0$). If x' tended to $-\infty$, then beyond some $t = t_1$ x would assume negative values in contradiction with $x \geq c$. Excluding this possibility we have $x' \geq -l$ ($l > 0$) and thus

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x'^2}} \geq \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}} = h(x), \quad \lambda = \max(k, l).$$

But $h(x) \geq \mu > 0$ provided $x \geq c$ and in the domain $u^2 + v^2 = 1$, $u \geq \mu$ $\min g(u, v) > 0$ holds. Denoting this value by g_{\min} we have

$$x'(t) - x'(t_0) \leq -cg_{\min} \int_{t_0}^t f(s) ds,$$

therefore $x'(t) < 0$ for t sufficiently large and $x'(t) \rightarrow -\infty$ as $t \rightarrow \infty$, whence $x(t) < 0$ for $t > t_1$ with some $t_1 > t_0$.

Otherwise: If $x(t) > 0$ ($t > t_0$), then the function $q = \frac{x'}{x}$ exists for $t > t_0$

and satisfies the equation of Riccati type

$$(3) \quad q' + q^2 + f(t)g(1, q) = 0.$$

As $g(1, q) > 0$, we get from (3)

$$f(t) \leq -\frac{q'(t)}{g(1, q(t))}$$

whence

$$(4) \quad F(t) = \int_{t_0}^t f(s) ds \leq - \int_{t_0}^t \frac{q'(s)}{g(1, q(s))} ds = - \int_{q(t_0)}^{q(t)} \frac{du}{g(1, u)}.$$

But $F(t) \rightarrow +\infty$ as $t \rightarrow \infty$, so that $\int_{q(t_0)}^{q(t)} \frac{du}{g(1, u)} \rightarrow -\infty$, i.e. $q(t) \rightarrow -\infty$,

$t \rightarrow \infty$. If $x(t) \geq c > 0$, then this involves $x'(t) \rightarrow -\infty$, etc.

Transforming (1) by the substitution $x = \varrho(t) \sin \vartheta(t)$, $x'(t) = \varrho(t) \cos \vartheta(t)$ we get a third variation of the proof. Obtaining

$$(5) \quad \vartheta' = \cos^2 \vartheta + f(t)g(\sin \vartheta, \cos \vartheta) \sin \vartheta,$$

$$(6) \quad \varrho' = \varrho \cos \vartheta [\sin \vartheta - f(t)g(\sin \vartheta, \cos \vartheta)].$$

Here $\varrho = \sqrt{x^2 + x'^2} > 0$, hence $x = 0$ if and only if $\sin \vartheta = 0$. Therefore for not vanishing x

$$f(t) \leq \frac{\vartheta'}{g(\sin \vartheta, \cos \vartheta) \sin \vartheta} = -\frac{\vartheta'}{\sin^2 \vartheta g(1, \operatorname{ctg} \vartheta)},$$

whence

$$\int_{t_0}^t f(s) ds = - \int_{\operatorname{ctg} \vartheta(t_0)}^{\operatorname{ctg} \vartheta(t)} \frac{du}{g(1, u)} \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty),$$

i.e. $\operatorname{ctg} \vartheta(t) \rightarrow -\infty$. But $\operatorname{ctg} \vartheta(t) = \frac{x'}{x}$, etc. If we do not assume that $f(t) \geq 0$,

then we conclude from $\frac{x'}{x} \rightarrow -\infty$, that $\frac{x'}{x} < -k$ ($t > t_0$, $k > 0$), whence

$$0 < x(t) < x(t_0) e^{-k(t-t_0)},$$

i.e. $x(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$. Consequently, either (1) is oscillatory or every solution of (1) tends to zero as $t \rightarrow \infty$ (the solution $x = 0$ is asymptotically stable). In case of the linear equation from the latter property the former one follows, but here we did not obtain more than this alternative, although it is very probable that the assumption $f(t) \geq 0$ is unnecessary.

2. Let us consider now the equation

$$(7) \quad x'' + f(t)g(x) = 0$$

with $f(t)$ like in the previous paragraph and let $g(x)$ be a function defined for every x , continuous and non-decreasing with $\text{sg } g(x) = \text{sg } x$, furthermore let us assume uniqueness here, too. Then no separation theorem holds, we have however,

Theorem 2. *Every solution of (7) is oscillatory.* Obviously the former proof in its first form may be applied here, too. Now

$$x'(t) - x'(t_0) = - \int_{t_0}^t f(s)g(x(s))ds.$$

Here $xx'' < 0$ being also true, the supposition $x(t) \geq c$ ($c > 0$, $t > t_0$) gives $g(x(t)) \geq g(c)$, thus

$$x'(t) - x'(t_0) \leq -g(c) \int_{t_0}^t f(s)ds$$

whence for sufficiently large t we conclude $x(t) < 0$. If, for $t > t_0$, $x(t) \leq -c$ ($c > 0$), then $g(x(t)) \leq g(-c)$ and

$$x'(t) - x'(t_0) \geq -g(-c) \int_{t_0}^t f(s)ds$$

where $-g(-c) > 0$ and so for some $t > t_0$, $x'(t) > 0$ and $x'(t) \rightarrow +\infty$, as $t \rightarrow +\infty$, i.e. $x(t)$ would be positive from a certain place.

The more general equation

$$(8) \quad \frac{d}{dt}(h(t)x') + f(t)g(x) = 0$$

may be transformed by the substitution $\tau = \int_{t_1}^t \frac{ds}{h(s)}$ ($t_1 > 0$) into the equation

$$(8') \quad \frac{d^2 \bar{x}}{d\tau^2} + \bar{h}(\tau)\bar{f}(\tau)g(\bar{x}(\tau)) = 0 \quad (\bar{x}(\tau) = x(t), \bar{h}(\tau) = h(t), \bar{f}(\tau) = f(t))$$

and $\int_{t_0}^t f(t)dt = \int_{\tau_0}^{\tau} \bar{f}(\tau)\bar{h}(\tau)d\tau$. Consequently, if beside the above conditions

$h(t) > 0$ ($t > t_0$) and $\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{h(t)} = \infty$, then every solution of (8) is oscillatory (see also [6]).

If $h(0) = 0$, then $t = 0$ is a singular point of (8) and (8) can have solutions oscillating an infinite number of times in the neighbourhood of $t = 0$. The con-

ditions for this behaviour may be obtained by the transformation $\tau = \frac{1}{t}$. These are

$$f(t)h(t) \geq 0, \int_0^{t_0} f(t) dt = \infty, \int_0^{t_0} \frac{dt}{h(t)} = \infty \quad (t_0 > 0)$$

viz., equation (8) will then be transformed into

$$\frac{d}{d\tau} \left(\tau^2 \bar{h}(\tau) \frac{d\bar{x}}{d\tau} \right) + \frac{\bar{f}(\tau)}{\tau^2} g(\bar{x}(\tau)) = 0$$

and

$$\int_0^{t_0} f(t) dt = \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{\bar{f}(\tau)}{\tau^2} d\tau, \quad \int_0^{t_0} \frac{dt}{h(t)} = \int_{\tau_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2 \bar{h}(\tau)}.$$

(Received September 25, 1962)

REFERENCES

- [1] BIHARI, I.: "Ausdehnung der Sturmschen Oscillations- und Vergleichssätze..." *Public. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **2** (1957) 159—173.
- [2] BIHARI, I.: "Extension of certain theorems of the Sturmian type". *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **3** (1958) 13—20.
- [3] BIHARI, I.: "Asymptotic behaviour of the solutions of certain second order ordinary differential equations..." *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **6** (1961) 291—293.
- [4] BIHARI, I.: "On periodic solutions of certain second order ordinary differential equations with periodic coefficients". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **12** (1961) 11—16.
- [5] WINTNER, A.: "A criterion of oscillatory stability". *Quarterly of Applied Math.* **7** (1949) 115—117.
- [6] LEIGHTON, A.: "The detection of the oscillation of solutions of a second order linear differential equation". *Duke Math. Journal* **17** (1950) 57—61.

ОСЦИЛЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА, КАСАЮЩАЯСЬ ПОЛУЛИНЕЙ- НОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

I. BIHARI

Резюме

Уравнение (1) называется полулинейным, если функция $g(u, v)$ непрерывна, далее если для любых λ, u, v имеет силу равенство $g(\lambda u, \lambda v) = \lambda g(u, v)$ и, наконец, $\operatorname{sg} g(u, v) = \operatorname{sg} u$. Для случая $g(u, v) = u$ А. WINTNER показал, что любое решение уравнения (1) является осциллирующим, если $\int_0^{\infty} f(t) dt = +\infty$. В настоящей статье эта теорема распространяется на уравнение (1) с ограничивающим условием: $f(t) \geq 0$.

Подобный результат получается также в случае уравнения (7), если в нём $g(x)$ непрерывна, не убывающая и $\operatorname{sg} g(x) = \operatorname{sg} x$. В обоих случаях предполагается, также единственность решения при заданных начальных условиях. Полученная теорема имеет силу и для уравнения (8), если в нём $h(t) > 0$ ($t > t_0$) и $\int \frac{dt}{h(t)} = \infty$, а если $h(0) = 0$, тогда в окрестности особой точки $t = 0$ любое решение является осциллирующим, если только выполнены условия:

$$f(t)h(t) > 0, \quad \int_0^{t_0} f(t) dt = \infty, \quad \int_0^{t_0} \frac{dt}{h(t)} = \infty \quad (t > 0).$$

ON SOME DISTRIBUTIONS CONNECTED WITH THE ARCSINE LAW

by

E. CSÁKI and I. VINCZE

Introduction

1. In the following we shall consider both cases of the finite arcsine law, namely the original form due to CHUNG and FELLER [2] and the general case of SPARRE ANDERSEN [1] as well. In connection with these theorems we shall determine some distributions and shall give for the discrete case combinatorial proofs based on one-to-one correspondences. In formulating our results we shall make use of the model of CHUNG and FELLER:

Two gamblers A and B play a coin tossing game in which player A wins or loses a unit according to whether the result of the coin tossing is „head” or „tail”. Denoting his winnings in the i -th trial by ξ_i we have $\mathbf{P}(\xi_i = +1) = \mathbf{P}(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$ and the total amount of his winnings after i trials by $s_i = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_i$, ($s_0 = 0$); we shall say that A leads over B at the i -th trial, if either $s_i > 0$ or $s_i = 0$ but $s_{i-1} = +1$. Among $2n$ trials A may lead in $0, 2, 4, \dots, 2n$ trials and we shall denote by $2\gamma_{2n}$ the number of leading steps. As CHUNG and FELLER [2] have shown, γ_{2n} follows the finite arcsine law; i.e. if $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}$ are totally independent, then

$$(1) \quad \mathbf{P}(\gamma_{2n} = g) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2g}{g} \binom{2n-2g}{n-g}, \quad g = 0, 1, 2, \dots, n.$$

The limiting distribution, obtained by P. LÉVY in [6] is

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\gamma_{2n} < n\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha}.$$

In §1 we shall determine the distribution of the number of trials at which the winnings of player A makes at least $2k$. As given in Theorem 1.1, the following very simple modified form of the finite arcsine law is obtained:

$$(3) \quad \mathbf{P}(\gamma_{2n}^{(2k)} = g) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2g}{g} \binom{2n-2g}{n-g+k}$$

for $g = 1, 2, \dots, n$ and

$$(4) \quad \mathbf{P}(\gamma_{2n}^{(2n)} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=-k}^k \binom{2n}{n+j}.$$

In order to obtain a simple combinatorial proof for this relation, we shall give a new proof for the finite arcsine law. (It is to be remarked, that (3) and (4) can be derived from the finite arcsine law with the aid of generating functions too.) In this § we shall give a numerical example and consider the limiting distribution.

In §2 we shall determine the joint distribution of two random variables: the number of leading steps and the number of winning series of player A . A winning series is a sequence $\{s_v, s_{v+1}, \dots, s_\mu\}$ for which $s_j \geq 0$, $j = v, v+1, \dots, \mu$, but $s_{v-1} = s_{\mu+1} = -1$. (We make the agreement, that $s_{-1} = -s_1$.)

In §3 we shall consider the case $s_{2n} = 0$ for which CHUNG and FELLER in their cited paper found the well known result

$$P(\gamma_{2n} = g | s_{2n} = 0) = \frac{1}{n+1}, \quad g = 0, 1, \dots, n,$$

i.e. in this case γ_{2n} has a uniform distribution.

In §4 we shall turn to the general case. Let $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ be a sequence of independent, identically distributed random variables with continuous and symmetric distributions. Let us denote the partial sums by $S_0 = 0$, $S_i = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ and by $I_n^{(k)}$ the number of S_i 's ($i = 0, 1, \dots, n$) exceeding the value of the partial sum at the k -th ladder index (see [5] p. 82). We obtain the following simple result, corresponding to (3) and (4):

$$(3') \quad P(I_n^{(k)} = g) = \frac{1}{2^{2n-k}} \binom{2g}{g} \binom{2n-2g-k}{n-g}$$

for $g = 1, 2, \dots, n$ and

$$(4') \quad P(I_n^{(k)} = 0) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^{2n-j}} \binom{2n-j}{n}.$$

Both (3) and (3') give the respective arcsine law for $k = 0$.

Our formulas in §1—3 are derived for the special random variables $\xi_i = \pm 1$; according to known invariance principles our limiting distributions are however valid for more general random variables as well.

§1. The number of trials with an accumulated gain exceeding $2k$

1. In the following we shall make use of the geometrical description of the game. Let us consider in a coordinate-system the polygonal line whose vertices have abscissae i and ordinates s_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). This figure will be called a path.

Obviously n trials may occur in 2^n different ways each with the common probability 2^{-n} .

Let $2\gamma_{2n}^{(2k)}$ denote the number of indices i ($i = 1, 2, \dots, 2n$) for which either $s_i > 2k$ or $s_i = 2k$ but $s_{i-1} = 2k + 1$, where k is a non-negative integer. There holds the following

Theorem 1.1.

$$(3) \quad \mathbf{P}(\gamma_{2n}^{(2k)} = g) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2g}{g} \binom{2n-2g}{n-g+k} \quad g = 1, 2, \dots, n-k,$$

$$(4) \quad \mathbf{P}(\gamma_{2n}^{(2k)} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=-k}^k \binom{2n}{n+j}.$$

Let us now denote by $A_{2n,2g}^{(2k)}$ the set of paths $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ for which $s_{2g} = s_{2n} = 2k$ and by $B_{2n,2g}^{(2k)}$ the set of paths $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ for which $\gamma_{2n}^{(2k)} = g$.

It is trivial that

$$\mathbf{P}(s_{2(n-g)} = s_{2n} = 2k) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2g}{g} \binom{2n-2g}{n-g+k}$$

and therefore by establishing a 1—1 correspondence between the sets $A_{2n,2(n-g)}^{(2k)}$ and $B_{2n,2g}^{(2k)}$ formula (3) will be proved.

To begin with, we shall give the 1—1 correspondence for $k=0$ i.e. for the classical arcsine law.

Let $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ be an element of $B_{2n,2g}^{(0)}$. For the cases $g=0$ and $g=n$ we refer to lemma 2 in [3], for $1 \leq g < n$ we shall distinguish 4 cases:

- a) $s_1 = +1, \quad s_{2n-1} > 0$
- b) $s_1 = -1, \quad s_{2n-1} > 0$
- c) $s_1 = +1, \quad s_{2n-1} < 0$
- d) $s_1 = -1, \quad s_{2n-1} < 0$.

First we consider the case a).

Let us denote by $2\alpha_1 = j_1, 2(\alpha_1 + \alpha_2) = j_2, \dots, 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_t) = j_t$ the points where in the sequence $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ a change of sign takes place, i.e. $(s_{j_i}, s_{j_i+1}, \dots, s_{j_{i+1}})$ $i = 0, 1, \dots, t$ are either winning or losing series; let be $2\alpha_{t+1} = 2n - j_t$. The winning series are of length $2\alpha_1, 2\alpha_3, \dots$ for which $\alpha_1 + \alpha_3 + \dots = g$. The last series has the property $(s_{j_i} \geq 0, s_{j_i+1} \geq 0, \dots, s_{2n} \geq 0)$.

With respect to lemma 2 in [3] this last series corresponds to a path, $(s'_{2(g-\alpha_{t+1})}, \dots, s'_{2g})$ for which $s'_{2(g-\alpha_{t+1})} = s'_{2g} = 0$. Now we define $(s'_{2(g-\alpha_{t+1}-\alpha_{t-1})}, \dots, s'_{2(g-\alpha_{t+1})})$ as either $(s_{j_{t-2}}, \dots, s_{j_{t-1}})$ or $(-s_{j_{t-2}}, \dots, -s_{j_{t-1}})$ according to whether $s'_{2(g-\alpha_{t+1})+1} = -1$ or $+1$. Further let $(s'_{2(g-\alpha_{t+1}-\dots-\alpha_{t-2i+1})}, \dots, s'_{2(g-\alpha_{t+1}-\dots-\alpha_{t-2i-1})})$ be either $(s_{j_{t-2i}}, \dots, s_{j_{t-2i+1}})$ or $(-s_{j_{t-2i}}, \dots, -s_{j_{t-2i+1}})$ according to $s'_{2(g-\alpha_{t+1}-\dots-\alpha_{t-2i+1})+1} = -1$ or $+1$. Similar construction is made for $(s'_{2g}, \dots, s'_{2n})$, i.e. we join the losing series one after the other, reflecting every second to obtain intersection between two consecutive ones. The first (s'_2, \dots) will be defined by $s'_1 s'_{2g+1} = +1$.

The resulting path $(s'_0, s'_1, \dots, s'_{2g}, \dots, s'_{2n})$ is of type $A_{2n,2g}^{(0)}$.

In the other cases, similar constructions can be performed. The winning series in $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ will be transformed into $(s'_0, s'_1, \dots, s'_{2g})$ while the losing series into $(s'_{2g}, s'_{2g+1}, \dots, s'_{2n})$ in such a way that in case b) and d) $s'_1 s'_{2g+1} = -1$ and in case c) $s'_1 s'_{2g+1} = +1$.

In the reversed procedure, i.e. if we start from a path $(s'_0, s'_1, \dots, s'_{2n})$ of $A_{2n, 2g}^{(0)}$ the number of series occurring in section $(s'_0, s'_1, \dots, s'_{2g})$ and in section $(s'_{2g}, \dots, s'_{2n})$ are separately considered. If this number is greater in (s'_0, \dots, s'_{2g}) than in $(s'_{2g}, \dots, s'_{2n})$ we obtain case a) or b), according to whether $s'_1 s'_{2g+1} = +1$ or -1 . If more intersections take place in the last section, we are led to case c) or d), according to whether $s'_1 s'_{2g+1} = +1$ or -1 . If the number of series equals in both sections, we obtain case b) or c), according to whether $s'_1 s'_{2g+1} = -1$ or $+1$.

This argument shows that the correspondence between the sets $A_{2n, 2g}^{(0)}$ and $B_{2n, 2g}^{(0)}$ is one-to-one.

Turning to the case $k \geq 1$ we remark that a one-to-one correspondence holds between $A_{2n, 2(n-g)}^{(0)}$ and $B_{2n, 2g}^{(0)}$ as well.

If $2r$ denotes the first index for which $s_i = 2k$ then — similarly to the foregoing — the section $(s_{2r}, s_{2r+1}, \dots, s_{2n})$ can be corresponded to a section $(s'_{2r}, s'_{2r+1}, \dots, s'_{2n})$ for which $s'_{2r} = s'_{2(n-g)} = s'_{2n} = 2k$. Thus the path $(s_0, s_1, \dots, s_{2r-1}, s'_{2r}, s'_{2r+1}, \dots, s'_{2n})$ belongs to $A_{2n, 2g}^{(2k)}$. This correspondence can be reversed, which proves formula (3).

In order to prove formula (4) we have to substitute in (3) the value $g = 0$ and instead of k the variable index j . In this case

$$\mathbf{P}(\max_{0 \leq i \leq 2n} s_i = 2j) = \mathbf{P}(\max_{0 \leq i \leq 2n} s_i = 2j - 1) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n+j}$$

for $j = 1, 2, \dots, n$ and

$$\mathbf{P}(\max_{0 \leq i \leq 2n} s_i = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

Summation over j leads to our formula (4).

The limiting distribution is given by

Theorem 1.2. In case $k \sim y\sqrt{2n}$

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\gamma_{2n}^{(2k)} < \alpha n) = \int_0^y \frac{8}{\pi} e^{-2t^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{e^{-\frac{2y^2}{1-x}}}{\sqrt{x(1-x)}} dx, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

The proof can easily be derived by means of well known asymptotic formulae.

2. Let us now consider the shape of the distributions obtained in Theorems 1.1 and 1.2. These distributions are of course, not symmetric, namely the most likely value of $\gamma_{2n}^{(2n)}$ is 0 and the values close to $n - k$ have small probabilities, if $k \neq 0$. The density function $\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} e^{-\frac{2y^2}{1-x}}$ of the limiting distribution is infinite at $x = 0$ and it is 0 at $x = 1$, if $y \neq 0$. It could be expected that the probabilities are monotonically decreasing from $x = 0$, but this is not always the case.

Let us consider the limiting density function,

$$f_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} e^{-\frac{2y^2}{1-x}}$$

and its derivative

$$f'_y(x) = -\frac{1}{\pi} \frac{e^{-\frac{2y^2}{1-x}}}{2x^{3/2}(1-x)^{5/2}} [2x^2 + (4y^2 - 3)x + 1].$$

We can see that there is a critical value of y , namely $y_0 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, for

which $f'(x) = 0$ holds for a single value of x , namely $x = \frac{y_0}{\sqrt{2}}$.

If $y > y_0$, then $f'_y(x) < 0$ for $0 \leq x < 1$; for $0 < y < y_0$, $f'_y(x) = 0$ has two roots, $x_1(y)$ and $x_2(y)$, for which $\frac{1}{2} < x_1(y) < \frac{1}{\sqrt{2}} < x_2(y) < 1$; in this case

$$f'_y(x) \begin{cases} < 0, & \text{if } 0 < x < x_1(y) \\ = 0, & \text{if } x = x_1(y) \\ > 0, & \text{if } x_1(y) < x < x_2(y) \\ = 0, & \text{if } x = x_2(y) \\ < 0, & \text{if } x_2(y) < x < 1. \end{cases}$$

Taking into account, that $\lim_{x \rightarrow 1} f'_y(x) = 0$, we obtain the shape of the density function.

The value $f_y(x_2(y))$ of the local maximum tends to infinity as $y \rightarrow 0$.

The same property holds also for finite n ; for $y \ll \frac{\sqrt{2}-1}{2} \sqrt{2n}$ there is

a wave in the sequence of probabilities, for $y \gg \frac{\sqrt{2}-1}{2} \sqrt{2n}$, however they are monotonically decreasing. We give the probabilities for $n = 15$ with $k = 1$ and $k = 2$.

g	$k = 1$	$k = 2$
0	0,4153	0,6384
1	0,0697	0,0567
2	0,0540	0,0432
3	0,0465	0,0365
4	0,0421	0,0324
5	0,0394	0,0296
6	0,0377	0,0274
7	0,0366	0,0256
8	0,0360	0,0240
9	0,0259	0,0224
10	0,0361	0,0206
11	0,0368	0,0184
12	0,0378	0,0151
13	0,0387	0,0097
14	0,0374	—

§ 2. Joint distribution of the number of leading steps and the number of winning series

According to the definition of a winning series given in our introduction, we formulate the following

Theorem 2.1. *Let us denote by λ_{2n} the number of winning series, then*

$$\mathbf{P}(\lambda_{2n} = l, \gamma_{2n} = g) = \frac{1}{2^{2n}} \frac{\binom{2g}{g-l}}{g(n-g)} \left\{ l(2n-g+l) \binom{2n-2g}{n-g+l} + (l-1)(l+g) \binom{2n-2g}{n-g-l+1} \right\},$$

if $l = 1, 2, \dots, n$, $g = l, l+1, \dots, n-l$;
in the case of $g = 0$, also $l = 0$ and

$$\mathbf{P}(\lambda_{2n} = 0, \gamma_{2n} = 0) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

In the proof of Theorem 2.1 we refer to the considerations used in § 1 for the proof of the arcsine law.

In case a), i.e. $s_1 = +1$, $s_{2n-1} > 0$ there are $l-1$ complete winning series and one incomplete winning series, their total length being $2g$; according to Theorem 1 of [3] p. 283 the number of the possibilities equals

$$2 \binom{2g-1}{g-l} = \frac{l+g}{g} \binom{2g}{g-l}.$$

To each of these winning series there belong complete losing series of total length $2n-2g$, the number of the latter being — according to Theorem 1.2 of [4] p. 101 —

$$\frac{l-1}{n-g} \binom{2n-2g}{n-g-l+1}.$$

Hence case a) results in

$$\frac{(l-1)(l+g)}{g(n-g)} \binom{2g}{g-l} \binom{2n-2g}{n-g-l+1}$$

possible paths. By the same argument we obtain in case b)

$$\frac{l(l+g)}{g(n-g)} \binom{2g}{g-l} \binom{2n-2g}{n-g-l},$$

in case c)

$$\frac{l(n-g+l)}{g(n-g)} \binom{2g}{g-l} \binom{2n-2g}{n-g-l},$$

in case d)

$$\frac{l(n-g-l)}{g(n-g)} \binom{2g}{g-l} \binom{2n-2g}{n-g-l}.$$

The sum of the values in a)—d) leads to our formula in Theorem 2.1. For the limiting case we have the following

Theorem 2.2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\lambda_{2n} < y \sqrt{2n}, \gamma_{2n} < zn) = \frac{4}{\pi} \int_0^y \int_0^z \frac{u}{[v(1-v)]^{3/2}} e^{-\frac{2u^2}{v(1-v)}} du dv,$$

for $y \geq 0, 1 \geq z \geq 0$.

This is a consequence of simple and known asymptotic relations. Integration with respect to y and z resp. leads to the known relations

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\lambda_{2n} < y \sqrt{2n}) = \sqrt{\frac{32}{\pi}} \int_0^y e^{-8u^2} du,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\gamma_{2n} < nz) = \frac{1}{\pi} \int_0^z \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}.$$

§3. Some remarks concerning the case $s_{2n} = 0$.

In this § we consider the case, when the game becomes balanced after $2n$ steps, i.e. we assume throughout the condition $s_{2n} = 0$. We shall consider distribution laws of type dealt with in our § 1, i.e. concerning the random variables $2\gamma_{2n}^{(k)}$ and $\lambda_{2n}^{(k)}$. The first relation gives the number of steps in which the cumulative gain of A exceeds k and $\lambda_{2n}^{(k)}$ denotes the number of series of this kind. Authors determined in their paper [4] the following distribution

$$\mathbf{P}(\kappa_{2n} > k, \gamma_{2n}^{(k)} = g, \lambda_{2n}^{(k)} = l),$$

where κ_{2n} denotes the maximum of the cumulative gain of A in the course of $2n$ games.

For limiting distribution we obtained

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\kappa_{2n}}{\sqrt{2n}} > a, \frac{\lambda_{2n}^{(k)}}{\sqrt{2n}} < y, \frac{\gamma_{2n}^{(k)}}{n} < z \right) = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \int_0^z \frac{u^2 + 2au}{[v(1-v)]^{3/2}} e^{-\frac{(u+2av)^2}{2v(1-v)}} du dv. \end{aligned}$$

The extension of the distribution

$$\mathbf{P}(\gamma_{2n} = g | s_{2n} = 0) = \frac{1}{n+1}, \quad g = 0, 1, \dots, n$$

is obtained by substituting $y = \infty$. For the density function

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\kappa_{2n}}{\sqrt{2n}} > a, z < \frac{\gamma_{2n}^{(2k)}}{n} < z + dz \right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_z^1 \frac{a}{[v(1-v)]^{3/2}} e^{-\frac{2a^2}{v(1-v)}} dv dz$$

holds.

It can be seen that — similarly to the arcsine law — the density is infinite for $z = 0$, it is however zero for $z = 1$ in consequence of the conditions $s_{2n} = 0$ and $a > 0$.

The uniform distribution belonging to the case $a = 0$ can be obtained using the substitution

$$x = \frac{2a^2}{1-v}.$$

We obtain for our above expression

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2a^2}{1-z}}^{\infty} \frac{x}{(x - 2a^2)^{3/2}} e^{-x} dx dz,$$

which is the analogon of the expression (5) in case $s_{2n} = 0$. Substituting $a = 0$ we obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(z < \frac{\gamma_{2n}}{n} < z + dz \right) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx dz = dz.$$

§ 4. The case of continuous and symmetric variables

Let $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ be totally independent random variables with a common continuous symmetric distribution function. Let further be $S_0 = 0$, $S_i = \xi_1 + \dots + \xi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. An index i is called a ladder index if $S_j < S_i$, $j = 0, 1, \dots, i-1$. It may occur that $i = 0$ is the only ladder index, the probability of which is in consequence of the arcsine law (the case $g = 0$)

$$\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

If there are several ladder indices $i_1 < i_2 < \dots < i_t$, then $S_{i_1} < S_{i_2} < \dots < S_{i_t}$. Using the above assumptions and notations, there holds the following

Theorem 3.1. Denoting by $I_n^{(k)}$ the number of terms in (S_0, S_1, \dots, S_n) which exceed S_{i_k} the following relations hold:

$$(3') \quad \mathbf{P}(I_n^{(k)} = g) = \frac{1}{2^{2n-k}} \binom{2g}{g} \binom{2n-2g-k}{n-g}$$

for $g = 1, 2, \dots, n$ and

$$(4') \quad \mathbf{P}(I_n^{(k)} = 0) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^{2n-j}} \binom{2n-j}{j}.$$

Remark: $I_{n+k}^{(2k)}$ has formally the same distribution as $\gamma_{2n}^{(2k)}$.

Let us denote by $\varphi_r^{(k)}$ the probability that r is the k -th ladder index in (S_0, S_1, \dots, S_r) . Then using the arcsine law

$$\mathbf{P}(I_n^{(k)} = g) = \sum_{r=k}^{n-g} \varphi_r^{(k)} \frac{1}{2^{2n-r}} \binom{2g}{g} \binom{2n-2r-2g}{n-r-g}$$

holds for $g = 1, 2, \dots, n$.

According to [5] p. 86—87 for symmetric variables

$$\sum_{r=k}^{\infty} \varphi_r^{(k)} z^r = \left(\sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r^{(1)} z^r \right)^k = (1 - \sqrt{1-z})^k$$

holds. As

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} \binom{2j}{j} z^j = \frac{1}{\sqrt{1-z}},$$

$\mathbf{P}(I_n^{(k)} = g)$ is the coefficient of z^{n-g} in the generating function

$$2^{-2g} \binom{2g}{g} \frac{1}{\sqrt{1-z}} (1 - \sqrt{1-z})^k.$$

As the known relation

$$\sum_{a=0}^{\infty} \binom{k+2a}{a} \frac{1}{2^{2a}} z^a = \frac{1}{\sqrt{1-z}} \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1-z}} \right)^k$$

holds, the result is our formula (3').

Substituting $g = 0$ and j instead of k in (3') summation over j from 0 to k gives (4').

(Received January 11, 1963)

REFERENCES

- [1] ANDERSEN, E. S.: "On sums of symmetrically dependent random variables". *Skandinavisk Aktuarietidskrift* (1953) 123—138.
- [2] CHUNG, K. L.—FELLER, W.: "Fluctuations in coin tossing". *Proc. Mat. Acad. Sci. USA* **35** (1949) 605—608.
- [3] CSÁKI, E.: "On the number of intersections in the one-dimensional random walk". *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **6** (1961) 281—286.

- [4] CSÁKI, E.—VINCZE, I.: „On some problems connected with the Galton-test”. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **6** (1961) 97—109.
 [5] FELLER, W.: „On combinatorial methods in fluctuation theory”. *Probability and Statistics, The Harald Cramér Volume*, 1959, 75—91.
 [6] LÉVY, P.: „Sur certains processus stochastiques homogenes”. *Compositio Mathematica* **7** (1939) 283—339.

О НЕКОТОРЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СВЯЗАННЫХ С АРКСИНУС ЗАКОНОМ

Е. CSÁKI и I. VINCZE

Резюме

1. Пусть $\{\xi_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$) последовательность независимых случайных величин, для которых $P(\xi_i = +1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$. Пусть далее $s_0 = 0$, $s_i = \xi_1 + \dots + \xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$). $2 \gamma_{2n}^{(2k)}$ обозначает число индексов i , для которых или $s_i > 2k$, или $s_i = 2k$ и $s_{i-1} = 2k + 1$. Тогда имеет место соотношение:

$$(3) \quad P(\gamma_{2n}^{(2k)} = g) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2g}{g} \binom{2n-2g}{n-g+k} \quad g = 1, 2, \dots, n$$

$$(4) \quad P(\gamma_{2n}^{(2k)} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=-k}^k \binom{2n}{n+j}.$$

Доказательство этих формул производится элементарным комбинаторным методом.

2. $\lambda - 1$ обозначает число индексов i ($0 < i < 2n$), для которых $s_i = 0$ и $s_{i-1}s_{i+1} = -1$. Имеет место следующее равенство:

$$P(\lambda_{2n} = l, \gamma_{2n}^{(0)} = g) = \frac{1}{2^{2n}} \frac{\binom{2g}{g-l}}{g(n-g)} \times \\ \times \left\{ l(2n-g+l) \binom{2n-2g}{n-g+l} + (l-1)(l+g) \binom{2n-2g}{n-g-l+1} \right\}, \\ l = 1, 2, \dots, n, \quad g = l, l+1, \dots, n-l$$

и

$$P(\lambda_{2n} = 0, \gamma_{2n}^{(0)} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

3. Пусть $\{\xi_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин с непрерывной функцией распределения $F(x)$, обладающей свойством $F(x) = 1 - F(-x)$ и пусть $S_0 = 0$, $S_i = \xi_1 + \dots + \xi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Индекс i называется ступенью, если $S_0 < S_i$, $S_1 < S_i$, \dots , $S_{i-1} < S_i$. Пусть $i_1 < i_2 < \dots < i_l < \dots$ обозначают все ступени в последовательности (S_0, S_1, \dots, S_n) . $\Gamma_n^{(k)}$ обозначает число индексов j для которых $S_j > S_{i_k}$. Тогда имеет место

$$(3') \quad \mathbf{P}(\Gamma_n^{(k)} = g) = \frac{1}{2^{2n-k}} \binom{2g}{g} \binom{2n-2g-k}{n-g} \quad g = 1, 2, \dots, n$$

$$(4') \quad \mathbf{P}(\Gamma_n^{(k)} = 0) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{2^{2n-j}} \binom{2n}{n-j}.$$

В случае $k = 0$ формулы (3) и (3') переносятся на формулы специального и общего арксинус законов.

ÜBER EINE EXTREMALEIGENSCHAFT DER AFFIN-REGULÄREN POLYgone

von
G. HAJÓS

1. A. RÉNYI und R. SULANKE sind in ihren wahrscheinlichkeitstheoretischen Untersuchungen (Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 2 (1963) 75—84) auf ein geometrisches Problem gestoßen, das sie durch folgenden Satz erledigten:

Unter allen konvexen Polygonen gleicher Seitenzahl und gleichen Inhalts ist das Produkt der Inhalte aller durch zwei Nachbarseiten (als ihre konvexe Hülle) bestimmten Dreiecke dann und nur dann maximal, wenn das Polygon affin-regulär ist.

A. RÉNYI hat das Problem gestellt, diesen Satz möglichst elementar zu beweisen, da ihr ursprünglicher, infinitesimaler Beweis rechnerische Hilfsmittel in starkem Maße benutzt. Diese Arbeit enthält einen elementaren Beweis, verwendet jedoch die aus dem Weierstrass'schen Satz folgende Tatsache, daß es Polygone gibt, die ein maximales Produkt aufweisen. Im Folgenden wird mit elementargeometrischen Hilfsmitteln bewiesen, daß das fragliche Produkt nur bei affin-regulären Polygonen maximal sein kann.

Der Gedankengang des Beweises ist derselbe, wie ich ihn im Dezember 1962 in unserem Forschungsinstitut vorgetragen hatte; ich habe aber Einzelheiten umgestaltet, um Fallunterscheidungen möglichst zu vermeiden.

2. Wir zeigen zuerts, daß bei einem Extremalpolygon alle Winkelpaare affin-symmetrisch sind, d. h. es gibt zu je zwei Winkeln eine affine Symmetrie, die diese Winkelbereiche einander zuordnet. Für Nachbarwinkel trifft dies natürlich immer zu.

Es seien $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ keine Nachbarwinkel (Fig. 1). Da ihre Schenkel nicht an beiden Seiten der Geraden AB zu einander parallel laufen können, schneiden zwei Schenkel einander im Punkte C . Wir halten eine der durch AB begrenzten Halbebenen fest, und unterwerfen die andere, den Punkt C enthaltende Halbene einer inhaltstreu axialen Affinität mit der Achse AB . Die Punkte dieser Halbebene werden dabei parallel zu AB verschoben. Der Punkt C selbst kann — wenn unser konvexes Polygon nach dieser Transformation noch immer konvex bleibt — durch die Strecke A_1B_1 laufen, wobei A_1 und B_1 die Schnittpunkte der durch C gelegten, zu AB parallelen Geraden mit den Geraden der von A und B auslaufenden festgehaltenen Seiten sind.

Unsere Transformation ändert weder den Inhalt des Polygons, noch die Inhalte der betrachteten Dreiecke, außer den beiden bei A und B liegenden.

Bei einem extremalen Polygon muß also das Produkt der Inhalte dieser beiden Dreiecke maximal sein. Diese Inhalte stehen aber in festem Verhältnis zu den zu ihren festen Seiten gehörenden Höhen, also auch zu den Abständen des Punktes C von den Geraden AA_1 und BB_1 , folglich auch zu den Strecken CA_1 und CB_1 . Bei einem extremalen Polygon muß also das Produkt $CA_1 \cdot CB_1$ maximal sein, was dann zutrifft, wenn C die Strecke A_1B_1 halbiert, d. h. die Winkel $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle B$ affin-symmetrisch sind.

3. Die gefundene notwendige Bedingung genügt schon, um zeigen zu können, daß das extreme Polygon affin-regulär ist. Wir behaupten also:

Sind in einem konvexen Polygon alle Winkelpaare affin-symmetrisch, so ist das Polygon affin-regulär.

Es ist mir nicht gelungen, diesen Satz irgendwie direkt zu beweisen. Der Beweis gelingt jedoch, indem wir einen Umweg benutzen mit der Grund-

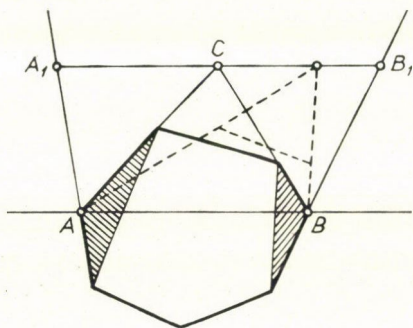


Fig. 1.

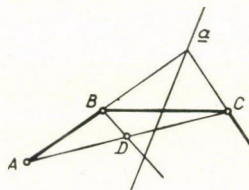


Fig. 2.

idee, daß die geforderte Eigenschaft die Fortsetzung eines Streckenzuges eindeutig bestimmt.

4. Wir beweisen zuerst, daß ein konvexes Polygon derart affin transformiert werden kann, daß für drei aufeinanderfolgende Ecken A', B', C' die Bedingungen $A'B' = B'C'$ und $\sphericalangle B' = \sphericalangle C'$ erfüllt sind.

Es genügt zu zeigen, daß es aufeinanderfolgende Eckpunkte A, B, C gibt, für welche die affine Symmetrieachse a der Winkel $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle C$ die Halbgerade BD (die affine Symmetrieachse der Strecken BA und BC) schneidet, wobei D der Mittelpunkt der Strecke AC ist (Fig. 2). Es ist dann unmittelbar ersichtlich, daß die Richtungen (die unendlich fernen Punkte) der Geraden a und BC die Richtungen der Geraden BD und AC voneinander trennen. Da diese Richtungen einander trennen, können diese Geradenpaare durch eine Affinität gleichzeitig in orthogonale Lage gebracht werden. Diese Affinität überführt also die Winkel $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle C$, ferner die Strecken BA und BC in orthogonal symmetrische, also gleiche Winkel und Strecken.

Um nun Eckpunkte A, B, C der gewünschten Eigenschaft zu finden, können wir von der längsten Seite (bzw. einer der längsten Seiten) BC des Polygons ausgehen, und dürfen voraussetzen, daß die nach dem Inneren des Polygons gerichtete Achse a mit der Richtung CB keinen stumpfen Winkel einschließt. Wegen $AB \leq BC$ ist aber $\sphericalangle DBC$ spitz, woraus folgt, daß a und die Halbgerade BD einander schneiden.

Wir hätten Eckpunkte A, B, C auch anderswie finden können. Betrachtet man alle das Polygon zerschneidenden Strecken der affinen Symmetrieachsen von zwei Nachbarseiten und von zwei Nachbarwinkeln, so folgt, daß es von einem Endpunkt und von dem Mittelpunkt einer Seite auslaufende Achsenstrecken geben muß, die einander im Inneren des Polygons schneiden, da man sonst von einer Achse ausgehend und auf einer Seite fortschreitend auf immer neue Achsen stoßen müßte.

5. Wir erbringen nun den Beweis, indem wir zeigen: kennt man die Seiten $AB = BC$ und die Winkel $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \alpha$ eines Polygons mit lauter affin-symmetrischen Winkeln, so ist die Fortsetzung des Polygonrandes über C hinaus eindeutig bestimmt. Wir beweisen also, daß diese Daten die

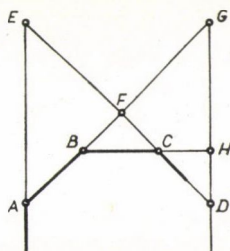


Fig. 3.

Lage des nächsten Eckpunktes D und die Gerade d der von D auslaufenden weiteren Seite eindeutig festlegen. Es folgt dann tatsächlich, daß der reguläre Teil, zu dem wir in 4. angelangt sind, nur regulär fortgesetzt werden kann, daß also die dort gefundene Affinität das ursprüngliche Extrempolygon in ein reguläres Polygon transformiert.

Wir bemerken zuerst, daß die affine Symmetrieachse der Winkel $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle C$ durch die Strecken AB, BC schon bestimmt ist, daß also auch $\sphericalangle A = \alpha$ sein muß. Die Geraden der von A auslaufenden Seiten schneiden die Gerade CD in E und F (Fig. 3), und die Geraden der von B auslaufenden Seiten die gesuchte Gerade d in G und H . Wir rechnen natürlich damit, daß diese Punkte im Unendlichen liegen können. Die affine Symmetrie der Winkel $\sphericalangle A$ und $\sphericalangle D$ überführt die Dreiecke $\triangle AFE$ und $\triangle DFG$ ineinander, und ebenso ordnet die affine Symmetrie der Winkel $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle D$ die Dreiecke $\triangle BCF$ und $\triangle DCH$ einander zu. Diese Dreieckspaare haben also gleichen Inhalt, wobei wir auch daran denken, daß die Inhalte ausgearteter Dreiecke (mit zwei parallelen Seiten) unendlich sind. Wir wissen also, daß die gesuchte Gerade d aus den bekannten Winkelbereichen $\sphericalangle DFG$ und $\sphericalangle DCH$ Dreiecke bekannten Inhaltes abschneidet, und müssen zeigen, daß diese Aufgabe nicht durch zwei verschiedene Geraden gelöst werden kann.

Um die störende Wirkung der Ausartungen auszuschalten bemerken wir, daß nur einer der Punkte E, F im Unendlichen liegen kann, wenn nämlich $\alpha = 120^\circ$ bzw. $\alpha = 90^\circ$ ist. Liegt E im Unendlichen, so muß d parallel zu AB laufen, und aus dem Winkelbereich $\sphericalangle DCH$ ein Dreieck bekannten Inhaltes abschneiden, was seine Lage eindeutig bestimmt. Liegt F im Unendlichen, so sind beide Dreieckspaare ausgeartet, und man kann nur folgern, daß d parallel zu BC läuft; in diesen Fall ist aber $\alpha = 90^\circ$, also BC parallel zu der in A einlaufenden Seite, woraus für unser konvexes Polygon folgt, daß

d mit dieser letzterwähnten Seite zusammenfallen muß, daß also das Polygon ein Quadrat ist.

Wäre $\alpha < 90^\circ$, so würde $\triangle BCF$ das Polygon enthalten (Fig. 4), dasselbe müßte dann wegen der affinen Symmetrie der Winkel $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle D$ auch für das $\triangle DCH$ zutreffen, was aber unmöglich ist, weil entweder A außerhalb der Seitengeraden d liegen würde, oder D außerhalb der Geraden, die die in A einlaufende Seite enthält. Folglich ist $\alpha > 90^\circ$, und das $\triangle BCF$ liegt außerhalb des Polygons. Hieraus folgt, daß das $\triangle DCH$ ebenfalls außerhalb des Polygons liegt und B nicht zum Schenkel CH gehört, daß also die beiden Schenkel CH und FG einander nicht schneiden. Die Winkelbereiche $\sphericalangle DCH$ und $\sphericalangle DFG$ können also entweder an beiden Seiten der Geraden

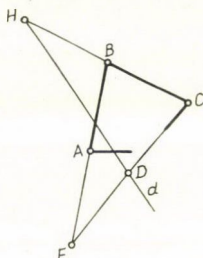


Fig. 4.

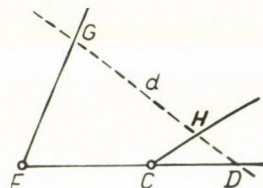


Fig. 5.

CD liegen, oder auf derselben, aber mit einander nicht schneidenden zweiten Schenkeln.

Schneiden zwei Geraden inhaltsgleiche Dreiecke aus einem Winkelbereich ab, so müssen sie einander innerhalb des Winkelbereiches schneiden. Liegen also $\sphericalangle DCH$ und $\sphericalangle DFG$ an verschiedenen Seiten der Geraden CD , so können zwei Geraden nicht gleiche Dreiecke aus ihnen abschneiden, da sie einander nicht an beiden Seiten von CD schneiden können.

Dasselbe trifft aber auch dann zu, wenn CD die Winkel $\sphericalangle DCH$ und $\sphericalangle DFG$ nicht trennt (Fig. 5). Dann müßten nämlich die beiden Geraden auch aus dem abgestumpften Winkelbereich $GFCH$ inhaltsgleiche Teile abschneiden, was wieder nur dann möglich ist, wenn die Geraden einander innerhalb dieses Bereiches schneiden. Es ist aber unmöglich, daß sie einander zugleich auch innerhalb des Winkelbereiches $\sphericalangle DCH$ schneiden. Die behauptete Eindeutigkeit ist also auch in diesem Fall bewiesen.

5. Wir fragen noch, welche konvexe Polyeder lauter affin-symmetrische Paare von Eckbereichen besitzen, und zeigen, daß nur das Tetraeder und das affin-reguläre Oktaeder von dieser Beschaffenheit sind. Als Eckbereich bezeichnen wir dabei jene Pyramide, die man durch Projektion des Polyeders von einem Eckpunkt aus erhält.

Die gesuchten Polyeder besitzen offenbar folgende Eigenschaft (E): sind A und B zwei Eckpunkte, so enthält jede durch die Gerade AB begrenzte offene Halbebene entweder je eine von beiden diesen Eckpunkten auslaufende Kante oder keine.

Wir beweisen, daß nur das Tetraeder und das projektiv-reguläre Oktaeder die Eigenschaft (E) besitzen. Dadurch wird offenbar auch unsere obige Behauptung bestätigt.

a) Besitzt ein Polyeder die Eigenschaft (E), so ist jede seiner Seitenflächen ein Dreieck. Sonst gibt es nämlich eine Diagonale AB einer Seitenfläche. Ist aber BC eine diese Seitenfläche nicht berandende Kante, so enthält die durch die Gerade AC berandete und den Punkt B enthaltende offene Halbebene die Kante CB , aber keine von A auslaufende Kante, was der Eigenschaft (E) widerspricht.

b) Besitzt ein Polyeder von der Eigenschaft (E) eine innere Diagonale AB , und legt man durch diese und durch eine Kante AA_1 eine Ebene, so enthält diese je zwei von A und B auslaufende Kanten. Wendet man nämlich die Eigenschaft (E) auf die die Kante AA_1 enthaltende und durch die Gerade AB bzw. A_1B berandete offene Halbebene an, so folgt die Existenz der in der betrachteten Ebene liegenden Kanten BB_1 und BB_2 . Diese sichern dann ähnlicher Weise die Existenz einer weiteren Kante AA_2 in dieser Ebene.

Man betrachte nun ein Polyeder von der Eigenschaft (E). Laut dieser Eigenschaft laufen von jedem Eckpunkt gleichviele Kanten aus. Da das Polyeder wegen a) zugleich ein Dreieckpolyeder ist, muß es einem regulären Polyeder, und zwar einem regulären Dreieckpolyeder, also einem Tetraeder, Oktaeder oder Ikosaeder topologisch äquivalent sein. Das Ikosaeder fällt aber aus, da es innere Diagonale besitzt, und deshalb die durch sie gelegten Ebenen die von ihren Endpunkten auslaufenden Kanten laut b) in Paare ordnen müßten, was wegen der Anzahl 5 unmöglich ist. Das Oktaeder muß wegen b) drei ebene Kantenvierecke besitzen, d. h. projektiv-regulär sein. Da die gebliebenen Möglichkeiten, also das Tetraeder und das projektiv-reguläre Oktaeder die Eigenschaft (E) besitzen, ist der Beweis beendet.

(Eingegangen: 11. Juni, 1963.)

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ АФФИННО-ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

G. HAJÓS

Резюме

RÉNYI и SULANKE доказали, что:

Для выпуклых многоугольников с одинаковым числом сторон и одинаковой площади произведение площадей треугольников, построенных на паре соседних сторон, тогда и только тогда максимально, если многоугольник — аффинно-правильный (т. е. полученный из правильного путём аффинного преобразования).

В работе доказательство этого проводится элементарным геометрическим путём без вычислений, существование такого экстремального многоугольника вытекает из теоремы Weierstrass. Доказательство упрощает теорему следующим образом:

Если у выпуклого многоугольника какие-нибудь два угла аффинно-симметричны, то этот многоугольник — аффинно-правильный.

В работе решаются также соответствующие пространные проблемы.

ÜBER EINE EXTREMALEIGENSCHAFT DER AFFIN-REGULÄREN VIELECKE

von
LÁSZLÓ FEJES TÓTH

Im vorliegenden Aufsatz geben wir einen einfachen Beweis für den von RÉNYI und SULANKE herrührenden

Satz. *Unter den flächengleichen konvexen n -Ecken haben die affin-regulären n -Ecke das grösstmögliche Inhaltsprodukt der Randdreiecke.*

Unter einem *Randdreieck* wird dabei das durch drei aufeinander folgende Ecken des Vielecks bestimmte Dreieck verstanden. Im folgenden bezeichnen wir ein Vieleck und sein Flächeninhalt mit demselben Symbol.

Es sei T ein konvexes n -Eck ($n > 3$); die Randdreiecke seien in zyklischer Reihenfolge t_1, \dots, t_n . Gesucht wird das Maximum des Quotientes $Q = t_1 \dots t_n / T^n$. Die Existenz eines besten n -Ecks folgt leicht aus dem Weierstrass'schen Satz. Dieses n -Eck muss bei jeder infinitesimalen Veränderung der Bedingung

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dt_1}{t_1} + \dots + \frac{dt_n}{t_n} - n \frac{dT}{T} = 0$$

genügen. Variieren wir nur eine Ecke, so verändern sich nur drei Randdreiecke, etwa t_1, t_2, t_3 , und wir haben wegen $dT = dt_2$

$$(1) \quad \frac{dt_1}{t_1} + \frac{dt_2}{t_2} + \frac{dt_3}{t_3} = \frac{n}{T} dt_2.$$

Wir formen diese Bedingung um. Es sei $t = ABC$ ein Dreieck mit der Basis $BC = a$ und der Höhe h . Verschieben wir A um den Vektor $d\mathbf{r}$, so gilt $dh = -\mathbf{e} d\mathbf{r}$, wobei \mathbf{e} den von A ausgehenden, auf die Gerade BC senkrechten Einheitsvektor bedeutet. Mithin gilt

$$\frac{dt}{t} = \frac{dh}{h} = -\frac{\mathbf{e}}{h} d\mathbf{r}.$$

Bezeichnen wir die entsprechenden Höhen und Einheitsvektoren in den Dreiecken t_1, t_2, t_3 mit entsprechenden Indizes, so haben wir

$$\left(\frac{\mathbf{e}_1}{h_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \right) d\mathbf{r} = \frac{na}{2T} \mathbf{e}_2 d\mathbf{r},$$

wo a die entsprechende Basis in t_2 ist. Dies kann aber für jeden Vektor $d\mathbf{r}$ nur so bestehen, wenn

$$(2) \quad \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} = \left(\frac{na}{2T} - \frac{1}{h_2} \right) \mathbf{e}_2.$$

Die Bedingungen (1) und (2) sind gleichwertig. Da aber die Bedingung (1) affin-invariant ist, gilt dasselbe auch für die Bedingung (2). Sind also A, B, C, D, E aufeinander folgende Ecken eines konvexen Vielecks und ist (2) in C erfüllt, so gilt (2) auch für die Ecke C' des Streckenzuges $A'B'C'D'E'$, der aus $ABCDE$ durch eine flächentreue Affinität entsteht.

Wir zerlegen die Bedingung (2) in zwei Teile:

a) Für eine geeignete Zahl λ gilt

$$(3) \quad \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} = \lambda \mathbf{e}_2.$$

b) Es gilt

$$\lambda = \frac{na}{2T} - \frac{1}{h_2}.$$

Aus a) folgt, dass C auf der »affinen Symmetrieachse« der Halbgeraden BA und DE liegt (wie dies in einer euklidisch symmetrischen Lage einleuchtet). Die Bedingung b) bestimmt die Lage von C auf dieser Symmetrieachse.

Für ein Viereck folgt aus der Bedingung a), dass die Diagonalen den Flächeninhalt des Vierecks halbieren. Mithin ist das Viereck ein Parallelogramm. Wir setzen deshalb voraus, dass $n > 4$ ist. A, B, C, D, E seien fünf aufeinander folgende Ecken des extremalen n -Ecks. Die Seitengeraden AB, BC, CD und DE seien bekannt, aber die Punkte A und E nicht. Wir zeigen, dass die Bedingungen a) und b) bezüglich D die nächste Seitengerade EF (und damit zugleich die Ecke E) eindeutig bestimmen.

Ist BC parallel zu DE , so muss wegen der Bedingung a) bezüglich C auch CD parallel zu AB sein. Wegen der Bedingung a) bezüglich D ist aber dann auch EF parallel zu CD . Folglich fallen die Seiten AB und EF zusammen. Das n -Eck wäre also im Gegensatz zu unserer Voraussetzung ein Parallelogramm. In ähnlicher Weise sieht man ein, dass der Schnittpunkt O der Geraden BC und DE nicht auf der Verlängerung der Strecke CB nach B liegen kann. Wir können deshalb annehmen, dass O auf der Verlängerung der Strecke BC nach C liegt.

Wir führen die Punkte O, C, D durch eine flächentreue Affinität in die Punkte $(0, 0), (0, -b), (b, 0)$ eines rechtwinkligen Koordinatensystems xy über, wo $b > 0$ ist. Wir betrachten den Punkt $E = (\xi, 0)$ ($\xi > b$), sowie den (eventuell im Unendlichen liegenden) Schnittpunkt $S = (0, \eta)$ der Geraden BC und EF . Ist S vorgegeben, so bestimmt die Bedingung a) eindeutig die Gerade EF . Ist η endlich, so besagt diese Bedingung, dass die Dreiecke CDS und EDS flächengleich sind. Deshalb gilt $b(b + \eta) = \eta(\xi - b)$, d. h.

$$\xi = b \left(2 + \frac{b}{\eta} \right).$$

Diese Gleichung gilt auch im Grenzfall $\eta \rightarrow \infty$.

Lassen wir S den ausserhalb der Strecke CO liegenden Teil der y -Achse von O ausgehend in positiver Richtung durchlaufen, so nähert sich E monoton gegen den Punkt D . Deshalb nimmt bei dieser Operation sowohl $a = CE$, wie h_2 ab. Folglich verändert sich auch $\frac{na}{2T} - \frac{1}{h_2}$ monoton von $+\infty$ bis $-\infty$.

Wir zeigen jetzt, dass der durch (3) definierte Wert λ bei der betrachteten Bewegung von S von $-\infty$ bis $+\infty$ monoton zunimmt. Aus der Normalgleichung

$$\frac{\eta x + \xi y - \xi \eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = 0$$

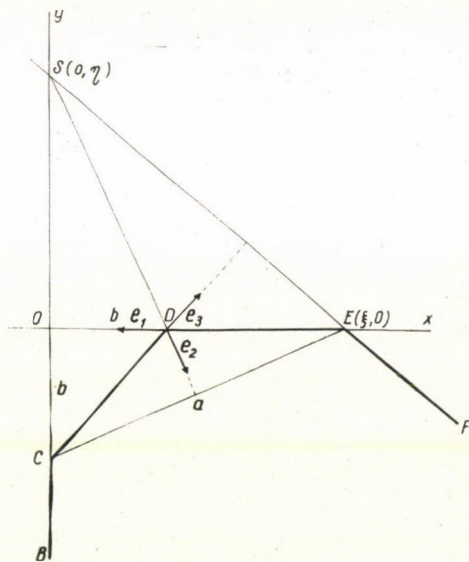


Fig. 1.

der Geraden SE ergeben sich für die Koordinaten von e_3 die Werte

$$\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

und für den Abstand der Geraden von D

$$h_3 = \frac{\eta(\xi - b)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Somit sind die Koordinaten von $\frac{\mathbf{e}_3}{h_3}$

$$\frac{1}{\xi - b}, \quad \frac{\xi}{\eta(\xi - b)}.$$

Da ferner die Koordinaten von $\frac{e_1}{h_1}$ die Werte $-\frac{1}{b}$, 0 haben, sind die Koordinaten von $\frac{e_1}{h_1} + \frac{e_3}{h_3}$

$$\frac{2b - \xi}{b(\xi - b)}, \quad \frac{\xi}{\eta(\xi - b)}.$$

Folglich haben wir

$$\lambda^2 = \frac{(2b - \xi)^2}{b^2(\xi - b)^2} + \frac{\xi^2}{\eta^2(\xi - b)^2} = \frac{1 + b^2 \left(2 + \frac{b}{\eta}\right)^2}{b^2(b + \eta)^2}.$$

Hieraus geht klar hervor, dass λ^2 für $\eta > 0$ eine abnehmende Funktion von η ist. Wir behaupten, dass λ^2 für $\eta < -b$ eine zunehmende Funktion von η ist. Setzen wir nämlich $-\frac{\eta}{b} = z$, so haben wir

$$b^4 \lambda^2 = \frac{1}{(z - 1)^2} + \left(-\frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z} \right)^2$$

was für $z > 1$ mit zunehmendem z tatsächlich abnimmt. Damit ist die Monotonie von λ bewiesen. Aus der Monotonie von $\frac{na}{2T} - \frac{1}{h_2}$ und λ folgt aber, dass der Punkt S , und damit auch die Gerade EF durch die Bedingung b) eindeutig bestimmt ist.

Wir betrachten jetzt einen Kegelschnitt K , der die Polygonseiten BC und CD in ihren Mittelpunkten und die Gerade AB irgendwo berührt. Dann berührt K auch die Gerade DE . Wählen wir die Gerade EF so, dass sie K berührt, so sind die Streckenzüge $ABCDE$ und $BCDEF$ affin-äquivalent. Mithin sind die Bedingungen a) und b) in D erfüllt und die nächste Seitengerade des besten Vielecks ist zwangsläufig EF . Unser Vieleck ist also so dem Kegelschnitt K umschrieben, dass jede Seite K in ihrem Mittelpunkt berührt. Folglich ist K eine Ellipse und das Vieleck affin-regulär.

(Eingegangen: 28. Januar, 1963.)

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ АФФИННО-ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

L. FEJES TÓTH

Резюме

Работа содержит простое доказательство следующей теоремы RÉNYI и SULANKE:

Среди выпуклых n -угольников одинаковой площади в случае аффинно-правильного n -угольника произведение площадей треугольников, построенных на двух соседних сторонах n -угольника будет наибольшим.

ON A "BIG DEVIATIONS" PROBLEM

by
JÓZSEF PERGEL

A result of Yu V. LINNIK [1] states that if ξ_1, \dots, ξ_n are independent random variables with the same distribution function $F(x)$ of the form

$$(1) \quad \begin{aligned} F(x) &= \frac{A_a}{|x|^a} + \dots + \frac{A_{4a+5}}{|x|^{4a+5}} + O\left(\frac{1}{|x|^{4a+5+\varepsilon}}\right); \text{ for } x \rightarrow -\infty \\ 1 - F(x) &= \frac{A_a}{x^a} + \dots + \frac{A_{4a+5}}{x^{4a+5}} + O\left(\frac{1}{x^{4a+5+\varepsilon}}\right); \text{ for } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(a integer, $a > 3, 0 < \varepsilon < 1$)

and the density function exists, then, denoting by $F_n(x)$ the distribution function of the variable

$$(2) \quad \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - n\mathbf{E}(\xi_1)}{\sqrt{n} \mathbf{D}(\xi_1)}$$

we have

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{F_n(x)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du + r(x, \sqrt{n})} &\rightarrow 1 \quad (x \leq -1); \\ \frac{1 - F_n(x)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du + r(x, \sqrt{n})} &\rightarrow 1 \quad (x \geq 1) \text{ for } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

uniformly in x where $r(x, \sqrt{n})$ is a rational function of both variables. Furthermore, if $x > n^{\frac{3}{2} + \frac{1}{a} + \varepsilon}$, then

$$(4) \quad 1 - F_n(x) \sim n(1 - F(x\sqrt{n})).$$

Yu. V. LINNIK raised also the problem of finding an analogue of this theorem, for the case when $F(x)$ is of the form:

$$(5) \quad \begin{aligned} 1 - F(x) &= \int_a^{a+5} \frac{dG(v)}{x^v} + O\left(\frac{1}{x^{4a+5+\varepsilon}}\right), \text{ for } x \rightarrow \infty \\ F(x) &= \int_a^{a+5} \frac{dG(v)}{|x|^v} + O\left(\frac{1}{|x|^{4a+5+\varepsilon}}\right), \text{ for } x \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

where $G(v)$ is a function of bounded variation. In the present note this problem is solved. We assume that $\int_a^{a+\varepsilon} d|G(v)| > 0$ for every $\varepsilon > 0$.

We state and prove the following theorem.

Theorem. Let ξ_1, \dots, ξ_n be independent random variables with a common distribution function $F(x)$ of the form (5) and let us suppose that the density function exists. Then (3) and (4) are valid, but $r(x, \sqrt{n})$ is replaced by a function of the form

$$(6) \quad R(x, n) = \int_m^M \frac{1}{n^v x^{v-1}} q(x, v) dK(v)$$

where $q(x, v)$ is a rational function of x bounded as $x \rightarrow \infty$, and a continuous function of v as $K(v)$ is a function of bounded variation.

Proof. For sake of simplicity, let us suppose, that the variables ξ_i are symmetrical, i.e. $\mathbf{P}(\xi_i > x) = \mathbf{P}(\xi_i < -x)$ for $x > 0$ and that $\mathbf{D}^2(\xi_i) = 1$. It is easy to see, as in [1] that though the supposition of symmetry simplifies the calculations, it does not play a significant role.

Let $\varphi(t)$ be the characteristic function of ξ_i . Then

$$(7) \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = h_1(t) + 2 \operatorname{Re} \int_1^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

where $h_1(t)$ is an analytical function. As to the second term of (7) we have

$$(8) \quad \int_1^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int_1^{\infty} e^{itx} d \int_a^{4a+5} \frac{dG(v)}{x^v} + h_2(t),$$

here $h_2(t)$ is $4a + 5$ times differentiable. Now

$$(9) \quad \int_1^{\infty} e^{itx} d \int_a^{4a+5} \frac{dG(v)}{x^v} = \int_a^{4a+5} \left(\int_1^{\infty} e^{itx} d \left(\frac{1}{x^v} \right) \right) dG(v)$$

and

$$(10) \quad \int_1^{\infty} e^{itx} d \left(\frac{1}{x^v} \right) = -v \int_1^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^{v+1}} dx = h_{1v}(t) + h_2(t) \int_1^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^{(v)}} dx$$

where $h_{j\nu}(t)$ ($j = 1, 2$) is a polynomial and $\{v\}$ is the fractional part of v .

$$(11) \quad \int_1^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^{\{v\}}} dx = h_{3v}(t) + t^{\{v\}-1} \int_0^{\infty} \frac{e^{iy}}{y^{\{v\}}} dy$$

as $h_{2v}(t) = c(v)t^{\lfloor v \rfloor}$ we have

$$(12) \quad \int_1^{\infty} \frac{e^{itx}}{x^{v+1}} dx = h_{4v}(t) + c(v)t^v.$$

Finally we obtain the following formula for the characteristic function $\varphi(t)$.

$$(13) \quad \varphi(t) = \int_b^B t^v dG_2(v) + O(t^{4a+5}), \quad (t > 0, t \rightarrow 0).$$

As it is easy to show, there exist b_1 , B_1 and $G_3(v)$ such, that

$$(14) \quad \left(\int_b^B t^v dG_2(v) \right)^n = \int_{b_1}^{B_1} t^v dG_3(v).$$

According to our assumptions $\mathbf{M}(\xi_1) = 0$, $\mathbf{D}(\xi_1) = 1$, that is

$$(15) \quad \varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + O(t^3) \quad (t > 0, t \rightarrow 0)$$

and thus it follows from (12) and (13), that there exists $\varepsilon_0 > 0$ such, that for $0 \leq t \leq \varepsilon_0$

$$(16) \quad \log \varphi(t) = -\frac{t^2}{2} + \int_3^{B_3} t^v dG_4(v) + O(t^{4a+5}).$$

For $n \geq 2$ we have for the density $f_n(x)$ of (2)

$$(17) \quad f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(t))^n e^{-\sqrt{n}itx} dt = \frac{\sqrt{n}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} (\varphi(t))^n e^{-\sqrt{n}itx} dt$$

as ξ_1 and hence $f_n(x)$ too, are symmetrical. In the same way, as in [1] it can be shown, that

$$(18) \quad f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\frac{\log n}{\sqrt{n}}} (\varphi(t))^n e^{-\sqrt{n}itx} dt + O(e^{-\varepsilon_1(\log n)^2}).$$

From (16) we have

$$\begin{aligned}
 (\varphi(t))^n &= e^{n \log \varphi(t)} = e^{-n \frac{t^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(n \int_0^{B_2} t^v dH_k^*(v) \right)^k}{k!} = \\
 (19) \quad &= e^{-n \frac{t^2}{2}} + e^{-n \frac{t^2}{2}} \sum_{0 < k \leq N} n^k \int_0^{D_k} t^v dH_k(v) + O(t^{4a+5})
 \end{aligned}$$

where $H_k^*(v)$ and $H_k(v)$ are functions of bounded variation. Substituting the expression in (19) for $(\varphi(t))^n$ into (18) we get

$$\begin{aligned}
 f_n(x) &= \frac{\sqrt{n}}{\pi} \int_0^{\frac{\log n}{\sqrt{n}}} e^{-n \frac{t^2}{2}} \sum_{0 < k \leq N} n^k \int_0^{D_k} t^v dH_k(v) e^{-ixt} dt + \\
 (20) \quad &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + O(n^{-2a-2});
 \end{aligned}$$

changing the order of integration in (20) we obtain

$$(21) \quad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \sum_{0 < k \leq N} n^k \int_0^{D_k} \left(\int_0^{\frac{\log n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{t^2}{2}} t^v e^{-ixt} dt \right) dH_k(v) + O(n^{-2a-2}).$$

By substituting $t = \frac{\tau}{\sqrt{n}}$,

$$(22) \quad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \sum_{0 < k \leq N} \int_0^{D_k} \left(\int_0^{\log n} e^{-\frac{\tau^2}{2}} \left(\frac{\tau}{\sqrt{n}} \right)^v e^{-ix\tau} d\tau \right) dH_k(v) + O(n^{-2a-2}).$$

As

$$(23) \quad \int_{\log n}^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}} \tau^v d\tau = O\left(e^{-\frac{1}{4}(\log n)^2}\right),$$

we have

$$(24) \quad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \sum_{0 < k \leq N} \int_0^{D_k} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}} \left(\frac{\tau}{\sqrt{n}} \right)^v e^{-ix\tau} d\tau \right) dH_k(v) + O(n^{-2a-2}).$$

The following asymptotic expansion holds for the integral

$$(25) \quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}} \tau^v e^{-ix\tau} d\tau = \frac{c_0}{x^{v-1}} + \dots + \frac{c_L}{x^{L+v}} + O\left(\frac{c_L}{x^{L+v+1}}\right)$$

(see [2] p. 61).

Finally we find for $f_n(x)$

$$(26) \quad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \sum_{0 < k \leq N} n^k \int_{3k}^{D_k} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left(\frac{c_0(v)}{x^{v-1}} + \dots + \frac{c_L(v)}{x^{L+v}} \right) dH_k(v) + \\ + O(n^{-2a-2}) + O\left(\frac{1}{n} x^{-L}\right)$$

where L is as large as we want.

It can be shown by the same method as in [1], that for $x < n^{\frac{3}{2} + \frac{1}{a} + \varepsilon}$

$$(27) \quad 1 - F_n(x) \sim n(1 - F(x\sqrt{n}))$$

holds.

It follows from (26) and (27), as in [1], integrating (26) from x ($1 < x \leq n^2$) to n^2

$$(28) \quad 1 - F_n(x) = 1 - \varphi(x) + R(x, n) + O(n^{-2a}) + O\left(\frac{1}{n} x^{-L+1}\right)$$

where $R(x, n)$ is according to our statement of the form

$$(29) \quad R(x, n) = \int_m^M \frac{1}{n^v x^{v-1}} q(x, v) dk(v).$$

It follows from (28) and (27) that for $n^{\frac{7}{4}} < x < n^2$

$$(30) \quad R(x, n) \sim 1 - F_n(x) \sim n \int_a^{a+\varepsilon} (x\sqrt{n})^{-v} dG(v).$$

For (29) the relation (30) must hold for $x > n^2$ too. As for $x < n^2$ the error terms in (28) may be neglected in comparison with $1 - F_n(x)$ and for $x > n^{\frac{7}{4}}$ $1 - \Phi(x)$ is infinitely small in comparison with $1 - F_n(x)$, the theorem is proved.

(Received February 1, 1963)

REFERENCES

- [1] LINNIK, Yu. V.: "On the probability of large deviations for the sums of independent variables". *Proc. 4 th. Berkeley Symp. Mat. Stat. and Prob. Vol II.* pp. 289—306. Univ. California Press, Berkeley, Calif. 1961.
- [2] ERDÉLYI, A.: *Asymptotic expansions*. Dover Publications, Inc.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ „БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ”

J. PERGEL

Резюме

Пусть ξ_1, \dots, ξ_n случайные величины с функцией распределения вида (5), то имеет место (3) равномерно на всей оси, где вместо функции $r(x, \sqrt{n})$ пишется $R(x, n)$ вида (6), а $q(x, v)$ — рациональная функция от x , $K(v)$ — функция ограниченной вариации.

ТЕОРИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВА В СЛУЧАЕ ОБЩИХ (НЕ ЗВЕЗДООБРАЗНЫХ) ОБЛАСТЕЙ

SÁNDOR FRIVALDSZKY¹

В настоящей статье рассматриваются те наиболее важные теоремы теории обобщенных функций Соболева, которые были исследованы до сих пор лишь в случае звездообразных областей, или же в случае соединения конечного числа таких областей (см. [1]). Рассматриваются обобщения этих теорем для случая произвольных областей.

Используя терминологию и обозначения книги [1], следуя отчасти Ладиженской (см. [2]), в пространстве $W_p^{(k)}(\Omega)$ введем следующую норму:

$$(1) \quad \|\varphi\|_{W_p^{(k)}(\Omega)} = \left\{ \|\varphi\|_{L_1(\Omega)}^p + \sum_{\sum k_i = k} \|D_{k_1 \dots k_n}^k \varphi\|_{L_p(\Omega)}^p \right\}^{1/p}$$

где Ω — n -мерная область (т. е. ограниченное, открытое множество) с точками $x = (x_1, \dots, x_n)$ ($n \geq 2$). Это выражение является конечным для любой области Ω , и относительно этой нормы пространство $W_p^{(k)}(\Omega)$ представляет собой пространство Банаха. Наконец, в случае звездообразной области Ω норма (1) эквивалентна норме Соболева.

В случае звездообразной области справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Если $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega)$ — функция, то $\varphi \in L_p(\Omega)$.

Теорема 2. Если $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega)$ — функция, то $\varphi \in W_p^{(l)}(\Omega)$ ($l = 1, \dots, k-1$).

Теорема 3. Существует постоянная M так, что если $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega)$ — функция и (i_1, \dots, i_n) — произвольное разбиение целого числа i (т. е. $i_1 + \dots + i_n = i, i_j \geq 0$), то

$$\|D_{i_1 \dots i_n}^i \varphi\|_{L_p(\Omega)} \leq M \|\varphi\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}.$$

Всякую функцию $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega)$ и все ее производные по Соболеву порядка не выше $k-1$ можно изменить на некотором множестве лебеговой меры 0 так, чтобы и функция φ , и ее упомянутые производные были определены всюду на множестве $\bar{\Omega}$ ($\bar{\Omega}$ обозначает замыкание множества Ω), и для новой φ' функции и новых производных имели место следующие утверждения:

Теорема 4. Если $k > n/p$ и $0 \leq i < k - n/p$ — целое число, то $\varphi' \in C_i(\bar{\Omega})$, и для любого разбиения (i_1, \dots, i_n) числа i имеем

$$\left\| \frac{\partial^i \varphi'}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right\|_{C_i(\bar{\Omega})} \leq M \|\varphi'\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}$$

где постоянная M не зависит от функции φ .

¹ Министерство металлургии и машиностроения, Budapest.

Теорема 5. Если $D_{k_1 \dots k_n}^k \varphi' \in C_0(\bar{\Omega})$ являются функциями при всяком разбиении (k_1, \dots, k_n) числа k , или это можно достигнуть путем изменения функций $D_{k_1 \dots k_n}^k \varphi'$ на множестве лебеговой меры 0, то $\varphi' \in C_{k-1}(\bar{\Omega})$.

Теорема 6. Пусть n' — положительное целое число, для которого $n > n' > n - (k - i)r$, где $0 \leq i < k$ — целое число. Пусть, далее, S^* — некоторая кусочно непрерывно дифференцируемая часть границы области Ω^* , $S^* \subset \bar{\Omega}$, $\Omega^* \subset R_{n'+1}$ (через R_l обозначается евклидово пространство размерности l). Тогда для любого разбиения (i_1, \dots, i_n) числа i имеем $D_{i_1 \dots i_n}^i \varphi' \in L_p(S^*)$ и оценку

$$\|D_{i_1 \dots i_n}^i \varphi'\|_{L_p(S^*)} \leq M \|\varphi'\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}$$

где постоянная M не зависит от функции φ' .

Эти теоремы найдутся в [1], за исключением теоремы 5, просто вытекающей из материала той же книги.

Определение. Область Ω называется квазизвездообразной, если для пространства $W_p^{(k)}(\Omega)$ выполняются теоремы 1 — 6.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 7. Пусть Ω^1 и Ω^2 — квазизвездообразные области, и пусть $\bar{\Omega}^1 \cap \bar{\Omega}^2 = \bar{\Omega}^1 \cap \bar{\Omega}^2$. Тогда $\Omega^1 \cup \Omega^2$ тоже является квазизвездообразной областью.

Эту теорему вместе с доказательством можно найти в [1], но без четкой формулировки условий. (Здесь отмечаем, в связи с понятием «суммируемой пары областей», что всякая пара областей суммируема. Понятие встречается в [1]).

Из теоремы 7 вытекает, что подходящее соединение любого конечного числа квазизвездообразных областей — снова квазизвездообразная область.

Легко указать область простой формы, не являющуюся квазизвездообразной (см. А).

В дальнейшем мы исследуем теоремы 1 — 6 в случае общих областей. Имеют место следующие утверждения:

Теорема 8. Пусть Ω — произвольная область и $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega)$ — некоторая функция. Пусть для области Ω^0 выполняется $\bar{\Omega}^0 \subset \Omega$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1.
- (2) $\varphi \in L_p(\Omega^0)$;
- 2.
- (3) $\varphi \in W_p^{(l)}(\Omega^0)$ ($l = 1, \dots, k - 1$);

3. для любого разбиения (i_1, \dots, i_n) целого числа i ($0 \leq i \leq k$) имеем

$$(4) \quad \|D_{i_1 \dots i_n}^i \varphi\|_{L_p(\Omega^0)} \leq M \|\varphi\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}$$

где M некоторая постоянная не зависящая от функции φ .

Функция φ и ее производные по Соболеву порядка не выше $(k - 1)$ могут быть изменены на некотором множестве лебеговой меры 0 так, чтобы функция φ и ее упомянутые производные были определены всюду на множестве Ω , и чтобы новая функция φ' и ее новые производные (см. выше) обладали следующими свойствами:

4. Если $k > n/p$ и $0 \leq i < k - n/p$, где i — целое число, то $\varphi' \in C_i(\Omega)$, и для любого разбиения (i_1, \dots, i_n) числа i выполняется неравенство

$$(5) \quad \left\| \frac{\partial^i \varphi'}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right\|_{C_0(\bar{\Omega}^0)} \leq M \|\varphi'\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}.$$

5. Если $D_{k_1 \dots k_n}^k \varphi' \in C_0(\bar{\Omega})$ являются функциями при любом разбиении (k_1, \dots, k_n) , числа k , или это можно достигнуть изменением функций $D_{k_1 \dots k_n}^k \varphi'$ на множествах лебеговой меры 0, то $\varphi' \in C_{k-1}(\Omega)$.

6. Пусть n' — положительное целое число, $n > n' > n - (k - i)p$, где i — целое число ($0 \leq i < k$). Пусть S^* обозначает кусочно непрерывно дифференцируемую часть границы области Ω^* , $S^* \subset \bar{\Omega}^0$, где $\Omega^* \subset R_{n'+1}$ — некоторая область. Тогда для любого разбиения (i_1, \dots, i_n) числа i имеем $D_{i_1 \dots i_n}^i \varphi' \in L_p(S^*)$ и

$$(6) \quad \|D_{i_1 \dots i_n}^i \varphi'\|_{L_p(S^*)} \leq M \|\varphi'\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}.$$

Отметим, что $M = M(\Omega^0)$.

Доказательство. Для любой точки $x \in \bar{\Omega}^0$ найдется шар $G'_x = G(x; 2h_x)$ с $G'_x \subset \Omega$. Система открытых множеств $G''_x = G(x; h_x)$ покрывает ограниченное замкнутое множество $\bar{\Omega}^0$, так что согласно теореме Бореля некоторая конечная подсистема тоже покрывает это множество. Упорядочим подсистему в виде последовательности: G''_1, \dots, G''_m , и рассмотрим шары $G_i = G(x_i; r_i)$, где числа $h_{x_i} \leq r_i \leq 2h_{x_i}$ являются пока неопределенными. При некотором таком r_1 выберем число r_2 так, чтобы для шаров G_1, G_2 выполнялись условия их теоремы 7. Положим $H_{12} = G_1 \cup G_2$ и выберем число r_3 так, чтобы для множеств H_{12}, G_3 выполнялись условия из теоремы 7. Положим $H_{123} = H_{12} \cup G_3$ и т. д. Такой выбор чисел r_i всегда возможен. Наконец, мы получим область $H_{1 \dots m}$, являющуюся квазизвездообразной и удовлетворяющую соотношению

$$(7) \quad \bar{\Omega}^0 \subset H_{1 \dots m} \subset \Omega.$$

Для любой функции $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega)$ имеем $\varphi \in W_p^{(k)}(H_{1 \dots m})$. Пункты 1 — 3 теоремы вытекают из соотношения (7) и теоремы 7.

Поэтому для всякой области Ω' , выполняющей $\bar{\Omega}' \subset \Omega$, найдется квазизвездообразная область $H'_{1 \dots m}$, обладающая свойством (7). К каждой области $H'_{1 \dots m}$ принадлежит подходящее изменение функций, для которого имеют место теоремы 1 — 6. Положим

$$\Omega_h = \{x: x \in \Omega \text{ и } r(x; S) > h\} \quad (h > 0),$$

где $r(x; S)$ — евклидово расстояние точки x от границы S области Ω .

Если $x \in \bar{\Omega}^0$, то изменение функции и упомянутых производных осуществляется при помощи области $H_{1 \dots m}$, происходящей из Ω^0 . Если $x \in \Omega - \bar{\Omega}^0$, то существует целое число m_0 , для которого

$$x \in \Omega_{\frac{1}{m_0}} - \Omega_{\frac{1}{m_0-1}}.$$

В этом случае изменение функции и упомянутых производных осуществляем с помощью области, происходящей из $\bar{\Omega}_1$. Наконец, в точках множества $\bar{\Omega} - \bar{\Omega}_1$ пусть функция φ' и ее упомянутые производные равняются нулю.

Множество, на котором мы изменим функцию и ее упомянутые производные, имеет лебегову меру 0. Теперь функция φ' и ее производные порядков не выше $(k-1)$ уже всюду определены на множестве $\bar{\Omega}$ и справедливы следующие утверждения:

Если $k > n/p$ и $0 \leq i < k - n/p$, где i — целое число, то $\varphi' \in C_i(\bar{\Omega}^0)$ и для любого разбиения (i_1, \dots, i_n) числа i выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial^i \varphi'}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right\|_{C_0(\bar{\Omega}^0)} \leq M \|\varphi'\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}$$

где число M зависит только от области Ω^0 . Наконец, пусть m_0 обозначает достаточно большое, но в остальном произвольное число. Тогда $\varphi' \in C_i(\bar{\Omega}_1 - \bar{\Omega}_1)$ в силу подходящего изменения функций. Таким образом, $\varphi' \in C_i(\bar{\Omega})$, потому что упомянутое изменение на любых областях Ω^1, Ω^2 вообще является тождественным изменением на множестве $\Omega^1 \cap \Omega^2$, если новые функции стали непрерывными.

Остальные утверждения теоремы очевидны.

Теорема доказана.

В дальнейшем мы исследуем, могут ли быть уточнены утверждения последней теоремы. А именно, в случае выполнения условий из пункта 4 имеет ли место утверждение $\varphi' \in C_i(\bar{\Omega})$, или функция φ' будет ли хотя бы ограниченной на множестве Ω (в точках множества $\bar{\Omega} - \bar{\Omega}_1$ имеем $\varphi' = 0$); далее, остается ли в силе утверждение пункта 6, если заменить условие $S^* \subset \bar{\Omega}^0$ условием $S^* \subset \bar{\Omega}$? На оба вопроса мы дадим отрицательный ответ с помощью контрпримеров.

А. Рассмотрим следующую область:

$$\Omega^m = \{x : x_1 > 0; |x_2| < x_1^m; x_1^2 + x_2^2 < 2; -1 < x_i < 1 \quad (i = 3, \dots, n)\},$$

где $m \geq 2$. Положим

$$r_{(l)} = \left\{ \sum_{i=1}^l x_i^2 \right\}^{1/2}$$

и вычислим интеграл

$$(8) \quad \int_{\Omega^m} \frac{dx}{r_{(n)}^\alpha},$$

где $\alpha > 0$. Применением полярного преобразования и теоремы Фубини имеем

$$\int_{\Omega^m} \frac{dx}{r_{(n)}^\alpha} = 2 \underbrace{\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1}_{n-2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r_{(2)}}{r_{(n)}^\alpha} dr_{(2)} d\varphi dx_3 \dots dx_n \cdot \left(\frac{\sin \varphi}{\cos^m \varphi} \right)^{1/(m-1)}.$$

Вводя новую переменную $t = x_n/r_{(n-1)}$, получим:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx_n}{r_{(n)}^\alpha} = \frac{1}{r_{(n-1)}^{\alpha-1}} \int_{-\frac{1}{r_{(n-1)}}}^{\frac{1}{r_{(n-1)}}} \frac{dt}{(1+t^2)^{\alpha/2}}.$$

Поэтому, на основе свойств интеграла выполняется неравенство

$$\int_{-1}^1 \frac{dx_n}{r_{(n)}^\alpha} \leq \frac{2}{r_{(n-1)}^\alpha} \quad \text{так как} \quad \frac{1}{(1+t^2)^{\alpha/2}} \leq 1.$$

Методом полной индукции получим, что

$$\underbrace{\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1}_{n-2} \frac{dx_3 \dots dx_n}{r_{(n)}^\alpha} \leq \frac{2^{n-2}}{r_{(2)}^\alpha}.$$

Итак, величина (8) является конечной в случае конечности интеграла

$$\int_0^{\pi/4} \int_{\left(\frac{\sin \varphi}{\cos^m \varphi}\right)^{1/(m-1)}}^{\sqrt{2}} \frac{dr_{(2)}}{r_{(2)}^{\alpha-1}} d\varphi.$$

Если $\alpha \neq 2$, то

$$(9) \quad \int_0^{\pi/4} \int_{\left(\frac{\sin \varphi}{\cos^m \varphi}\right)^{1/(m-1)}}^{\sqrt{2}} \frac{dr_{(2)}}{r_{(2)}^{\alpha-1}} d\varphi = \frac{1}{-\alpha + 2} \left[\frac{1}{2^{\frac{\alpha-2}{2}}} \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\cos^m \varphi}{\sin \varphi} \right)^{\frac{\alpha-2}{m-1}} d\varphi \right].$$

На интервале $(0; \pi/4)$ имеет место

$$\varphi \leq \pi \sin \varphi/2$$

так что в случае $\alpha > 2$ из конечности интеграла

$$\int_0^{\pi/4} \frac{d\varphi}{\varphi^{\frac{\alpha-2}{m-1}}}$$

следует конечность интеграла (9). Если, наконец, $(\alpha - 2)/(m - 1) < 1$, т. е. $\alpha < m + 1$ и, кроме того, $\alpha > 2$ то интеграл (8) является конечным.

Пусть $n \geq 2$ и k — положительные целые числа и $p > 1$, $\beta > 2$ — произвольные числа. Пусть число m такое, что

$$(10) \quad 1 + m > (\beta + k)p; \quad m \geq 2.$$

Тогда для функции

$$\varphi(x) = \varphi'(x) = \frac{1}{r_{(n)}^\beta}$$

имеем $\varphi' \in C_\infty(\Omega^m)$, $\varphi' \in L_1(\Omega^m)$, и в силу неравенства

$$\left| \frac{\partial^k \varphi'(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right| \leq M_0 \frac{1}{r_{(n)}^{\beta+k}}$$

для любого разбиения (k_1, \dots, k_n) числа k справедливо соотношение

$$\frac{\partial^k \varphi'}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \in L_p(\Omega^m).$$

Таким образом $\varphi' \in W_p^{(k)}(\Omega^m)$, и функция φ' всё же не является ограниченной на множестве Ω^m . (Отсюда вытекает, что область Ω^m не является квазизвездобразной.)

В. В упомянутой области Ω^m рассмотрим множество

$$S^* = \{x: 0 < x_1 < a; x_i = 0 (i = 2, \dots, n - n' + 1); \\ -x_1 < x_j < x_1 (j = n - n' + 2, \dots, n)\}$$

где $0 < n' < n$ — целое число и $0 < a < 1$. Это множество представляет собой гиперплоскость размерности n' и удовлетворяет соотношениям $S^* \subset \bar{\Omega}^m$, $\bar{S}^* \cap (\bar{\Omega}^m - \Omega^m) = \{0\}$.

Вычислим следующий интеграл в случае $a > 0$:

$$(11) \quad \int_{S^*} \frac{dx^*}{r_{(n)}^a} = \int_0^a \underbrace{\int_{-x_1}^{x_1} \dots \int_{-x_1}^{x_1}}_{n'-1} \frac{1}{r_{(n')}^a} dx_{n'} \dots dx_1.$$

(Мы применили теорему Фубини и перенумеровали переменные.)

Путем введения новой переменной $t = x_{n'}/r_{(n'-1)}$ получим:

$$\int_{-x_1}^{x_1} \frac{dx_{n'}}{r_{(n')}^a} = \frac{1}{r_{(n'-1)}^{a-1}} \int_{-\frac{x_1}{r_{(n'-1)}}}^{\frac{x_1}{r_{(n'-1)}}} \frac{dt}{(1+t^2)^{a/2}}.$$

Так как $x_1/r_{(n'-1)} \leq 1$ и

$$\frac{1}{2^{a/2}} \leq \frac{1}{(1+t^2)^{a/2}} \leq 1, \quad \text{если } -1 \leq t \leq 1,$$

то

$$\frac{2x_1}{2^{a/2}} \frac{1}{r_{(n'-1)}^a} \leq \int_{-x_1}^{x_1} \frac{dx_{n'}}{r_{(n')}^a} \leq 2x_1 \frac{1}{r_{(n'-1)}^a}.$$

Аналогично имеем

$$\left(\frac{2x_1}{2^{a/2}}\right)^{n'-1} \frac{1}{x_1^a} \leq \underbrace{\int_{-x_1}^{x_1} \dots \int_{-x_1}^{x_1}}_{n'-1} \frac{1}{r_{(n')}^a} dx_{n'} \dots dx_2 \leq (2x_1)^{n'-1} \frac{1}{x_1^a}.$$

Следовательно, интеграл (11) имеет конечное значение тогда и только тогда, если интеграл

$$\int_0^a x_1^{n'-1-a} dx_1$$

конечен, т. е. если $n' - 1 - a > -1$, $a < n'$.

Пусть $n \geq 2$ и k — положительные целые числа и $p > 1$ — произвольное число. Пусть $n > n' > n - kp$ — положительное целое число. Если $\beta > \max(2, n')$ и

$$\varphi(x) = \varphi'(x) = \frac{1}{r_{(n)}^\beta},$$

то $\varphi' \notin L_1(S^*)$ является функцией. Несмотря на это, если (10) выполняется для числа m , то $\varphi' \in W_p^{(k)}(\Omega^m)$.

(Поступила: 15 февраля 1963 г.)

ЛИТЕРАТУРА

- [1] СОБОЛЕВ, С. Л.: *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*. Изд. ЛГУ, Ленинград, 1950.
- [2] ЛАДИЖЕНСКАЯ, О. А.: *Смешанная задача для уравнений гиперболического типа*. Гостехиздат, Москва, 1953.

ÜBER DIE SOBOLEWSCHES DISTRIBUTIONSTHEORIE IM FALLE ALLGEMEINER (NICHT STERNFÖRMIGER) GEBIETE

von

S. FRIVALDSZKY

Zusammenfassung

Vorliegende Arbeit behandelt diejenigen wichtigeren Sätze der SOBOLEWSCHES Distributionstheorie, die bisher nur für Sterngebiete oder für die Vereinigung endlich vieler Sterngebiete untersucht worden sind.

Führt man im Raum $W_p^{(k)}(\Omega)$ die mit der SOBOLEWSCHES Norm äquivalente Norm (1) ein, so gilt der folgende

Satz. Es sei Ω^0 ein Gebiet, welches auch nach Hinzunahme seiner Häufungspunkte Ω angehört. (D. h. $\bar{\Omega}^0 \subset \Omega$.) Dann bestehen für jede Funktion φ mit $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega)$ die Relationen (2) und (3), ferner existiert eine Konstante $M = M(\Omega^0)$ derart, dass für beliebige Zerlegung (i_1, \dots, i_n) der Zahl i ($0 \leq i \leq k$) (d. h. $i_1 + \dots + i_n = i$; $i_j \geq 0$), die Relation (4) gilt. φ und ihre Sobolew-Ableitungen höchstens $(k-1)$ -ter Ordnung lassen sich auf einer Lebesgueschen Nullmenge so abändern, dass die neue φ' Funktion und ihre Ableitungen auf $\bar{\Omega}$ überall definiert sind, ferner gelten die folgenden Behauptungen: ist

$$k > n/p \quad \text{und} \quad 0 \leq i < k - n/p \quad (i \text{ ganz}),$$

so ist $\varphi' \in C_i(\Omega)$; ferner ist (i_1, \dots, i_n) eine Zerlegung von i , so besteht (5); ist $D_{k_1 \dots k_n}^k \varphi' \in C_0(\bar{\Omega})$ für jede Zerlegung von k , oder lässt sich dies durch Abänderung von $D_{k_1 \dots k_n}^k \varphi'$ höchstens auf einer Nullmenge erreichen, so gilt $\varphi' \in C_{k-1}(\Omega)$; ist n' eine natürliche Zahl mit $n > n' > n - (k - i)p$ ganzem $0 \leq i < k$ und S^* ein Teil des Randes eines $(n' + 1)$ -dimensionalen Gebietes, welches stetig differentierbar ist und $S^* \subset \bar{\Omega}^0$ gilt und für jede Zerlegung (i_1, \dots, i_n) von i die Relation $D_{i_1 \dots i_n}^i \varphi' \in L_p(S^*)$ gilt, so gilt (6).

Im weiteren wird die Frage behandelt, ob sich die Behauptungen des Satzes verschärfen lassen. Es werden zwei Beispiele gegeben. Das eine gibt an bei beliebige gegebenen Zahlen n, k und p ein Gebiet Ω^m und eine Funktion $\varphi' \in W_p^{(k)}(\Omega^m)$ die auf Ω^m nicht beschränkt ist, das andere bei beliebig gegebenen n, k, p und n' ($n > n' > n - kp$) ein Gebiet Ω^m , eine Funktion $\varphi \in W_p^{(k)}(\Omega^m)$ und eine n' -dimensionale Hyperebene S^* , für die zwar $S^* \subset \bar{\Omega}^m$; $\bar{S}^* \cap (\bar{\Omega}^m - \Omega^m) = \{0\}$, für die Funktion φ' jedoch die Relation

$$\varphi' \notin L_1(S^*)$$

gilt.

ÜBER DEN ANNÄHERUNGSGRAD DER APPROXIMATION IM STARKEN SINNE VON STETIGEN FUNKTIONEN

von

G. ALEXITS und D. KRÁLIK¹

Prof. P. Erdős anlässlich seines
50. Geburtstages zugeeignet

1. Einleitung

Es sei $[a, b]$ ein endliches, abgeschlossenes, und (a, b) das entsprechende offene Intervall, ferner $f(x)$ eine in $[a, b]$ definierte stetige Funktion; bezeichne außerdem

$$\omega(\delta; a, b) = \sup_{|x' - x| \leq \delta} |f(x') - f(x)| \quad (x', x \in [a, b])$$

den Stetigkeitsmodul von $f(x)$. Wird $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ nach den Funktionen des zur Gewichtsfunktion $w(x) \geq 0$ gehörenden Orthonormalpolynomsystems bzw. des trigonometrischen Systems $\{1; \cos nx, \sin nx\}$ entwickelt (in diesem Fall ist $[a, b] = [0, 2\pi]$ und $f(x)$ periodisch), so bezeichne $s_n(x)$ die n -te Partialsumme bzw.

$$\sigma_n(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_n(x)}{n+1}$$

das n -te arithmetische Mittel dieser Entwicklung.

Es ist bekannt, daß einerseits der Annäherungsgrad der Summen $\sigma_n(x)$ von der Größenordnung

$$\max_{c \leq x \leq d} |f(x) - \sigma_n(x)| = O \left[\omega \left(\frac{1}{n}; a, b \right) \right],$$

wenn $\omega(\delta; a, b) \leq \omega(\delta) = O(\delta^\alpha)$ mit einem positiven $\alpha < 1$ ist und für eine geeignete Zahl $0 < \zeta < 1$ $\omega(\delta)/\delta^\zeta \uparrow$ mit $\delta \downarrow 0$ gilt, andererseits aus dem Bestehen der Abschätzung

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \sigma_n(x)| = O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right]$$

für alle n mit einem $\omega \left(\frac{1}{n} \right) \downarrow 0$, $\omega \left(\frac{1}{n} \right) n^\zeta \uparrow \infty$ die Stetigkeit von $f(x)$ folgt, und zwar gilt für seinen Stetigkeitsmodul $\omega(\delta; c, d)$ in jedem inneren Teilintervall $[c, d]$ von (a, b)

$$\omega \left(\frac{1}{n}; c, d \right) = O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right].$$

¹ Technische Hochschule, Budapest.

Diese Behauptungen sind klassisch, wenn sie sich auf die Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen beziehen (vgl. A. ZYGMUND [9], I. Kap. III. § 13), während sie für die nach Orthogonalpolynomen fortschreitenden Entwicklungen ganz neulich von G. FREUD [5] bewiesen wurden unter der Annahme, daß die Gewichtsfunktion in $[a, b]$ der Forderung

$$0 < m \leq w(x) \leq M$$

Genüge leistet.

Obwohl die zitierten Sätze die Klasse der Funktionen mit vorgegebenem Stetigkeitsmodul entsprechend charakterisieren, geben sie keinen Aufschluß darüber, ob der angegebene Annäherungsgrad dadurch entsteht, daß sich die »schlecht« annähernden Partialsummen im arithmetischen Mittel ausgleichen, oder die »schlecht« annähernden Partialsummen nur so selten auftreten, daß das arithmetische Mittel dennoch den erwünschten Annäherungsgrad erreicht? Wir wollen zeigen, daß tatsächlich der letztere Fall zutrifft, wodurch wir die oben erwähnten Approximationssätze wesentlich verschärfen können.

Führen wir statt der Differenz $|f(x) - \sigma_n(x)|$ die Differenz im starken Sinne, d. h. die Größe

$$h_n(f, x) = \frac{\sum_{v=0}^n |f(x) - s_v(x)|}{n+1}$$

ein. Wir beweisen den folgenden

Satz 1. Die Funktion $f(x)$ besitze einen Stetigkeitsmodul $\omega(\delta; a, b) = O(\delta^\alpha)$ mit einem positiven $\alpha < 1$, welcher der folgenden Bedingung genügt: es ist $\omega(\delta; a, b) \leq \omega(\delta)$, wobei $\omega(\delta)$ mit δ monoton wächst und es existieren Zahlen $0 < \frac{\zeta}{2} < \vartheta < \zeta < 1$ derart, daß $\omega(\delta)/\delta^\zeta \uparrow +\infty$, $\omega(\delta)/\delta^\vartheta \downarrow 0$ für $\delta \downarrow 0$ gelten. Wird $f(x)$ in $[a, b]$ in eine Reihe nach trigonometrischen Funktionen oder nach den Funktionen des zur Gewichtsfunktion $w(x) \geq 0$ gehörenden Orthogonalpolynomsystems entwickelt, wobei

$$0 < m \leq w(x) \leq M \quad (x \in [a, b])$$

vorausgesetzt wird, so gilt in jedem inneren Teilintervall $[c, d]$ von (a, b)

$$(1) \quad \max_{c \leq x \leq d} h_n(f, x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Ist $f(x)$ nach 2π periodisch und hat der Stetigkeitsmodul von $f(x)$ eine Majorante $\omega(\delta)$ wie im Satz 1, so enthält unser Satz eine Verschärfung eines klassischen Satzes von S. BERNSTEIN. Dann gilt nämlich der

Satz 2. Besitzt die nach 2π periodische Funktion $f(x)$ den Stetigkeitsmodul $\omega(\delta) \leq \delta^\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$, so besteht für die Approximation im starken Sinne durch die Fejérschen Mittel ihrer Fourierreihe durchweg die Beziehung

$$\max_{-\infty < x < +\infty} h_n(f, x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

In der Tat gilt diese Abschätzung nach Satz 1 in jedem Teilintervall $\left[\frac{\varepsilon}{2}, 2\pi - \frac{\varepsilon}{2}\right]$ mit beliebig kleinem $\varepsilon < 0$. Da $f(x)$ nach 2π periodisch ist, kann dieses Teilintervall von der Länge $2\pi - \varepsilon$ mit beliebigem Anfangspunkt gewählt werden. Dann läßt sich $[0, 2\pi]$ mit zwei derartigen Teilintervallen überdecken, die Abschätzung $O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$ gilt also im ganzen Intervall $[0, 2\pi]$

und daher überall. Es soll nicht unbemerkt bleiben, daß eine derartige Ausdehnung für Orthogonalpolynomialentwicklungen im allgemeinen nicht möglich ist, da schon die klassischen Orthonormalpolynome in den Endpunkten des Orthogonalitätsintervalls unbeschränkt werden, und daher in den Endpunkten die entwickelte Funktion evtl. überhaupt nicht darzustellen vermögen.

Um auf die Tragweite der Approximation im starken Sinne ein Licht zu werfen, denke man an den Lebensgueschen Satz, nach welchem die Partialsummen $s_n(x)$ einer periodischen Funktion $f(x)$, welche einer Lipschitzbedingung α -ter Ordnung genügt, die Funktion mit dem Annäherungsgrad $O\left(\frac{\log n}{n^\alpha}\right)$ approximieren, und diese Abschätzung kann im allgemeinen nicht mehr verbessert werden (vgl. ZYGMUND [9], I. S. 315). Auf Grund unseres starken Approximationssatzes können wir jedoch behaupten, daß die den Annäherungsgrad verderbenden Partialsummen, wie aus dem folgenden Satz ersichtlich, nur selten auftreten:

Satz 3. *Wächst die positive, monotone Zahlenreihe $\{\lambda_n\}$ beliebig langsam gegen Unendlich, so approximieren die Partialsummen $s_n(x)$ die Funktion $f \in \text{Lip } \alpha$ in jedem Punkt x mit dem Annäherungsgrad*

$$f(x) - s_n(x) = O\left(\frac{\lambda_n}{n^\alpha}\right) \quad (0 < \alpha < 1),$$

außer höchstens einer Teilfolge $\{s_{n_k}(x)\}$, deren Indizes eine Folge $\{n_k\}$ der Dichte Null² bilden.

Bezeichne in der Tat $\nu(n)$ die Anzahl der Indizes $n_k \leq n$, und wählen wir n derart, daß

$$\frac{\nu(n)}{n} \geq \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(n)}{n}$$

sei. Setzen wir $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ (Lipschitzbedingung), so folgt aus unserem Satz 2 die Existenz einer Konstante A , so daß

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n |f(x) - s_v(x)| \leq \frac{A}{n^\alpha}.$$

Nach Annahme ist $|f(x) - s_{n_k}(x)| \geq \frac{\lambda_{n_k}}{n_k^\alpha}$, und es ist keine Beschränkung der

² Bezeichnet $\nu(n)$ die Anzahl der Indizes $n_k \leq n$, so heißt n_k von der Dichte Null, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu(n)}{n} = 0$ ist.

Allgemeinheit, wenn $\lambda_{n_k}/n_k^a \downarrow 0$ vorausgesetzt wird, da die Folge $\{\lambda_n\}$ nach Annahme langsam wächst. Dann folgt aber

$$\begin{aligned} \frac{A}{n^a} &\geq \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n |f(x) - s_v(x)| \geq \frac{1}{n} \sum_{n_k \leq n} |f(x) - s_{n_k}(x)| \geq \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{n_k \leq n} \frac{\lambda_{n_k}}{n_k^a} \geq \frac{\lambda_n}{n^a} \cdot \frac{v(n)}{n} \geq \frac{\lambda_n}{n^a} \cdot \frac{1}{2} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{v(n)}{n}, \end{aligned}$$

also gilt

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{v(n)}{n} \leq \frac{2A}{\lambda_n},$$

woraus sich wegen $\lambda_n \rightarrow +\infty$ die Behauptung ergibt.

Es ist erwähnenswert, wie wir unseren Hauptsatz 1 beweisen. Die Behauptung wurde für $\omega\left(\frac{1}{n}; a, b\right) \leq \delta^a$ mit $a < \frac{1}{2}$ schon bewiesen (ALEXITS [1], S. 295—300). Daraus und aus der oben erwähnten Tatsache, daß die Behauptung des Satzes für alle $\alpha < 1$ gilt, wenn man nicht die starke, sondern die gewöhnliche Approximation betrachtet, folgt unsere verschärfte Behauptung auf Grund zweier Hilfssätze über numerische Reihen. Der Gedanke, einen Teil der Approximationstheorie auf einfache reihentheoretische Sätze zu gründen, war schon bisher fruchtbar. Er scheint zuerst bei ALEXITS [2] und [3] aufgetreten zu sein, wo er zur approximationstheoretischen Charakterisierung der Klasse Lip 1 diente. Mit derselben Methode konnte KRÁLIK [6] die Eigenschaften des Weylschen Integrals gebrochener Ordnung, insbesondere die tiefliegenden Hardy-Littlewood-schen Sätze sehr einfach herleiten. Neuerlich wurden diese Ergebnisse von ALEXITS und KRÁLIK [4] wesentlich verschärft. Außerdem konnten auf diesem Weg auch Approximationssätze für allgemeine Orthogonalreihen gewonnen werden. (ALEXITS—KRÁLIK [4] und TANDORI [8]). Dies alles weist darauf hin, daß die Methode, approximationstheoretische Untersuchungen auf einfache reihentheoretische Hilfssätze zu gründen, auch weiter angewendet werden kann, insbesondere dann, wenn die explizite Darstellung der approximierenden Funktionen hoffnungslos zu sein scheint.

2. Reihentheoretische Hilfssätze

Hilfssatz 1. Die Reihe $\sum u_n$ sei konvergent zu A und es bestehe

$$\frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n |s_v - A| = O[\Theta(n)],$$

wo $s_v = \sum_{k=0}^v u_k$, $\Theta(x) > 0$ eine monoton gegen Null abnehmende Funktion ist, so daß für große x die Beziehungen $\Theta(x)x^\xi \uparrow$ und $\Theta(x)x^\beta \downarrow$ mit $0 < \beta < \xi < 1$ gelten. Ist $A(x)$ konvex, differentierbar und $A(x) \downarrow 0$, $A(x)x^\eta \uparrow$ für ein $\eta > 0$ und $\eta + \xi < 1$, so konvergiert auch die Reihe $\sum A(n)u_n$ und es ist

$$\frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n \left| \sum_{k=v+1}^{\infty} A(k)u_k \right| = O[A(n)\Theta(n)].$$

Beweis. Die Konvergenz der Reihe $\sum A(n) u_n$ ergibt sich durch eine einfache Abel-Transformation, die Abweichung ihrer ν -ten Teilsumme von der Reihensumme ist daher $\sum_{k=\nu+1}^{\infty} A(k) u_k$. Führen wir die Reihe $(u_0 - A) + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ mit den Bezeichnungen

$$u_0 - A = u_0^*, \quad u_n = u_n^* \quad \text{für } n > 0$$

bzw.
$$s_k^* = \sum_{\nu=0}^k u_{\nu}^*, \quad \sigma_k^* = \frac{s_0^* + s_1^* + \dots + s_k^*}{k+1}$$

ein, so haben wir

$$|\sigma_k^*| \leq \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^k |s_{\nu}^*| = \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^k |s_{\nu} - A| = O[\Theta(k)].$$

Es ist offenbar

$$\sum_{k=\nu+1}^{\infty} A(k) u_k^* = \sum_{k=\nu+1}^{\infty} A(k) u_k.$$

Nach zweimaliger Abel-Transformation erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n \left| \sum_{k=\nu+1}^{\infty} A(k) u_k^* \right| &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=\nu+1}^{\infty} (k+1) |\sigma_k^*| \Delta^2 A(k) + \\ &+ \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n (\nu+1) |\sigma_{\nu}^*| \Delta A(\nu+1) + \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n A(\nu+1) |s_{\nu}^*| = \\ &= O(n^{-1}) \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=\nu+1}^{\infty} k \Theta(k) \Delta^2 A(k) + O(n^{-1}) \sum_{\nu=0}^n \nu \Theta(\nu) \Delta A(\nu+1) + \\ &+ O(n^{-1}) \sum_{\nu=0}^n A(\nu+1) |s_{\nu}^*| = S_1 + S_2 + S_3. \end{aligned}$$

S_1 genügt offensichtlich der Beziehung

$$S_1 = O(n^{-1}) \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \Delta^2 A(k) \cdot k^{1-\beta} \cdot k^{\beta} \Theta(k).$$

Da $k^{\beta} \Theta(k)$ nach Annahme monoton abnimmt, kann die rechte Seite folgenderweise geschrieben werden:

$$\begin{aligned} O(n^{-1}) \sum_{\nu=0}^n \nu^{\beta} \Theta(\nu) \cdot \sum_{k=\nu+1}^{\infty} \Delta^2 A(k) k^{1-\beta} = \\ = O(n^{-1}) \sum_{\nu=0}^n \nu^{\beta} \Theta(\nu) \left\{ \sum_{k=\nu+1}^{\infty} k^{-\beta} \Delta A(k) + \nu^{-\beta} A(\nu) \right\}. \end{aligned}$$

Für die Differenz $\Delta A(k)$ gilt die Beziehung:

$$\Delta A(k) = |\Delta A(k)| < k^{-1} A(k),^3$$

so daß das erste Glied in der geschweiften Klammer durch

$$\sum_{k=v+1}^{\infty} k^{-1-\beta} A(k) = O[A(v)] \sum_{k=v+1}^{\infty} k^{-1-\beta} = O[v^{-\beta} A(v)]$$

abgeschätzt werden kann. Infolgedessen erhalten wir wegen der Eigenschaften von $\Theta(x)$ und $A(x)$ das Ergebnis:

$$\begin{aligned} S_1 &= O(n^{-1}) \sum_{v=1}^n A(v) \Theta(v) = O(n^{-1}) \sum_{v=1}^n v^{\eta} A(v) v^{\xi} \Theta(v) v^{-\eta-\xi} = \\ &= O[n^{-1+\eta+\xi} A(n) \Theta(n)] \sum_{v=1}^n v^{-\eta-\xi} = O[A(n) \Theta(n)]. \end{aligned}$$

Für S_2 gilt die Beziehung

$$S_2 = O(n^{-1}) \sum_{v=1}^n A(v) v^{-1} v \Theta(v) = O(n^{-1}) \sum_{v=1}^n A(v) \Theta(v),$$

also erhalten wir wie im Fall von S_1 die Abschätzung

$$S_2 = O[A(n) \Theta(n)].$$

Zu einer ähnlichen Abschätzung gelangen wir für S_3 durch eine Abel-Transformation:

$$\begin{aligned} S_3 &= O(n^{-1}) \left\{ \sum_{v=0}^{n-1} \Delta A(v+1) \cdot (v+1) \frac{1}{v+1} \sum_{k=0}^v |s_k^*| + A(n+1) \times \right. \\ &\times (n+1) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |s_k^*| \left. \right\} = O(n^{-1}) \sum_{v=0}^{n-1} A(v+1) \Theta(v) + O[A(n) \Theta(n)] = \\ &= O[A(n) \Theta(n)], \end{aligned}$$

womit der Hilfssatz 1 bewiesen ist.

Hilfssatz 2. Sei $\lambda(x) \uparrow +\infty$ eine von unten konkave, differenzierbare Funktion mit folgenden Eigenschaften: Es gibt ein $\eta > 0$ so, daß $\lambda(x)x^{-\eta} \downarrow$, und $\Delta^2 \lambda(x) = O[\lambda(x)/x^2]$. Sei weiterhin $\omega(\delta)$ eine monoton wachsende Funktion, für die $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) = 0$ ist und außerdem positive Zahlen $\eta < \vartheta < \zeta < 1$ existieren,

³ Wegen $A(x) x^{\eta} \uparrow$ haben wir $[A(x) x^{\eta}]' \geq 0$, d. h. $A'(x) x^{\eta} + \eta A(x) x^{\eta-1} \geq 0$, und daraus $A'(x) \geq -\eta A(x) x^{-1}$ bzw.

$$|A'(x)| = -A'(x) \leq \eta A(x) x^{-1} < A(x) x^{-1}.$$

Auf Grund des Mittelwertssatzes der Differentialrechnung gilt

$$\Delta A(k) = A(k) - A(k+1) = -A'(k + \tau_k) \quad (0 < \tau_k < 1),$$

woraus wir erhalten:

$$|A'(k + \tau_k)| \leq |A'(k)| < A(k) \cdot k^{-1}.$$

für die (für genügend kleine $\delta > 0$) die Beziehungen $\omega(\delta)/\delta^\xi \uparrow$ und $\omega(\delta)/\delta^\theta \downarrow$ gelten. Konvergieren die $(C, 1)$ -Mittel σ_n der Reihe $\sum u_n$ zu σ und gilt

$$\sigma_n - \sigma = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

so konvergieren die $(C, 1)$ -Mittel $\sigma_n(\lambda)$ der Reihe $\sum \lambda(n) u_n$ zu einer Zahl $\sigma(\lambda)$ mit der Approximationsgeschwindigkeit

$$\sigma_n(\lambda) - \sigma(\lambda) = O\left[\lambda(n) \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Beweis. Bezeichne σ_n^* das n -te $(C, 1)$ -Mittel der Reihe $(u_0 - \sigma) + u_1 + \dots$ so gilt

$$\sigma_n^* = \sigma_n - \sigma,$$

und wir haben

$$|\sigma_n^*| \leq |\sigma_n - \sigma| = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Bezeichnen wir das n -te $(C, 1)$ -Mittel der Reihe $\lambda(0)(u_0 - \sigma) + \lambda(1)u_1 + \dots$ mit $\sigma_n^*(\lambda)$, so gilt

$$\sigma_n^*(\lambda) - \sigma_m^*(\lambda) = \sigma_n(\lambda) - \sigma_m(\lambda).$$

Nach einer bekannten Transformationsformel ([7]) ist aber

$$\begin{aligned} |\sigma_n^*(\lambda) - \sigma_m^*(\lambda)| &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \left[\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{k}{m+1}\right) \right] (k+1) |\sigma_k^*| |\Delta^2 \lambda(k)| + \\ &+ \sum_{k=m}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) (k+1) |\sigma_k^*| |\Delta^2 \lambda(k)| + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) |\sigma_k^*| |\Delta \lambda(k+1)| + \\ &+ \frac{2}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) |\sigma_k^*| |\Delta \lambda(k+1)| + \lambda(n) |\sigma_n^*| + \lambda(m) |\sigma_m^*|. \end{aligned}$$

Es seien S_1^* und S_2^* die beiden ersten Glieder der rechten Seite. Nach unseren Voraussetzungen gilt für S_1^* die Abschätzung:

$$\begin{aligned} S_1^* &= O(m^{-1}) \sum_{k=1}^{m-1} k^2 \omega\left(\frac{1}{k}\right) \lambda(k) k^{-2} = O[m^{-1} \lambda(m)] \sum_{k=1}^{m-1} k^\xi \omega\left(\frac{1}{k}\right) k^{-\xi} = \\ &= O\left[m^{-1+\xi} \lambda(m) \omega\left(\frac{1}{m}\right)\right] \sum_{k=1}^{m-1} k^{-\xi} = O\left[\lambda(m) \omega\left(\frac{1}{m}\right)\right]. \end{aligned}$$

Zur Abschätzung von S_2^* bemerken wir, daß für S_2^* die Relation

$$S_2^* = O(1) \sum_{k=m}^{n-1} k \omega\left(\frac{1}{k}\right) \lambda(k) k^{-2} = O(1) \sum_{k=m}^{n-1} k^{-1-\vartheta+\eta} k^\vartheta \omega\left(\frac{1}{k}\right) \lambda(k) k^{-\eta}$$

besteht. Im Sinne unserer Voraussetzungen sind aber $\omega\left(\frac{1}{x}\right)x^\vartheta$ und $\lambda(x)x^{-\eta}$ monoton abnehmend, daher ergibt sich

$$S_2^* = O\left[\omega\left(\frac{1}{m}\right)\lambda(m)m^{\vartheta-\eta}\right]\sum_{k=m}^{n-1}k^{-1-(\vartheta-\eta)},$$

woraus wegen $\vartheta - \eta > 0$ für S_2^* die Größenordnung $\lambda(m)\omega\left(\frac{1}{m}\right)$ folgt. Damit

haben wir für $S_1^* + S_2^*$ die Größenordnung $\lambda(m)\omega\left(\frac{1}{m}\right)$ bewiesen. Da nun aus $\lambda(x)x^{-\eta}\downarrow$ und aus der monotonen Abnahme des nichtnegativen Differentialquotienten $\lambda'(x)$ in ähnlicher Weise wie beim Beweis des Hilfssatzes 1 in der Fußnote 2 die Beziehung

$$|\Delta\lambda(k)| < \lambda(k)k^{-1}$$

folgt, erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{2}{m+1}\sum_{k=1}^{m-1}(k+1)|\sigma_k^*||\Delta\lambda(k+1)| &= O(m^{-1})\sum_{k=1}^{m-1}k\omega\left(\frac{1}{k}\right)k^{-1}\lambda(k) = \\ &= O\left[\lambda(m)\omega\left(\frac{1}{m}\right)\right].\end{aligned}$$

Da für die übrigen Glieder die Größenordnung $\lambda(m)\omega\left(\frac{1}{m}\right)$ offensichtlich gilt, haben wir den Beweis des Hilfssatzes 2 vollendet.

3. Beweis des Satzes 1

Gilt für den Stetigkeitsmodul $\omega(\delta; a, b)$ die Beziehung

$$\omega(\delta; a, b)/\delta^{\frac{1}{2}-\gamma} \rightarrow +\infty$$

für $\delta \rightarrow 0$ mit einer geeigneten Zahl $\gamma > 0$, so folgt aus dem schon zitierten Satz von ALEXITS ([1], S. 295—300) die Beziehung (1). Strebt aber der Quotient $\omega(\delta; a, b)/\delta^{\frac{1}{2}-\gamma}$ für kein $\gamma > 0$ gegen $+\infty$ wenn $\delta \rightarrow 0$, so existieren nach

Annahme des Satzes 1 Zahlen $0 < \frac{\zeta}{2} < \vartheta < \zeta < 1$, für die die Beziehungen

$\omega(\delta)/\delta^\vartheta \downarrow 0$, $\omega(\delta)/\delta^\zeta \uparrow +\infty$ mit $\delta \downarrow 0$ gültig sind, wo $\omega(\delta)$ die Majorantenfunktion von $\omega(\delta; a, b)$ bedeutet. Die Funktion $\lambda(x) = x^{\zeta/2}$ erfüllt die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2, wenn wir dort $\eta = \frac{\zeta}{2}$ setzen. Sodann folgt für

die Punkte x eines jeden inneren Teilintervalls von (a, b) : $\sigma_n(x) - f(x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]$, wo $\sigma_n(x)$ entweder das n -te Fejérsche Mittel der Fourierreihe

von $f(x)$ bezeichnen kann (S. BERNSTEIN), oder das n -te $(C, 1)$ -Mittel der Entwicklung nach dem zur Gewichtsfunktion $w(x)$ gehörigen Orthonormalpolynomsystem bedeutet (G. FREUD [5]). Nach dem Hilfssatz 2 approximieren die n -ten $(C, 1)$ -Mittel der transformierten Fourierreihe $\sum v^{\zeta/2}(a_v \cos vx +$

$+ b_\nu \sin \nu x$) bzw. der Polynomreihe $\sum \nu^{\xi/2} c_\nu p_\nu(x)$ ⁴ in allen diesen Punkten x die der transformierten Reihe entsprechende Funktion $f_{\zeta/2}(x)$ gleichmäßig in der Größenordnung $n^{\xi/2} \omega\left(\frac{1}{n}\right)$. Auf Grund der in der Einleitung zitierten Sätze ist somit der Stetigkeitsmodul $\omega(\delta; f_{\zeta/2})$ von $f_{\zeta/2}(x)$ in jedem inneren Teilintervall $[c, d] \subset (a, b)$ von der Größenordnung $\omega(\delta)/\delta^{\xi/2}$. Für diesen letzteren Stetigkeitsmodul gilt aber bei $\delta \rightarrow 0$ die Bedingung $\omega(\delta; f_{\zeta/2})/\delta^{\frac{1}{2}-\gamma} \rightarrow +\infty$ mit geeignetem $\gamma > 0$, da $\omega(\delta; f_{\zeta/2})/\delta^{\xi/2} = O[\omega(\delta)/\delta^\xi]$, wo $\omega(\delta)/\delta^\xi \uparrow +\infty$ und $\frac{\xi}{2} < \frac{1}{2}$ ist. Infolgedessen sind die transformierten Reihen stark $(C, 1)$ -summierbar und für ihre Teilsummen $s_\nu\left(x; \frac{\xi}{2}\right)$ besteht die Relation (ALEXITS [1], S. 295—300):

$$\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n \left| s_\nu\left(x; \frac{\xi}{2}\right) - f_{\zeta/2}(x) \right| = O\left[n^{\xi/2} \omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Wählen wir für die Funktionen $\lambda(x)$ bzw. $\ell(x)$ des Hilfssatzes 1 die Ausdrücke $x^{-\xi/2}$ bzw. $x^{\xi/2} \omega\left(\frac{1}{x}\right)$ (den Exponenten des Hilfssatzes 1 ξ, β bzw. η entsprechen in unserem Fall die Zahlen $\frac{\xi}{2}, \vartheta - \frac{\xi}{2}$ bzw. $\frac{\xi}{2}$), so folgt aus dem

⁴ Daß diese Reihen wieder die Fourierentwicklungen einer L^2 -integrierbaren Funktion sind, können wir z. B. folgenderweise einsehen. Sei $s_n(x)$ die n -te Teilsumme der Fourierentwicklung von $f(x)$, $T_n(x)$ das in $[a, b]$ am besten approximierende Polynom höchstens n -ter Ordnung, so haben wir:

$$\int_a^b [f(x) - s_n(x)]^2 w(x) dx \leq \int_a^b [f(x) - T_n(x)]^2 w(x) dx = O\left[\omega^2\left(\frac{1}{2^n}\right)\right], \text{ d. h.}$$

$$\sum_{\nu=2^{n+1}}^\infty c_\nu^2 = O\left[\omega^2\left(\frac{1}{2^n}\right)\right]$$

und eine ähnliche Beziehung gilt für den trigonometrischen Fall mit $a_\nu^2 + b_\nu^2 = c_\nu^2$. Sodann haben wir:

$$\sum_{\nu=2^{n+1}}^{2^{n+1}} \nu^\xi c_\nu^2 \leq 2^{n\xi} \cdot 2^\xi \sum_{\nu=2^{n+1}}^{2^{n+1}} c_\nu^2 = O\left[2^{n\xi} \omega^2\left(\frac{1}{2^n}\right)\right] = O(1) 2^{n\xi} \cdot 2^{-2n\vartheta} = O[2^{-(2\vartheta-\xi)n}]$$

wegen $\omega\left(\frac{1}{2^n}\right) 2^{n\vartheta} \downarrow 0$ mit $n \rightarrow +\infty$.

Es ist also

$$\sum_{k=1}^\infty k^\xi c_k^2 = O(1) \sum_{n=0}^\infty \sum_{\nu=2^{n+1}}^{2^{n+1}} \nu^\xi c_\nu^2 = O(1) \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{2^{2\vartheta-\xi}}\right)^n < \infty, \text{ da } 2\vartheta - \xi > 0 \text{ ist,}$$

woraus nach dem Riesz-Fischerschen Satz folgt, daß die transformierten Reihen Fourierreihen einer $L^2[a, b]$ -integrierbaren Funktion $f_{\zeta/2}(x)$ sind.

Hilfssatz 1 für die Teilsummen $s_\nu(x)$ der ursprünglichen Reihen die Beziehung

$$\max_{c \leq x \leq d} h_n(f, x) = O \left[\omega \left(\frac{1}{n} \right) \right],$$

wie wir es behauptet haben.

Der Fall $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ mit $0 < \alpha < 1$ soll eigens hervorgehoben werden. Dann genügt $f(x)$ in $[a, b]$ einer Lipschitzbedingung α -ter Ordnung. Aus unseren beiden Sätzen ergibt sich unmittelbar das folgende

Korollar. *Genügt $f(x)$ in $[a, b]$ einer Lipschitzbedingung α -ter Ordnung mit $\alpha < 1$, so gilt in $[c, d] \subset (a, b)$*

$$\max_{c \leq x \leq d} h_n(f, x) = O \left(\frac{1}{n^\alpha} \right).$$

Ist $f(x)$ nach 2π periodisch und sind die $\sigma_n(x)$ die Fejérschen Mittel, so gilt dieser Annäherungsgrad auf der ganzen Zahlengerade.

(Eingegangen: 14. März, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ALEXITS, G.: *Convergence Problems of Orthogonal Series*. Pergamon Press, Oxford—London—New York—Paris, 1961.
- [2] — „Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction par les moyennes de sa série de Fourier” (ungarisch, französische Zusammenfassung). *Matematikai és Fizikai Lapok* **48** (1941) 410—422.
- [3] — „Sur l'ordre de grandeur de l'approximation d'une fonction périodique par les sommes de Fejér”. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **3** (1952) 29—42.
- [4] ALEXITS, G. und KRÁLIK, D.: „Über Approximationen mit den arithmetischen Mitteln allgemeiner Orthogonalreihen”. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **11** (1960) 387—399.
- [5] FREUD, G.: „Über die $(C, 1)$ -Summen der Entwicklungen nach orthogonalen Polynomen”. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **14** (1963) 197—208.
- [6] KRÁLIK, D.: „Untersuchung der Integrale und Derivierten gebrochener Ordnung mit den Methoden der konstruktiven Funktionentheorie”. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1956) 49—64.
- [7] PALEY, R. E. A. C. und ZYGMUND, A.: „On some Series of Functions”. *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.* **26** (1930) 337—357.
- [8] TANDORI, K.: „Über Approximationen mit allgemeinen Orthogonalreihen”. *Annales Univ. Sci. Budapest. R. Eötvös* **3—4** (1960—1961) 351—356.
- [9] ZYGMUND, A.: *Trigonometric Series*, Cambridge, 1959, I, II.

О ПОРЯДКЕ АППРОКСИМАЦИИ СИЛЬНОГО СУММИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

G. ALEXITS и D. KRÁLIK

Резюме

Пусть $s_n(x)$ обозначает n -ные частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$ по системе ортонормированных полиномов, порожденных на отрезке $[a, b]$ весовой функцией $w(x)$, соответствующего по тригонометрической системе (в дальнейшем $[a, b] = [0, 2\pi]$) и $f(x)$ периодическая функция с периодом 2π . Пусть также

$$h_n(f, x) = \frac{\sum_{v=0}^n |f(x) - s_v(x)|}{n+1}.$$

Докажем следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть для модуля непрерывности $\omega(\delta, a, b)$ функции $f(x)$ будет: $\omega(\delta, a, b) = O(\delta^\alpha)$ ($0 < \alpha < 1$), кроме того пусть $\omega(\delta, a, b) \leq \omega(\delta)$, где $\omega(\delta) \uparrow$ и для подходящих чисел $0 < \zeta/2 < \vartheta < \zeta < 1$ $\omega(\delta)/\delta^\zeta \uparrow + \infty$, $\omega(\delta)/\delta^\vartheta \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$. Если на $[a, b]$ весовая функция $w(x)$ удовлетворяет неравенству $0 < m \leq w(x) \leq M$, тогда на каждом $[c, d] \subset (a, b)$

$$\max_{c \leq x \leq d} h_n(f, x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Теорема 2. Если $f(x)$ — периодическая функция с периодом 2π и $\omega(\delta) \leq \delta^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$), тогда

$$\max_{-\infty < x < +\infty} h_n(f, x) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Теорема 3. Для периодической функции $f(x) \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha < 1$) с периодом 2π в каждой точке x будет:

$$f(x) - s_n(x) = O\left(\frac{\lambda_n}{n^\alpha}\right),$$

за исключением может быть такой подпоследовательности $\{s_{n_k}(x)\}$, индексы которой образуют подпоследовательность $\{n_k\}$ нулевой плотности в последовательности натуральных чисел. Здесь $\{\lambda_n\}$ — числовая последовательность, произвольно медленно, но монотонно стремящаяся $k + \infty$.

Доказательство выше перечисленных теорем опирается на две элементарные, обобщенного характера вспомогательные теоремы теории рядов.

SUR LES BORNES DE LA THÉORIE DE L'APPROXIMATION DES FONCTIONS CONTINUES PAR POLYNÔMES

par
GEORGES ALEXITS

Dédié à M. B. SZ.-NAGY, en signe
d'amitié, à son 50^e anniversaire

1. Introduction

Nous désignerons, dans les suivants, par $f(x)$ une fonction L^2 -intégrable dans un intervalle fermé (fini) $[a, b]$, (a, b) étant le symbole pour l'intervalle ouvert correspondant. La fonction $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre $0 < \alpha < 1$ avec la constante K , brièvement $f \in \text{Lip}_K \alpha$, dans le sous-intervalle $[c, d]$ de $[a, b]$, si

$$|f(x') - f(x)| \leq K|x' - x|^\alpha$$

pour tout couple de points $x, x' \in [c, d]$. Soit $\varrho(x) \geq 0$ une fonction intégrable en $[a, b]$ dont nous supposons qu'elle satisfait à la condition

$$(1) \quad 0 < m \leq \varrho(x) \leq M$$

dans l'intervalle $[c, d]$. Cette «fonction de poids» détermine univoquement un système de polynômes $\{p_n(x)\}$ orthonormés tels que $p_n(x)$ soit exactement de degré n avec le coefficient principal $\sigma_n > 0$. Nous appelons

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x) \sim f(x) \quad (c_n = \int_a^b f(x) \varrho(x) p_n(x) dx)$$

le développement de $f(x)$ suivant $\{p_n(x)\}$ y compris le cas lorsque $\{p_n(x)\} \equiv \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}$; alors $[a, b] = [0, 2\pi]$ et $f(x)$ est périodique.

Désignons par $s_n(f, x)$ la n -ième somme partielle du développement (2) et posons

$$h_n(f, x; p) = \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n |s_\nu(x) - f(x)|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Dans la note antérieure, nous avons démontré que, si $f \in \text{Lip } \alpha$ en $[a, b]$ avec $0 < \alpha < 1$, on a $h_n(f, x; 1) = O(n^{-\alpha})$ uniformément en tout intervalle $[c, d] \subset (a, b)$. Comme les sommes $h_n(f, x; p)$ croissent avec p , il est bien naturel de demander, si ce degré d'approximation reste conservé même en considérant $h_n(f, x; p)$ avec $p > 1$ au lieu de $p = 1$. Nous allons montrer que, dans le cas général $0 < \alpha < 1$ et $p > 1$ quelconque, il n'en est pas ainsi, mais la proposition conserve sa validité, si $p < 1/\alpha$ et le système $\{p_n(x)\}$ est borné dans

l'intérieur de (a, b) . Ce théorème semble-t avoir un intérêt par différentes raisons: d'une part, il généralise notre théorème principal de la note antérieure (Satz 1) lequel était déjà une généralisation d'un théorème classique; d'autre part, il met en évidence les limites de tout essai d'extension de ce genre.

La n -ième moyenne de Cesàro d'ordre $\beta > -1$ de la série (2) est

$$\sigma_n^\beta(f, x) = \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^\beta c_k p_k(x) = \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\beta-1} s_k(f, x)$$

où $A_n^\beta = \binom{n+\beta}{n} \sim n^\beta / \Gamma(\beta+1)$. En connexion avec le théorème que nous venons de signaler, nous démontrerons que, $\{p_n(x)\}$ étant borné et $f \in \text{Lip } \alpha$, on a $\sigma_n^\beta(f, x) - f(x) = O(n^{-\alpha})$ pour tout $\beta > \alpha$ uniformément en tout intervalle $[c, d] \subset (a, b)$. Remarquons que ce résultat est nouveau en ce qui concerne les développements en séries de polynômes orthogonaux; dans le cas beaucoup plus maniable des séries de Fourier trigonométriques, il était démontré il y a longue temps (JACOB [3] et ALEXITS [1]). Il semble que notre théorème est, en certain sens, le meilleur possible; car nous croyons que la proposition du théorème ne tient plus si $\beta \leq \alpha$, mais nous n'avons pas réussi de construire un exemple effectif d'une fonction $f \in \text{Lip } \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ telle que $\sigma_n^\alpha(f, x) - f(x) \neq O(n^{-\alpha})$.

Finalement, nous allons nous occuper aussi de l'approximation par des sommes linéaires formées avec les fonctions d'un système orthonormal quelconque $\{\varphi_n(x)\}$. M. SZ.-NAGY [5] a démontré — grossièrement dit — que les plus importantes méthodes de sommation linéaire du développement de $f \in \text{Lip } \alpha$ suivant $\{\varphi_n(x)\}$ ne rendent pas un degré d'approximation meilleur de celui de la meilleure approximation trigonométrique. Nous ne désirons que remarquer que ce résultat intéressant de M. SZ.-NAGY peut être généralisé à ce que, dans sa proposition, les moyennes linéaires peuvent être remplacées par des sommes linéaires quelconques $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$ à condition que les fonctions de Lebesgue de la sommation $(C, 1)$,

$$(3) \quad L_n(x) = \int_a^b \left| \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{k}{n+1} \right) \varphi_k(t) \varphi_k(x) \right| dt,$$

restent bornées dans leur ensemble uniformément en $[a, b]$.

2. Le degré d'approximation des sommes $h_n(f, x; p)$

D'abord, nous allons démontrer un théorème de caractère local:

Théorème 1. Si $[c, d] \subset [a, b]$ et la fonction $L_{c(x)}^2$ -intégrable $f(x)$ appartient, en $[c, d]$, à la classe $\text{Lip } \alpha$ avec $0 < \alpha < 1/2$, puis $\varrho(x) \geq 0$ satisfait à la condition (1) et $p_n(x) = O(1)$ uniformément en $[c, d]$, alors

$$(4) \quad h_n(f, x; p) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

uniformément en tout intervalle $[c', d'] \subset (c, d)$, pourvu que $\alpha < 1/p$.

Comme $h_n(f, x; p)$ croît avec p , il suffit d'envisager le cas $p \geq 2$. On a d'après la formule de Christoffel—Darboux

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n |s_v(f, x) - f(x)|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n \left| \int_a^b [f(t) - f(x)] \varrho(t) K_v(t, x) dt \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

avec le noyau

$$K_v(t, x) = \frac{\alpha_v}{\alpha_{v+1}} \frac{p_{v+1}(t) p_v(x) - p_v(t) p_{v+1}(x)}{t - x}$$

où α_v désigne le coefficient principal du polynôme $p_v(x)$. En partageant l'intervalle d'intégration en cinq parties: $[a, c]$, $[c, x - \frac{1}{n}]$, $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$, $[x + \frac{1}{n}, d]$, $[d, b]$, et en choisissant n tellement grand que $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \subset (c, d)$, on obtient cinq sommes d'intégrales:

$$\begin{aligned} h_n(f, x; p) &= \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n \left| \int_a^b [f(t) - f(x)] \varrho(t) K_v(t, x) dt \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left\{ O\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{v=0}^n \left| \int_a^c \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ O\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{v=0}^n \left| \int_c^{x-\frac{1}{n}} \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ O\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{v=0}^n \left| \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \\ &\quad + \left\{ O\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{v=0}^n \left| \int_{x+\frac{1}{n}}^d \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ O\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{v=0}^n \left| \int_d^b \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Soit x un point arbitraire de l'intervalle $[c', d'] = [c + \delta, d - \delta]$ avec $\delta > 0$ quelconque. Comme $\frac{\alpha_v}{\alpha_{v+1}} p_v(x) = O(1)$ pour tout v , on obtient pour la première somme l'évaluation

$$\begin{aligned} &O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \sum_{v=0}^n \left| \int_a^c \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \varrho(t) p_{v+1}(t) dt \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \\ &\quad + \sum_{v=0}^n \left| \int_a^c \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \varrho(t) p_v(t) dt \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ &= O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \sum_{v=0}^n |c_{v+1}(x)|^p + \sum_{v=0}^n |c_v(x)|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

où les $c_\nu(x)$ sont les coefficients du développement suivant le système $\{p_\nu(x)\}$ de la fonction

$$g_x(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} & \text{pour } a \leq t \leq c, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Or $|t - x| \geq \delta$ et $|f(x)|$ est borné en $[c, d]$, on a donc, $f(t)$ étant $L_{\varrho(x)}$ -intégrable,

$$c_\nu^2(x) \leq \frac{1}{\delta^2} \int_a^c [f(t) - f(x)]^2 \varrho(t) dt \int_a^c p_\nu^2(t) \varrho(t) dt \leq C_1^2$$

où la constante $C_1 > 0$ ne dépend ni de ν ni de x . Alors

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu(x)|^p = C_1^p \sum_{\nu=0}^{\infty} \left| \frac{c_\nu(x)}{C_1} \right|^p,$$

et les termes de la série du deuxième membre sont ≤ 1 ; leurs p -ièmes puissances ($p \geq 2$) ne sont donc pas plus grandes que les deuxièmes, c'est à dire que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu(x)|^p \leq C_1^p \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu^2(x)}{C_1^2}.$$

Il s'ensuit par l'inégalité de Bessel

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} |c_\nu(x)|^p &\leq C_1^{p-2} \int_a^c \left[\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right]^2 \varrho(t) dt \leq \\ &\leq \frac{C_1^{p-2}}{\delta^2} \int_a^c [f(t) - f(x)]^2 \varrho(t) dt \leq C_2 \end{aligned}$$

où $C_2 > 0$ ne dépend pas de x . On obtient donc, en tenant compte de $1/p > \alpha$, pour tout $x \in [c + \delta, d - \delta]$ l'évaluation

$$\left\{ O\left(\frac{1}{n}\right) \left| \int_a^c \left| \right|^p \right|^{\frac{1}{p}} \right\} = O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

et de la même manière

$$\left\{ O\left(\frac{1}{n}\right) \left| \int_a^b \left| \right|^p \right|^{\frac{1}{p}} \right\} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

En ce qui concerne l'évaluation de la deuxième somme, on trouve d'abord

$$\begin{aligned} & O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \sum_{v=0}^n \left| \int_c^{x-1/n} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \varrho(t) p_{v+1}(t) dt \right|^p + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{v=0}^n \left| \int_c^{x-1/n} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \varrho(t) p_v(t) dt \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ & = O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \sum_{v=0}^n |\bar{c}_{v+1}(x)|^p + \sum_{v=0}^n |\bar{c}_v(x)|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

où les $\bar{c}_v(x)$ désignent maintenant les coefficients du développement de la fonction $L_{\varrho(x)}^p$ -intégrable

$$h_x(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} & \text{pour } c \leq t \leq x - \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On obtient donc, d'après le théorème de Hausdorff—Young appliqué, ce qui est permis, à l'intervalle $[c, d]$, et en tenant compte de $f \in \text{Lip } \alpha$ dans l'intervalle $[c, d]$ et de la condition (1):

$$O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \sum_{v=0}^n \left| \int_c^{x-1/n} \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \int_c^{x-1/n} |h_x(t)|^q \varrho(t) dt \right\}^{\frac{1}{q}} = O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \int_c^{x-1/n} \frac{dt}{|t-x|^{q(1-\alpha)}} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

où q est l'exposant conjugué à p , c'est à dire le nombre positif défini par $1/p + 1/q = 1$. Comme $0 < \alpha < 1/p$, on a $q(1-\alpha) > q\left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1$ donc

$$\int_c^{x-1/n} \frac{dt}{|t-x|^{q(1-\alpha)}} = O(n^{-1+q-q\alpha}),$$

par conséquent

$$O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \sum_{v=0}^n \left| \int_c^{x-1/n} \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) O(n^{1-\frac{1}{q}-\alpha}) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

et on obtient de la même manière

$$O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \sum_{v=0}^n \left| \int_{x+1/n}^d \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Il nous reste encore l'évaluation de la troisième somme qui est bien simple. En effet, on a $K_\nu(t, x) = O(\nu)$ pour $x - 1/\nu \leq t \leq x + 1/\nu$, par conséquent

$$\begin{aligned} O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \sum_{\nu=0}^n \left| \int_{x-1/\nu}^{x+1/\nu} \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} &= O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \sum_{\nu=1}^n \nu^p \left[\int_{x-1/\nu}^{x+1/\nu} |f(t) - f(x)| \varrho(t) dt \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ &= O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \sum_{\nu=1}^n O\left(\frac{\nu^p}{n^{ap}}\right) \left(\int_{x-1/\nu}^{x+1/\nu} dt \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^{1/p+1+a}}\right) \left\{ \sum_{\nu=1}^n \nu^p \right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^a}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, en rassemblant toutes ces évaluations, nous avons démontré la validité de (4).

Théorème 2. Si $f \in \text{Lip } \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ et la condition (1) est satisfaite dans l'intervalle entier $[a, b]$, et si le système $\{p_n(x)\}$ est uniformément borné en tout intervalle $[c, d] \subset (a, b)$, alors

$$h_n(f, x; p) = O\left(\frac{1}{n^a}\right)$$

uniformément à l'intérieur de (a, b) , pourvu que $\alpha < 1/p$; mais si $\alpha = 1/p$, l'ordre de grandeur de l'approximation peut croître jusqu'à

$$(5) \quad h_n(f, x; p) \geq C \frac{\log^\alpha n}{n^a}$$

avec un $C > 0$.

Grâce au théorème 1, nous n'avons à considérer que le cas $1/2 \leq \alpha < 1$, et nous pouvons nous servir de la même méthode comme dans notre note antérieure où nous avons ramené le cas $\alpha \geq 1/2$ à celui de $\alpha < 1/2$. En effet, il est connu que, si $f \in \text{Lip } \alpha$, les moyennes $(C, 1)$ de la série (2) que nous désignons par $\sigma_n(f, x)$ rendent le degré d'approximation

$$(6) \quad \sigma_n(f, x) - f(x) = O\left(\frac{1}{n^a}\right)$$

en tout intervalle $[c, d] \subset (a, b)$. C'est un résultat classique dans la théorie des séries trigonométriques et il vient d'être démontré par M. FREUD [2] pour les développements suivant des polynômes orthogonaux, pourvu que $\varrho(x)$ satisfait à la condition (1), ce que nous avons supposé. Multiplions le k -ième terme de la série (2) par $k^{a-\varepsilon}$ avec $0 < \varepsilon < 1/p$. En désignant par $\sigma_n(\varepsilon, f, x)$ les moyennes $(C, 1)$ de la série $\sum k^{a-\varepsilon} c_k p_k(x)$, la relation (6) entraîne la convergence de $\{\sigma_n(\varepsilon, f, x)\}$ vers une fonction $L^2_{\varrho(x)}$ -intégrable $F(x)$ et

$$\sigma_n(\varepsilon, f, x) - F(x) = O\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right)$$

uniformément en $[c, d]$. C'est un résultat démontré par M. KRÁLIK [4]. Il s'ensuit, en vertu d'un résultat classique dû à S. BERNSTEIN, $F \in \text{Lip } \varepsilon$ en $[c, d]$; on a donc, d'après le théorème 1,

$$(7) \quad h_n(F, x; p) = O\left(\frac{1}{n^\varepsilon}\right)$$

en (c, d) . Pour en obtenir $h_n(f, x; p) = O(n^{-a})$, nous n'avons qu'à appliquer le lemme suivant: si on divise le k -ième terme de la série $\sum k^{a-\varepsilon} c_k p_k(x)$ par $k^{a-\varepsilon}$, c'est à dire que nous retournons à notre série initiale, l'évaluation (7) entraîne $h_n(f, x; p) = O(n^{-a})$; la première partie de notre théorème est ainsi démontrée. Quant au lemme en question, nous allons achever sa démonstration après celle de la deuxième partie de notre théorème.

La validité de l'évaluation inférieure (5) résulte immédiatement d'un exemple tout à fait élémentaire. Envisageons la série de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{1+a}} \quad (0 < a < 1).$$

Elle est uniformément convergente, représente donc une fonction périodique et continue $f(x)$, et comme

$$|f(x) - s_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+a}} = O\left(\frac{1}{n^a}\right),$$

on a $f \in \text{Lip } \alpha$ sur toute la droite. Mais si $\alpha = 1/p$, on obtient

$$h_n(f, 0; p) = \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n \left(\sum_{k=v+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+a}} \right)^{\frac{1}{a}} \right\}^a \geq \left\{ \frac{C^{1/a}}{n} \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} \right\}^a \geq \frac{C \log^a n}{n^a}.$$

Il nous reste à démontrer encore le lemme suivant portant sur des séries numériques quelconques:

Soit $\sum u_n$ une série numérique convergente vers A , s_n sa n -ième somme partielle, $h_n(p) = \left\{ n^{-1} \sum_{v=1}^n |s_v - A|^p \right\}^{1/p}$, et posons $s_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n k^{-\alpha+\varepsilon} u_k$, $h_n(\alpha, p) = \left\{ n^{-1} \sum_{v=1}^n |s_v(\alpha) - B|^p \right\}^{1/p}$, où B désigne la limite vers laquelle $s_n(\alpha)$ converge. Si $p \geq 1$ et $0 < \varepsilon < \alpha < 1/p$, et si l'on a $h_n(p) = O(n^{-\varepsilon})$, alors

$$h_n(\alpha, p) = O\left(\frac{1}{n^a}\right).$$

En effet, on obtient par des transformations abéliennes successives et par l'inégalité de Minkowski:

$$\begin{aligned} h_n(\alpha, p) &= \left\{ \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \left| \sum_{k=v+1}^{\infty} \frac{u_k}{k^{a-\varepsilon}} \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left\{ \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \left[\sum_{k=v+1}^{\infty} \Delta^2 \left(\frac{1}{k^{a-\varepsilon}} \right) k h_k(1) + \Delta \left(\frac{1}{(v+1)^{a-\varepsilon}} \right) v h_v(p) + \frac{|s_v - A|}{(v+1)^{a-\varepsilon}} \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left\{ \frac{2}{n} \sum_{v=1}^{\infty} \left[\sum_{k=v+1}^{\infty} \Delta^2 \left(\frac{1}{k^{a-\varepsilon}} \right) k h_k(1) \right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \frac{4}{n} \sum_{v=1}^{n-1} \Delta \left(\frac{1}{v^{p(a-\varepsilon)}} \right) v [h_v(p)]^p \right\}^{\frac{1}{p}} + \\ &\quad + \left\{ \frac{4}{n} \frac{1}{n^{(a-\varepsilon)p}} n [h_n(p)]^p \right\}^{\frac{1}{p}} = A_n + B_n + C_n. \end{aligned}$$

Ayant supposé $0 < \alpha < 1/p$ et $h_n(p) = O(n^{-\epsilon})$, on en obtient:

$$A_n = O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \sum_{v=1}^n \left(\sum_{k=v+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha}} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \sum_{v=1}^n \frac{1}{v^{ap}} \right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

$$B_n = O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right) \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{1}{v^{ap}} \right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

$$C_n = \left\{ \frac{4 [h_n(p)]^p}{n^{(\alpha-\epsilon)p}} \right\}^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

et notre lemme est démontré.

3. L'ordre de grandeur de l'approximation par des sommes de Cesàro d'ordre positif

Théorème 3. Si $f \in \text{Lip } \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ et les conditions du théorème 2 sont remplies, on a pour tout $\beta < \alpha$

$$(8) \quad \sigma_n^{\beta}(f, x) - f(x) = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

uniformément en tout intervalle $[c, d] \subset (a, b)$.

En effet, on obtient par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} |\sigma_n^{\beta}(f, x) - f(x)| &\leq \frac{1}{A_n^{\beta}} \sum_{v=0}^n A_{n-v}^{\beta-1} |s_v(f, x) - f(x)| \leq \\ &\leq \frac{1}{A_n^{\beta}} \left\{ \sum_{v=0}^u (A_{n-v}^{\beta-1})^q \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{v=0}^n |s_v(f, x) - f(x)|^p \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Choisissons $p > 1$ tel que $1 > \beta > 1/p > \alpha > 0$, alors $0 > q(\beta - 1) > -1$; il s'ensuit donc, en tenant compte de l'équivalence asymptotique $A_v^{\beta-1} \sim \sim v^{\beta-1} \Gamma(\beta)$:

$$\frac{1}{A_n^{\beta}} \left\{ \sum_{v=0}^n (A_{n-v}^{\beta-1})^q \right\}^{\frac{1}{q}} = O\left(\frac{1}{n^{\beta}}\right) \left\{ \sum_{v=1}^n v^{(\beta-1)q} \right\}^{\frac{1}{q}} = O(n^{-1+\frac{1}{q}}) = O\left(\frac{1}{n^{1/p}}\right),$$

par conséquent

$$\sigma_n^{\beta}(f, x) - f(x) = O(1) \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n |s_v(f, x) - f(x)|^p \right\}^{\frac{1}{p}} = O(1) h_n(f, x; p).$$

L'évaluation (8) en est une conséquence immédiate en vertu de notre théorème 2.

4. Meilleure approximation par des sommes linéaires des fonctions d'un système orthonormal arbitraire

Soit $\{\varphi_n(x)\}$ un système de fonctions orthonormées quelconques dans l'intervalle $[0, 1]$. Soit encore $\sum c_n \varphi_n(x)$ le développement d'une fonction $f(x)$ suivant $\{\varphi_n(x)\}$. On entend par la n -ième moyenne linéaire à matrice triangulaire et positive une expression de la forme

$$t_n(f, x) = \sum_{k=0}^n \lambda_{kn} c_k \varphi_k(x)$$

où $\lambda_{kn} \geq 0$ pour $k \leq n$ et $\lambda_{kn} = 0$ pour $k > n$.

Désignons par $f^{(r)}(x)$ la r -ième dérivée de $f(x)$, ($f^{(0)} = f$), et par

$$N_{ar} = \sup_{x \neq x'} \frac{|f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x)|}{|x' - x|^a}$$

la «norme lipschitzienne» de $f^{(r)}(x)$. Soit C_{ar} la classe de toutes les fonctions à N_{ar} fini. M. SZ.-NAGY a démontré l'existence d'une constante $\gamma_{ar} > 0$ tel que

$$\varrho(t_n, r, \alpha) = \sup_{f \in C_{ar}} \frac{\sup_{0 \leq x \leq 1} |t_n(f, x) - f(x)|}{N_{ar}} \geq \frac{\gamma_{ar}}{n^{r+a}}$$

à condition que

$$\sum_{k=0}^n \lambda_{kn}^2 \leq Cn.$$

Soit encore

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$$

une somme linéaire quelconque formée avec les $n + 1$ premières fonctions $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ du système $\{\varphi_n(x)\}$. Désignons par Π_n l'ensemble des sommes $S_n(x)$ et posons

$$E_n(f) = \inf_{S_n \in \Pi_n} \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - S_n(x)|,$$

$$\varrho_n(r, \alpha) = \sup_{f \in C_{ar}} \frac{E_n(f)}{N_{ar}(f)} \quad (N_{ar}(f) \neq 0).$$

On peut alors ajouter le complément suivant au théorème de M. SZ.-NAGY:

Théorème 4. *Si les fonctions de Lebesgue (3) satisfont à la condition*

$$(9) \quad L_n(x) = O(1) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

il existe une constante $\delta_{ar} > 0$ tel que

$$\varrho_n(r, \alpha) \geq \frac{\delta_{ar}}{n^{r+a}}.$$

Envisageons les moyennes de de la Vallée-Poussin

$$V_n(f, x) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n-1} s_k(f, x)$$

du développement $\sum c_n \varphi_n(x)$ de la fonction $f \in C_{ar}$. Eu égard à $V_n(f, x) = 2\sigma_{2n-1}(f, x) - \sigma_{n-1}(f, x)$, on a d'après (9):

$$\begin{aligned} |V_n(S_n - f, x)| &\leq \\ &\leq 2 \int_0^1 |S_n(t) - f(t)| \left| \sum_{k=0}^{2n-1} \left(1 - \frac{k}{2n}\right) \varphi_k(t) \varphi_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \varphi_k(t) \varphi_k(x) \right| dt \leq \\ &\leq 3 \sup_n L_n(x) \cdot \sup_{0 \leq x \leq 1} |S_n(t) - f(t)| = O(1) \sup_{0 \leq x \leq 1} |S_n(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

Or $V_n(S_n, x) = S_n(x)$, il s'ensuit donc

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - V_n(f, x)| &\leq \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - S_n(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |V_n(S_n - f, x)| = \\ &= O(1) \sup_{0 \leq x \leq 1} |S_n(x) - f(x)|, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\varrho(V_n, r, \alpha) = O(1) \varrho_n(r, \alpha).$$

Par absurde, supposons maintenant que notre proposition soit fausse, c'est à dire que $\varrho_n(r, \alpha) = o(n^{-r-\alpha})$; on aurait alors, d'après la relation précédente, aussi

$$(10) \quad \varrho(V_n, r, \alpha) = o\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Mais pour n impair, $n = 2m - 1$, les sommes $V_m(f, x)$ sont des $(2m - 1)$ -ièmes moyennes du développement de $f(x)$:

$$V_m(f, x) = t_{2m-1}(f, x) = \sum_{k=0}^{2m-1} \lambda_{k(2m-1)} c_k \varphi_k(x)$$

avec $\lambda_{k(2m-1)} = 1$ pour $k \leq m$, $\lambda_{k(2m-1)} = 2 - k/m$ pour $m < k \leq 2m - 1$ et $\lambda_{k(2m-1)} = 0$ pour $k > 2m - 1$. En posant encore $\lambda_{k2m} = \lambda_{k(2m-1)}$, on a défini une méthode de sommation T linéaire, à matrice positive et triangulaire ayant les moyennes $V_m(f, x) = t_n(f, x)$ pour $n = 2m - 1$ ou $2m$. Les coefficients λ_{kn} de cette méthode T satisfont à la condition

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{kn}^2 \leq \sum_{k=0}^{[n/2]+1} \lambda_{kn}^2 + \sum_{k=[n/2]+2}^n \lambda_{kn}^2 \leq [n/2] + 1 + 4([n/2] - 2) < 2n$$

où $[n/2]$ désigne la partie entière de $n/2$. Les conditions du théorème de M. SZ. NAGY sont donc satisfaites par les sommes $V_n(f, x)$, il existe donc une constante $\gamma_{ar} > 0$ tel que

$$\varrho(V_n, r, \alpha) > \frac{\gamma_{ar}}{n^{r+a}},$$

en contradiction avec (10); c. q. f. d.

(Reçu le 14 mars, 1963)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALEXITS, G.: "Über die Annäherung einer stetigen Funktion durch die Cesàroschen Mittel ihrer Fourierreihe". *Math. Annalen* **100** (1928) 264—277.
- [2] FREUD, G.: "Über die $(C, 1)$ -Summen der Entwicklungen nach orthogonalen Polynomen". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **14** (1963) 197—208.
- [3] JACOB, M.: "Über die Summierbarkeit von Fourierschen Reihen und Integralen". *Math. Zeitschr.* **29** (1928) 20—33.
- [4] KRÁLIK, D.: "Untersuchung der Integrale und Derivierten gebrochener Ordnung mit den Methoden der konstruktiven Funktionentheorie". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **7** (1956) 49—64.
- [5] SZ. NAGY, B.: "Approximation properties of orthogonal expansions". *Acta Sci. Math.* **15** (1953/54) 31—37.

ОБ ОГРАНИЧЕНИЯХ ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ

G. ALEXITS

Резюме

Если $[c, d] \subset (a, b)$ и $L^2_{\varrho(x)}[a, b]$ -интегрируемая функция $f(x)$ на отрезке $[c, d]$ относится к классу функций $\text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha < 1$), далее если для L -интегрируемой на $[a, b]$ весовой функции $\varrho(x) \geq 0$ выполняется на $[c, d]$ условие $0 < m \leq \varrho(x) \leq M$ и если $p_n(x) = O(1)$ равномерно на $[c, d]$, где $\{p_n(x)\}$ — система ортонормированных полиномов с положительным коэффициентом при главном члене, порожденных на $[a, b]$ весовой функции $\varrho(x)$, тогда

$$h_n(f, x, p) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

равномерно на каждом $[c', d'] \subset (c, d)$ при условии, что $\alpha < \frac{1}{p}$. Здесь

$$h_n(f, x, p) = \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n |f(x) - s_v(x)|^p \right\}^{1/p},$$

далее

$$s_v(x) = \sum_{k=0}^v c_k p_k(x), \quad c_k = \int_a^b f(x) \varrho(x) p_k(x) dx.$$

Если $\alpha = \frac{1}{p}$, то для порядка $h_n(f, x, p)$ имеем:

$$h_n(f, x, p) \geq C \cdot \frac{\log^\alpha n}{n^\alpha},$$

где константа $C > 0$.

Далее в работе рассматриваются следствия этой теоремы.

ÜBER EINEN SATZ DER KETTENBRUCHLEHRE

von
PÉTER SZÜSZ

Herrn Professor P. Erdős
zum 50. Geburtstag gewidmet

Ein bekannter Satz¹ besagt folgendes: Ist $\frac{p}{q}$ ein irreduzibler Bruch, so folgt aus

$$(1) \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2},$$

dass $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch der regelmässigen Kettenbruchentwicklung von α sein muss. Dies lässt sich auch folgendermassen ausdrücken: Im Intervall $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{2q^2}, \frac{p}{q} + \frac{1}{2q^2} \right)$ liegen nur solche α , in deren regelmässigen Kettenbruchentwicklung der Bruch $\frac{p}{q}$ als Näherungsbruch vorkommt. Im folgenden bezeichne ich mit $I_{p,q}$ das Intervall maximaler Länge derjenigen α ($0 < \alpha < 1$), in deren regelmässigen Kettenbruchentwicklung der schon in irreduzibler Gestalt geschriebene Bruch $\frac{p}{q}$ als Näherungsbruch vorkommt. Bezeichnet $|I|$ die Länge von I , so ist stets

$$(2) \quad q^2 |I_{p,q}| \geq 1.$$

$q^2 |I_{p,q}|$ hängt nur von p und q ab und lässt sich durch die (endliche) Kettenbruchentwicklung von $\frac{p}{q}$ explizit angeben. Es gilt²

$$(3) \quad q^2 |I_{p,q}| = \frac{3}{\left(1 + \frac{q'}{q}\right) \left(2 - \frac{q'}{q}\right)},$$

wobei q' den »vorletzten« Näherungsnenner des endlichen Kettenbruches

$$(4) \quad \frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_k]$$

¹ Vgl. PERRON [1], S. 39.

² Vgl. PERRON [1], S. 39 (3) ist dort nicht explizit angegeben, lässt sich aber von der dortigen Formel $\vartheta \leq \frac{B_{u-1}}{B_{u-1} + B_{u-2}}$ leicht herleiten.

bedeutet; hier hängt k von p und q ab. Es gilt

$$(5) \quad a_k \geq 2.$$

Wegen (3),

$$(6) \quad \frac{q'}{q} = [0; a_k, a_{k-1}, \dots, a_1]$$

und (5) gilt jedenfalls

$$(7) \quad \frac{4}{3} < q^2 |I_{p,q}| < \frac{3}{2}.$$

P. ERDÖS hat die Frage aufgeworfen, den Mittelwert der $q^2 |I_{p,q}|$ für $q \rightarrow \infty$ asymptotisch zu bestimmen, wenn p sämtliche Zahlen unterhalb q durchläuft, für die $(p, q) = 1$ gilt, d. h. den Grenzwert

$$(8) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{0 < p < q \\ (p, q) = 1}} q^2 |I_{p,q}|$$

zu bestimmen. In der vorliegenden Note bestimme ich schärfer die asymptotische Verteilung der $q^2 |I_{p,q}|$, d. h. den Grenzwert

$$(9) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{0 < p < q \\ (p, q) = 1 \\ q^2 |I_{p,q}| \leq t}} 1,$$

wobei t eine beliebige reelle Zahl ist, die den Ungleichungen

$$(10) \quad \frac{4}{3} \leq t \leq \frac{3}{2}$$

genügt. Es wird der folgende Satz bewiesen:

Satz. *Man setze*

$$(11) \quad F_q(t) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{0 < p < q \\ (p, q) = 1 \\ q^2 |I_{p,q}| \leq t}} 1.$$

Dann gilt für $\frac{4}{3} \leq t \leq \frac{3}{2}$

$$(12) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} F_q(t) = \sqrt{9 - \frac{12}{t}} = F(t).$$

Die folgenden zwei Paragraphen enthalten die zum Beweis von (12) nötigen Hilfssätze; im § 3 wird der Beweis von (12) vollendet.

Aus unserem Satz folgt unmittelbar, dass

$$(13) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{0 < p < q \\ (p, q) = 1}} q^2 |I_{p,q}| = \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{3}{2}} t dF(t) = 2 \log 2 = 1,3863 \dots$$

womit die Frage von P. ERDÖS beantwortet ist.

§ 1. Über die Funktion $\varphi_c(n)$

Es sei n eine natürliche Zahl, c eine positive Zahl mit $c \leq 1$. Man setze

$$(1.1) \quad \varphi_c(n) = \sum_{\substack{0 < m \leq cn \\ (m, n) = 1}} 1.$$

Es ist also $\varphi_1(n) = \varphi(n)$, wobei $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion bedeutet.

Dann gilt

Hilfssatz 1.1. *Es ist*

$$(1.2) \quad \varphi_c(n) = c\varphi(n) + O(n^\varepsilon) \quad (n \rightarrow \infty)$$

wobei $\varepsilon > 0$, aber sonst beliebig klein ist.

Beweis. Es gilt

$$(1.3) \quad \varphi_c(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \left[\frac{cn}{d} \right] = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{cn}{d} + O(2^{v(n)}),$$

wobei $v(n)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von n bedeutet. Nun ist

$$(1.4) \quad v(n) = o(\log n).$$

(1.4) lässt sich folgendermassen beweisen: es ist

$$n = \prod_{k=1}^r p_k^{a_k}$$

also

$$(1.5) \quad n \geq \prod_{p|n} p \geq p_x^{v(n)-\varkappa},$$

wobei p_x die x -te Primzahl bedeutet. Aus (1.5) folgt

$$\log n > (v(n) - \varkappa) \log p_x,$$

also

$$v(n) < \frac{\log n}{\log p_x} + \varkappa,$$

woraus (1.4) schon folgt. Aus (1.3) und (1.4) erhält man

$$\varphi_c(n) = c\varphi(n) + O(2^{o(\log n)}) = c\varphi(n) + O(n^\varepsilon)$$

womit Hilfssatz 1.1 bewiesen ist.

§ 2. Ein Hilfssatz aus der Kettenbruchlehre

Es sei n gegeben. Dann lässt sich jede Zahl $\frac{a}{n}$ mit $(q, n) = 1$, $a < n$ in einen regelmässigen Kettenbruch

$$(2.1) \quad \frac{a}{n} = [0 : a_1, \dots, a_k]$$

entwickeln, wobei

$$(2.2) \quad a_k \geq 2$$

ist. Bezeichnet B_{k-1} den »vorletzten« Näherungsnenner des Kettenbruches (2.1), so ist wegen (3)

$$(2.3) \quad n |I_{a,n}| = \frac{3}{\left(1 + \frac{B_{k-1}}{n}\right) \left(2 - \frac{B_{k-1}}{n}\right)}.$$

Wegen (2.2) ist

$$(2.4) \quad \frac{B_{k-1}}{n} < \frac{1}{2}.$$

Nun gilt der folgende

Hilfssatz 2.1. *Es sei a' eine natürliche Zahl mit*

$$(2.5) \quad (a', n) = 1$$

und

$$(2.6) \quad 2a' \leq n.$$

Dann gibt es genau zwei zwischen 0 und n gelegene natürliche Zahlen a_1 und a_2 ($(a_1, n) = (a_2, n) = 1$) derart, dass a' der »vorletzte« Näherungsnenner der endlichen regelmässigen Kettenbruchentwicklung von

$$\frac{a_1}{n} \quad \text{und} \quad \frac{a_2}{n}$$

ist.

Beweis. $\frac{a'}{n}$ lässt sich in einen Kettenbruch

$$(2.7) \quad \frac{a'}{n} = [0, b_1, \dots, b_k] = [0; b_1, \dots, b_k - 1, 1]$$

entwickeln, wobei $b_k \geq 2$ gesetzt werden darf. Dann ist

$$(2.8) \quad \frac{a_1}{n} = [0; 1, (b_k - 1), b_{k-1}, \dots, b_1],$$

$$\frac{a_2}{n} = [0; b_k, b_{k-1}, \dots, b_1].$$

Die Brüche $\frac{a_1}{n}$ und $\frac{a_2}{n}$ sind voneinander offenbar verschieden. Damit ist Hilfssatz 2.1 bewiesen.

§ 3. Vollendung des Beweises

Gehört im Sinne des Hilfssatzes 2.1 zu einer natürlichen Zahl a_1 mit $a_1 < n$, $(a_1, n) = 1$ die Zahl a' , so ist

$$(3.1) \quad n^2 |I_{a_1, n}| = \frac{3}{\left(1 + \frac{a'}{n}\right) \left(2 - \frac{a'}{n}\right)}.$$

Da wegen Hilfssatz 2.1 zu jedem a' mit $(a', n) = 1$, $2a' \leq n$ zwei verschiedene Zahlen a_1 und a_2 gehören, ist für jedes t welches den Ungleichungen (10) genügt,

$$(3.2) \quad \sum_{\substack{n^2 | I_{a, n}| \leq t \\ a \leq n \\ (a, n) = 1}} 1 = 2 \sum_{\substack{2a' \leq n \\ (a', n) = 1 \\ 3 \leq t \left(1 + \frac{a'}{n}\right) \left(2 - \frac{a'}{n}\right)}} 1.$$

Nun betrachte ich den Ausdruck

$$(3.3) \quad G_n(t) = \sum_{\substack{2a' \leq n \\ (a', n) = 1 \\ 3 \leq \left(1 + \frac{a'}{n}\right) \left(2 - \frac{a'}{n}\right) t}} 1.$$

Die Summationsbedingungen $2a' \leq n$ und $3 \leq \left(1 + \frac{a'}{n}\right) \left(2 - \frac{a'}{n}\right) t$ in (3.3) sind äquivalent mit

$$\frac{n}{2} \left(1 - \sqrt{9 - \frac{12}{t}}\right) \leq a' \leq \frac{n}{2}.$$

Die Anzahl der a' , die ausserdem $(a', n) = 1$ leisten, ist wegen der Hilfssätze 1.1 und 2.1 gleich

$$\varphi_{\frac{1}{2}}(n) - \varphi_{\frac{1}{2}} \left(1 - \sqrt{9 - \frac{12}{t}}\right)(n) = \sqrt{9 - \frac{12}{t}} \varphi_{\frac{1}{2}}(n) + O(n^\epsilon).$$

Daher ist

$$G_n(t) = \sqrt{9 - \frac{12}{t}} \varphi_{\frac{1}{2}}(n) + O(n^\epsilon),$$

woraus wegen (3.2) und wegen der trivialen Ungleichung $\varphi(n) > n^{1-\epsilon}$ unser Satz schon folgt.

(Eingegangen: 18. März, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] PERRON, O.: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, I. III. Auflage, Stuttgart, 1954.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ТЕОРИИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

P. SZÜSZ

Резюме

Автор в своей работе доказывает следующую теорему: Пусть $0 < \frac{p}{q} < 1$, $(p, q) = 1$. Если $I_{p,q}$ обозначает интервал состоящий из тех чисел, в разложении которых в цепные дроби встречается дробь $\frac{p}{q}$, а $|I|$ длину интервала I , то для каждого t , для которого

$$\frac{4}{3} \leq t \leq \frac{3}{2}$$

выполняется предельное соотношение:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{(p,q)=1 \\ q^2 | I_{p,q}| \leq t}} 1 = \sqrt{9 - \frac{12}{t}}.$$

ÜBER EINEN LINEAREN MEHRDIMENSIONALEN APPROXIMATIONSPROZESS

von
M. SALLAY

Es bezeichne $f(x + 2\pi) = f(x)$ eine auf der ganzen reellen Achse stetige Funktion. Nach einem bekannten Satz der Approximationstheorie kann man für jedes $f(x)$ ein trigonometrisches Polynom T_m höchstens m -ter Ordnung konstruieren, so dass

$$(1) \quad |f(x) - T_m(x)| \leq \kappa_0 \omega\left(f; \frac{1}{m}\right)$$

besteht, wo

$$(2) \quad \omega\left(f; \frac{1}{m}\right) = \max_{\substack{h \leq \frac{1}{m} \\ x \in [0, 2\pi]}} |f(x+h) - f(x)|$$

ist. (S. [2]) Es ist möglich, die Approximationspolynome in der Form $T_m(x) = A_m\{f; x\}$ zu wählen, wobei A_m einen linearen Operator bedeutet, welcher den Raum $C_{2\pi}$ der stetigen Funktionen mit der Periode 2π in den Raum der trigonometrischen Polynome höchstens m -ter Ordnung transformiert. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass $A_m(f)$ die Funktionen $f(x)$ in der Grössenordnung $\omega\left(f; \frac{1}{m}\right)$ approximiert, sind die folgenden:

1. $\max |A_m f| \leq \kappa_1 \max |f(x)|$ für $f \in C_{2\pi}$,
2. $\max |f - A_m f| \leq \kappa_2 \frac{\lambda}{m}$ für $f \in \text{Lip}_\lambda 1 \cap C_{2\pi}$,

wo κ_1 und κ_2 von f , m , A_m und λ unabhängige Konstante sind.

Betrachten wir die in dem Gebiet $D = \{0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$ in jeder Veränderlichen stetigen Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$. Definieren wir für die Funktionen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine, von den Parametern m_i (wo m_i ganze Zahlen sind) abhängige lineare Transformationsfolge $\{A_{m_1 \dots m_n}\}$, welche den Raum der Funktionen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in den Raum der in der jeder Veränderlichen stetigen Funktionen transformiert.

¹ $f \in \text{Lip}_\lambda 1$, wenn $|f(x+h) - f(x)| \leq \lambda |h|$.

Es seien im weiteren der Stetigkeitsmodul von $f(x_1, \dots, x_n)$

$$(3) \quad \omega(f; v_1, \dots, v_n) = \max_{\substack{h_i \leq v_i \\ 0 \leq x_i \leq 1}} |f(x_1 + h_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n)|$$

und die Norm des Operators $A_{m_1 m_2 \dots m_n}$

$$\|A_{m_1 m_2 \dots m_n} f\| = \max_{x_i \in D} |A_{m_1 \dots m_n} f|.$$

In unserer Arbeit beweisen wir, dass für die Approximation von $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ durch $A_{m_1 \dots m_n} f$ für passende Wahl der Transformationen eine zu dem eindimensionalen Fall analoge Abschätzung gültig ist. In weiteren zeigen wir, dass sich durch spezielle Wahl von $A_{m_1 m_2 \dots m_n}$ eine Abschätzung für die Approximation der periodischen Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$ durch trigonometrische Polynome $T_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n)$ in x_i höchstens m_i -ter Ordnung ergibt. Für den Fall $n = 2$ sind solche trigonometrischen Polynome in den Arbeiten [1] und [3] konstruiert. Eine ähnliche Theorie ist gültig, wenn wir statt der trigonometrischen Polynome eine gewisse singuläre Integraltransformation von $f(x_1, x_2)$ betrachten. (S. [3].)

1.

Es sei $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine in dem Gebiet D in jeder Veränderlichen stetige Funktion. Betrachten wir die lineare Transformationsfolge $\{A_{m_1 \dots m_n}\}$, und setzen wir voraus, dass

$$(4) \quad \|A_{m_1 \dots m_n} f\| \leq \kappa_1 \|f\|$$

besteht, wo κ_1 eine von f , m_i und $A_{m_1 \dots m_n}$ unabhängige Konstante ist.

Bezeichnen wir mit C^* die zu dem Raum C der stetigen Funktionen gehörigen Funktionen, für welche

$$|f(x_1, \dots, x_n) - f(y_1, \dots, y_n)| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i - y_i|.$$

$x_i, y_i \in D$

Setzen wir im weiteren voraus, dass für $f \in C^*$

$$(5) \quad \|f(x_1, \dots, x_n) - A_{m_1 \dots m_n} f(x_1, \dots, x_n)\| \leq \frac{1}{n} \kappa_2 \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{m_i}$$

gültig ist, wo κ_2 eine von f , m_i , λ_i und $A_{m_1 \dots m_n}$ unabhängige Konstante ist.

Satz 1. *Es seien die Bedingungen (4) und (5) erfüllt. Dann gilt für $f \in C$ die Ungleichung*

$$\|f(x_1, \dots, x_n) - A_{m_1 \dots m_n} f(x_1, \dots, x_n)\| \leq (\kappa_1 + \kappa_2 + 1) \omega\left(f; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n}\right).$$

Vor dem Beweis beweisen wir den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz. *Zu jeder Funktion $f(x_1, \dots, x_n) \in C$ können wir ein multilineares Polynom der Gestalt*

$$(6) \quad p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (a_i x_i + b_i)$$

konstruieren, für welches die Ungleichungen

$$(7) \quad \max |f(x_1, \dots, x_n) - p(x_1, \dots, x_n)| \leq \omega(f; v_1, \dots, v_n)$$

und

$$(8) \quad \begin{aligned} & |p(x_1, x_2, \dots, x_n) - p(y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq \\ & \leq \omega(f; v_1, \dots, v_n) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - y_i|}{v_i} \end{aligned}$$

gelten.

Beweis. Es nehme die Funktion $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in den Eckpunkten des n -dimensionalen Parallelepipeds mit Kantenlänge v_1, v_2, \dots, v_n die Werte von $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ an.²

Betrachten wir den zu der z -Achse senkrechten Streifen mit der Breite $\omega(f; v_1, \dots, v_n)$ der die Fläche $z = f(x_1, \dots, x_n)$ enthält. Es ist hinreichend zu zeigen, dass der Streifen auch die Oberfläche $z = p(x_1, \dots, x_n)$ enthält. Für $n = 1$ ist die Behauptung leicht ersichtlich. Setzen wir voraus, dass die Behauptung für $n - 1$ gültig ist.

Schneiden wir die Fläche $z = p(x_1, \dots, x_n)$ mit den $(n - 1)$ -dimensionalen Ebenen $x_n^l = \beta_l$ $x_n^0 \leq \beta_l \leq x_n^0 + V_n$, so bekommen wir $(n - 1)$ -dimensionale Oberflächen der Gestalt

$$z = p(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \beta_l) = \prod_1^{n-1} (a_i x_i + b_i) \cdot (a_n \beta_l + b_n),$$

wo $p(x_1, \dots, x_{n-1}, \beta_l)$ in den Eckpunkten des $(n - 1)$ -dimensionalen Parallelepipeds mit Kantenlänge v_1, v_2, \dots, v_{n-1} dieselben Werte annimmt, wie die Funktion $f(x_1, \dots, x_{n-1}, \beta_l)$. Da nach der Induktionsvoraussetzung der Streifen mit der Breite $\omega(f[x_1, \dots, x_{n-1}, \beta_l]; v_1, \dots, v_{n-1}, 0) \leq \omega(f[x_1, \dots, x_n]; v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ die Oberfläche $z = p(x_1, \dots, x_{n-1}, \beta_l)$ $x_n^0 \leq \beta_l \leq x_n^0 + U_n$ enthält, folgt unsere Behauptung.

² Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass $p(x_1, \dots, x_n)$ eindeutig bestimmt ist. Da in der Darstellung (6) von $p(x_1, \dots, x_n)$ die Anzahl der Koeffizienten gleich $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ist, ist es hinreichend zu beweisen, dass die Determinante des Systems $D_n \neq 0$ ist. Es sei

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{12^{n-1}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{22^{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2^{n-1}1} & a_{2^{n-1}2} & \dots & a_{2^{n-1}2^{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

und es nehme x_n die Werte $x_n^0, x_n^1 = x_n^0 + v_n, 0 \leq x_n^0 \leq 1, v_n \neq 0$ an. Dann

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} x_n^0 & \dots & a_{12^{n-1}} x_n^0 & a_{11} & \dots & a_{12^{n-1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2^{n-1}1} x_n^0 & \dots & a_{2^{n-1}2^{n-1}} x_n^0 & a_{2^{n-1}1} & \dots & a_{2^{n-1}2^{n-1}} \\ a_{11} x_n^1 & \dots & a_{12^{n-1}} x_n^1 & a_{11} & \dots & a_{12^{n-1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2^{n-1}1} x_n^1 & \dots & a_{2^{n-1}2^{n-1}} x_n^1 & a_{2^{n-1}1} & \dots & a_{2^{n-1}2^{n-1}} \end{vmatrix} = (x_n^0 - x_n^1)^{2^{n-1}} D_{n-1}^2 \neq 0.$$

w. z. b. w.

Beweis des Satzes 1. Teilen wir die Kante des n -dimensionalen Würfels mit der Kantenlänge 1 in $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}, m_n$ Teile. So ist der Würfel in $\prod_{i=1}^n m_i$ Parallelepipede zerlegt. Konstruieren wir für jedes Parallelepiped die Funktion $p(x_1, \dots, x_n)$ die in den Eckpunkten dieselben Werte annimmt, wie die Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$.

Dann ergibt sich wegen (4), (5), (7) und (8)

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n) - A_{m_1 \dots m_n} f(x_1, \dots, x_n)\| &= \\ &= \|f(x_1, \dots, x_n) - p(x_1, \dots, x_n) + p(x_1, \dots, x_n) - A_{m_1 \dots m_n} p(x_1, \dots, x_n) + \\ &+ A_{m_1 \dots m_n} p(x_1, \dots, x_n) - A_{m_1 \dots m_n} f(x_1, \dots, x_n)\| \leq \\ &\leq (1 + \kappa_1) \|f(x_1, \dots, x_n) - p(x_1, \dots, x_n)\| + \\ &+ \|p(x_1, \dots, x_n) - A_{m_1 \dots m_n} p(x_1, \dots, x_n)\| \leq \\ &\leq (1 + \kappa_1 + \kappa_2) \omega\left(f; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n}\right) \end{aligned} \quad \text{w. z. b. w.}$$

2.

Im weiteren setzen wir voraus, dass die partiellen Derivierten r -ter Ordnung der Funktionen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ im Gebiet D existieren und dort stetig sind. Bezeichnen wir mit $A_{m_1 \dots m_n}^k$ $k = 1, 2, \dots, r+1$ die lineare Transformationsfolge

$$A_{m_1 \dots m_n}^1 f = A_{m_1 \dots m_n} f, \quad A_{m_1 \dots m_n}^k f = A^1(A_{m_1 \dots m_n}^{k-1} f).$$

Setzen wir voraus, dass $A_{m_1 \dots m_n}^1 f$ die Bedingung

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} A^1 f(x_1, \dots, x_n) = A_{m_1 \dots m_n}^1 \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$$

befriedigt. Wir zeigen, dass die Ungleichungen

$$(10) \quad \|A_{m_1 \dots m_n}^k g\| \leq \kappa_1^k \|g\| \quad \text{für } g \in C$$

und

$$(11) \quad \left\| f - \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \binom{r+1}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f \right\| \leq (\kappa_1 + 1)^r \frac{\kappa_2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{m_i} \quad \text{für } f \in C^*$$

gelten.

Die Gültigkeit von (10) ist leicht ersichtlich. Wir beweisen (11) durch vollständige Induktion. Für $r = 0$ ergibt sich die Bedingung (5). Setzen wir voraus, dass (11) für $r-1$ gültig ist, d. h.

$$(12) \quad \left\| f - \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \binom{r}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f \right\| \leq (\kappa_1 + 1)^{r-1} \frac{\kappa_2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{m_i}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & \left\| f - \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \binom{r+1}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f \right\| = \\ & = \left\| f - \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \binom{r}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f - A^1 \left(f - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{r}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f \right) \right\| \leq \\ & \leq (1 + \kappa_1) \left\| f - \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \binom{r}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f \right\| \leq (1 + \kappa_1)^r \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{m_i}, \end{aligned}$$

letzteres wegen (12).

Satz 2. Setzen wir voraus, dass die partiellen Derivierten r -ter Ordnung der Funktionen $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ existieren und stetig sind. Betrachten wir die lineare Approximationsfolge $A^i = A_{m_1 \dots m_n}^i$ $i = 1, 2, \dots, r+1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left\| f - \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \binom{r+1}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f \right\| \leq \\ & \leq \prod_{l=0}^r [\kappa_2(\kappa_1 + 1)^l + \kappa_1 + 1] \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \right)^r \sum_{\substack{\sum_{i=1}^n r_i = r \\ 0 \leq r_i \leq r}} \frac{r!}{\prod_{i=1}^n r_i!} \omega \frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n} \Big), \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen den Satz durch vollständige Induktion. Für $r = 0$ ergibt sich der Satz 1. Setzen wir voraus, dass die Behauptung für $r-1$ gültig ist. Es ist

$$\begin{aligned} & \left\| f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \binom{r+1}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f(x_1, \dots, x_n) \right\| = \\ & = \left\| f - \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} \binom{r}{i} A^i f - A^1 \left(f - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{r}{i} A^i f \right) \right\|. \end{aligned}$$

Da die Funktion $g = f - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{r}{i} A^i f$ stetig ist und nach (10) und (11) die Relationen

$$\|A^1 g\| \leq \kappa_1 \|g\|$$

und

$$\|g - A^1 g\| \leq (\kappa_1 + 1)^r \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{m_i}$$

gültig sind, ergibt sich aus dem Satz 1

$$\begin{aligned} & \|g(x_1, \dots, x_n) - A^1 g(x_1, \dots, x_n)\| \leq \\ & \leq [(\kappa_1 + 1)^r \kappa_2 + \kappa_1 + 1] \omega \left(g; \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \dots, \frac{1}{m_n} \right). \end{aligned}$$

Da die partiellen Derivierten erster Ordnung der Funktionen $g(x_1, \dots, x_n)$ existieren, bekommen wir aus (13) die Abschätzung

$$\|g - A^1 g\| \leq [\kappa_2(\kappa_1 + 1)^r + \kappa_1 + 1] \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \|g_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)\|.$$

Da die partielle Derivierten $r - 1$ -ter Ordnung der Funktionen f_{x_i} $i = 1, \dots, n$ existieren, so folgt aus (9) und aus der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
 \|g_{x_i}\| &\leq \\
 &\leq K^* \left(\sum_1^n \frac{1}{m_i} \right)^{r-1} \sum_{\substack{\sum r_j + r_i = r-1 \\ 0 \leq r_i \leq r-1}} \frac{(r-1)!}{\prod r_i! \cdot (r_i+1)!} \omega \left(\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_i^{r_i+1} \dots \partial x_n^{r_n}}; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n} \right) = \\
 (15) \quad &= K^* \left(\sum_1^n \frac{1}{m_i} \right)^{r-1} \sum_{\substack{\sum r_j = r \\ 0 \leq r_j \leq r-1 \text{ } j \neq i \\ 0 \leq r_i \leq r \text{ } r_i \neq 0}} \frac{r!}{\prod r_j!} \omega \left(\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n} \right),
 \end{aligned}$$

wobei

$$K^* = \prod_{l=0}^{r-1} [\kappa_2(\kappa_1 + 1)^l + \kappa_1 + 1].$$

Setzt man (15) in (14) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 &\left\| f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \binom{r+1}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f(x_1, \dots, x_n) \right\| \leq \\
 &\leq \prod_{i=0}^r [\kappa_2(\kappa_1 + 1)^l + \kappa_1 + 1] \left(\sum_1^n \frac{1}{m_i} \right)^r \sum_{\substack{\sum r_i = r \\ 0 \leq r_i \leq r}} \frac{r!}{\prod r_i!} \omega \left(\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n} \right) \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{w. z. b. w.}
 \end{aligned}$$

3.

Es sei $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine in jeder Veränderlichen stetige und nach 2π -periodische Funktion. Betrachten wir die lineare Transformation

$$T_{m_1 \dots m_n} = \gamma^{-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x_1 + 2u_1, \dots, x_n + 2u_n) \prod_{i=1}^n F_{m_i}(u_i) du_i$$

mit

$$\gamma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \prod_{i=1}^n F_{m_i}(u_i) du_i$$

und

$$F_{m_i}(u_i) = \left[\frac{\sin m_i u_i}{m_i \sin u_i} \right]^4.$$

Die Transformation transformiert den Raum $C_{2\pi}$ der stetigen nach 2π -periodischen Funktionen in den Raum der trigonometrischen Polynome in x_i höchstens m_i -ter Ordnung, ferner befriedigt sie die Bedingungen (4) und (5)

mit den Konstanten $\kappa_1 = 1$ und $\frac{\kappa_2}{n} < 3$. (S. [1].) Nach dem Satz 1 können

wir für $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ein trigonometrisches Polynom konstruieren, so dass

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n) - T_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n)\| &\leq \left(\frac{3n}{2\pi} + 2\right) \omega\left(f; \frac{2\pi}{m_1}, \dots, \frac{2\pi}{m_n}\right) \leq \\ &\leq \left(\frac{3n}{2\pi} + 2\right) (2\pi + 1) \omega\left(f; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n}\right) \end{aligned}$$

besteht.

Betrachten wir jetzt die Transformationsfolge $T_{m_1 \dots m_n}^k$. Es ist leicht ersichtlich, dass $T_{m_1 \dots m_n}^1 = T_{m_1 \dots m_n}$ die Bedingung (9) befriedigt, ferner transformiert jede Transformation die Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$ in den Raum der trigonometrischen Polynome in x_i höchstens m_i -ter Ordnung. Setzen wir voraus, dass die partiellen Derivierten r -ter Ordnung der Funktionen existieren. Nach dem Satz 2 können wir ein trigonometrisches Polynom $T_{m_1 \dots m_n}^*$ (x_1, \dots, x_n) konstruieren, so dass

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_n) - T_{m_1 \dots m_n}^*(x_1, \dots, x_n)\| &\leq K^{**} \left(\sum_{i=1}^n \frac{2\pi}{m_i} \right)^r \\ &\sum \frac{r!}{\pi r_i!} \omega\left(\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}; \frac{2\pi}{m_1}, \dots, \frac{2\pi}{m_n}\right) \end{aligned}$$

besteht mit

$$K^{**} = \prod_{i=1}^r \left(\frac{3n}{2\pi} 2^i + 2 \right).$$

(Eingegangen: 24. März, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] CAPRA, V.: "Sull'approssimazione delle funzioni continue di due variabili mediante polinomi trigonometrici ed algebrici." *Univ. Politec. Torino. Rend. Sem. Mat.* **17** (1958) 327—346.
- [2] JACKSON, D.: "On approximation by trigonometric sums and polynomials". *Transactions Amer. Math. Soc.* **14** (1912) 491—515.
- [3] НАТАНСОН, И. П.: "О приближении к многократно дифференцируемым периодическим функциями при помощи сингулярных интегралов." *Доклады Академии Наук СССР Том. 82* 163 (1952) 337—339.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ МНОГОМЕРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

M. SALLAI

Резюме

Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n) \in C$ в области $D = \{0 \leq x_i \leq 1; i = 1, \dots, n\}$ непрерывна по каждому переменному x_1, \dots, x_n . Пусть далее $A_{m_1 \dots m_n} f$ обозначает линейное преобразование функций $f(x_1, \dots, x_n) \in C$, для которого выполняются условия (4) и (5).

Теорема 1. Тогда для $f \in C$

$$\|f(x_1, \dots, x_n) - A_{m_1 \dots m_n} f(x_1, \dots, x_n)\| \leq (\kappa_1 + \kappa_2 + 1) \omega\left(f; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n}\right),$$

где

$$\omega(f, v_1, \dots, v_n) = \max_{\substack{h_i \leq v_i \\ 0 \leq x_i \leq 1}} |f(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n) - f(x_1, \dots, x_n)|.$$

Предположим, что существуют, причем непрерывные в области D частные производные r -ого порядка функций $f(x_1, \dots, x_n)$. Пусть $A_{m_1 \dots m_n}^k$ $k = 1, 2, \dots, r+1$ последовательность линейных преобразований $A_{m_1 \dots m_n}^1 f = A_{m_1 \dots m_n} f$; $A_{m_1 \dots m_n}^k f = A^1(A_{m_1 \dots m_n}^{k-1} f)$, которая удовлетворяет условию (9).

Теорема 2. Тогда

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i-1} \binom{r+1}{i} A_{m_1 \dots m_n}^i f \right\| \leq \prod_{i=0}^r [\kappa_2(\kappa_1 + 1)^i + \kappa_1 + 1] \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \right)^r \sum_{\substack{\sum r_i = r \\ 0 \leq r_i \leq 1}} \frac{r!}{\prod r_i!} \omega\left(\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}; \frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_n} \right).$$

ON THE CIRCUITS OF FINITE GRAPHS

by
LAJOS PÓSA

§ 1.

The following three statements were proved by G. A. DIRAC: ([2] Theorem 2, 3 and 4.)

(A) *If every vertex of the graph G^1 is of valency $\geq k$ (≥ 2), then G contains a circuit having at least $k + 1$ edges.*

(B) *Let $G^{(n)}$ be a graph of n (≥ 3) vertices, and let us assume that every vertex of $G^{(n)}$ is of valency $\geq n/2$. Then G is Hamiltonian (i.e. $G^{(n)}$ has a circuit containing all vertices).*

(C) *Assume that $G^{(n)}$ is twofold connected² and every vertex is of valency $\geq k$ where $n \geq 2k$. Then $G^{(n)}$ contains a circuit of at least $2k$ edges.*

Several recent papers generalize (B) and (C). (S. [3], [4], [5], [6].) This paper contains some further generalizations and a sharpening of (A). In § 2 we show (generalizing (B)) that by a suitable sharpening of the lower bound $n/2$ for the valency of the vertices we can infer the existence of a Hamilton line which passes through certain prescribed paths. In § 3 — generalizing (A) and (C) — we show that circuits of length $\geq k + 1$ resp. $\geq 2k$ exist even if certain vertices are of valency $< k$ (in [6] we generalized (B) in this direction). In § 4 we show (Generalizing (B)) that certain conditions imply that there are $\leq j$ (j is a given integer) disjoint circuits and vertices (respectively disjoint circuits, edges and vertices), which contain every vertex of our graph.

Some notations: Vertices will be denoted by small Roman letters. The edge connecting a and b will be denoted by ab (or ba). The valency of a (i.e. the number of edges incident to a) will be denoted by $v(a)$. $a \in G$ resp. $ab \in G$ means that the vertex a resp. the edge ab is in G . The empty graph contains neither vertices nor edges. $G^{(n)}$ denotes always a graph with n vertices. $G_1 \cup G_2$ denotes the graph which consists of the vertices and edges contained in G_1 and G_2 . $P = (a_1 \dots a_n)$ denotes the path consisting of the *distinct* vertices a_1, \dots, a_n and of the edges $a_1a_2, \dots, a_{n-1}a_n$. (a_i) denotes the degenerate path which contains only the vertex a_i . $(a_i P a_j)$, $1 \leq i \leq j \leq n$ denotes the section of P

¹ In this paper we only consider graphs which do not contain loops or double edges.

² A graph $G^{(n)}$, $n \geq 3$ is called twofold connected if it is connected and has no cut point. A vertex x is called a cut point of the graph G if the omission of x and all the edges incident to x increases the number of the components of G .

between a_i and a_j . $C = (a_1 \dots a_n a_1)$, $n \geq 3$ denotes the circuit which contains the distinct vertices a_1, \dots, a_n and the edges $a_1 a_2, \dots, a_{n-1} a_n, a_n a_1$. The vertex a will also be considered as a circuit and will be denoted by (a) . The length of a path or a circuit will denote the number of its edges.

§ 2.

Henceforth a graph will be called a *path-system* if its components are non-degenerate paths. The length of a path-system is the sum of the length of its paths.

Theorem 1. Let $n \geq 3$, $1 \leq l \leq n - 2$ and $k = [(n + l + 1)/2]$. Let further $G^{(n)}$ be a graph every vertex of which has valency not less than k and let S be any path-system of length l in G . Then G has an H-line which passes through S (i.e. all the edges of S are edges of our Hamilton line).

Proof. Assume that the theorem is not true and let $G^{(n)}$ be a graph which satisfies the requirements of the theorem and which has a path-system S of length l through which there does not pass an H-line of $G^{(n)}$. Let G^* be a graph having the same vertices as $G^{(n)}$ and containing all the edges of $G^{(n)}$, and which does not contain an H-line passing through S , but if two unconnected vertices of G^* are connected by an edge then there is an H-line passing through S . (In other words G^* contradicts to our theorem and is maximal with respect to this property. We obviously obtain G^* by connecting unconnected vertices of $G^{(n)}$, since the complete graph spanned by the vertices of $G^{(n)}$ has an H-line passing through S . G^* clearly exists.)

Let a and b be two unconnected vertices of G^* , if we connect them by an edge we obtain a graph which has an H-line passing through S . This H-line clearly passes through the edge ab and hence G^* has an open H-line passing through S (an open H-line is a path which passes through all vertices of the graph) whose endpoints are a and b . Let

$$P = (a_1 \dots a_n), a_1 = a, a_n = b$$

be such an open H-line and denote by $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_p}$ ($2 = i_1 < \dots < i_p < n$) the vertices of G^* which are connected with a_1 by an edge in G^* . By our assumption $p \geq k$. If $a_{i_{a-1}} a_{i_a} \notin S$ ($2 \leq a \leq p$) then $a_{i_{a-1}} a_n \notin G^*$ (for if not then $(a_1 a_{i_a} a_{i_{a+1}} \dots a_n a_{i_{a-1}} a_{i_{a-2}} \dots a_1)$ would be an H-line of G^* which contains S). At most l of the edges $a_{i_{a-1}} a_{i_a}$ can belong to S and therefore (counting a_1 too) there are at least $p - l$ vertices in G^* with which a_n is not connected by an edge. Hence

$$v(a_n) \leq n - 1 - (p - l) \leq n - k + l - 1 < k.$$

This contradicts our assumptions and hence Theorem 1 is proved.

Now we show that Theorem 1 is best possible. Let $n \geq 3$, $1 \leq l \leq n - 2$, $k = [(n + l + 1)/2]$. The vertices of $G^{(n)}$ are a_1, a_2, \dots, a_n . The edge $a_i a_j$ ($i < j$) belongs to $G^{(n)}$ if and only if $i \leq k - 1$. Clearly every vertex of our $G^{(n)}$ has valency $\geq k - 1$. Let S be the path $(a_1 a_2 \dots a_{l+1})$. It can be shown by a simple argumentation left to the reader that $G^{(n)}$ does not contain an H-line which passes through S .

§ 3.

First we prove the following sharpening of (A) (mentioned already in § 1):

Theorem 2. *Let $n > 0$ and let us assume that for every $0 \leq i \leq k - 1$ ($k \geq 2$) the number of vertices of valency $\leq i$ of $G^{(n)}$ is $\leq i$. Then $G^{(n)}$ contains a circuit of length $\geq k + 1$.*

Proof. Consider the longest paths of $G^{(n)}$ and let

$$P = (a_1 \dots a_m), \quad m \geq 2$$

be such a longest path, for which the sum of the valencies of the endpoints $v(a_1) + v(a_m)$ is maximal. Without loss of generality we can assume $v(a_1) \geq v(a_m)$. We show $v(a_1) \geq k$. Assume that this is not true and put $v(a_1) = p < k$. Clearly all the vertices connected with a_1 are in P (for otherwise P would not be a longest path.) Let these points be

$$a_{i_1}, \dots, a_{i_p} \quad (2 = i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m).$$

By our assumption at least one of the $p + 1$ vertices

$$a_1 = a_{i_1-1}, a_{i_2-1}, \dots, a_{i_p-1}, a_m$$

has valency $> p$. From $v(a_m) \leq v(a_1) = p$ it follows that this vertex must differ from a_1 and a_m , hence $p \geq 2$. Let $v(a_{i_\alpha-1}) > p$ ($1 < \alpha \leq p$). But then $(a_{i_\alpha-1} \dots a_1 a_{i_\alpha} \dots a_m)$ is a longest path for which

$$v(a_{i_\alpha-1}) + v(a_m) > v(a_1) + v(a_m)$$

which contradicts the maximality property of P . This contradiction proves $p \geq k$. But hence the length of the circuit $(a_1 \dots a_{i_p} a_1)$ is at least $k + 1$ which completes the proof of Theorem 2.

The complete k -gon or the complete k -gon with an edge attached to it shows that in a certain sense Theorem 2 is also sharp (our graphs have k vertices of valency $\leq k - 1$ and no circuits of length $\geq k + 1$), but the question of its sharpness is not yet completely cleared up.

Now we prove the following sharpening of (C):

Theorem 3. *Let $n \geq 2k$, $k \geq 2$, $G^{(n)}$ be a twofold-connected graph. Assume further that for $i = 1, 2, \dots, k - 1$ the number of vertices of valency $\leq i$ is $\leq i - 1$. Then $G^{(n)}$ contains a circuit of length $\geq 2k$.*

Proof. I) Assume that the theorem is not true and let $G^{(n)}$ be a graph which satisfies the conditions of the theorem and for which the longest circuit has length $< 2k$. As in the proof of Theorem 1, we construct the graph G^* which does not yet contain a circuit of length $\geq 2k$, but if we connect two not connected vertices of G^* by an edge we obtain at least one circuit of length $\geq 2k$. As in the proof of Theorem 1, G^* clearly exists, and satisfies the conditions of Theorem 3, furthermore its longest path has length $\geq 2k - 1$.

Consider the longest paths of G^* and let

$$P = (a_1 a_2 \dots a_{m-1} a_m), \quad m \geq 2k$$

be such a maximal path for which $v(a_1) + v(a_m)$ is maximal. (v here denotes the valency in G^* .)

Since G^* does not contain a circuit of length $\geq 2k$, $a_1 a_m \notin G^*$. Denote by

$$a_{i_1}, \dots, a_{i_p} \quad (2 = i_1 < \dots < i_p < m)$$

and

$$a_{j_1}, \dots, a_{j_q} \quad (1 < j_1 < \dots < j_q = m - 1)$$

the vertices connected in G^* with a_1 and with a_m , resp.

II) We now prove $p \geq k$, $q \geq k$. It will suffice to show $p \geq k$. a_1 can be connected in G^* only with the vertices of P , for otherwise P would not be a longest path. Thus p is the valency of a_1 in G^* . Assume $p < k$. By our assumption at least one of the p vertices $a_{i_{p-1}}, a_{i_{p-2}}, \dots, a_{i_1}$ has valency $> p$ in G^* . Let $a_{i_{\alpha-1}}$ be such a vertex. Clearly $\alpha \neq 1$ and thus the path $(a_{i_{\alpha-1}} \dots a_2 a_1 a_{i_{\alpha}} \dots a_m)$ has the same length as P and $v(a_{i_{\alpha-1}}) + v(a_m) > v(a_1) + v(a_m)$, which contradicts the maximality property of P , hence $p \geq k$, $q \geq k$ is proved.

III) Next we show $i_p \leq j_1$. Assume $i_p > j_1$ and put

$$\min(i_\gamma - j_\delta) = \Delta; \quad i_\gamma > j_\delta, \quad 1 \leq \gamma \leq p, \quad 1 \leq \delta \leq q.$$

By our assumption $\Delta > 0$, and assume that $i_\alpha - j_\beta = \Delta$. Clearly the inner vertices of $(a_{j_\beta} P a_{i_\alpha})$ can not be connected with a_1 or a_m by an edge. Therefore the circuit (belonging to G^*)

$$C = (a_1 a_2 \dots a_{j_\beta} a_m a_{m-1} \dots a_{i_\alpha} a_1)$$

contains all the vertices a_{j_1}, \dots, a_{j_q} and except $a_{i_{\alpha-1}}$ also all the vertices $a_{i_{i-1}}, \dots, a_{i_{p-1}}$. These $p + q - 1$ vertices are all distinct, for if $j_\delta = i_\gamma - 1$ then

$$(a_1 \dots a_{j_\delta} a_m a_{m-1} \dots a_{i_\gamma} a_1)$$

would be a circuit of length $m \geq 2k$ of G^* . Thus together with a_m C contains at least $p + q \geq 2k$ vertices. This contradiction proves $i_p \leq j_1$.

IV) The following theorem is due to DIRAC ([2] Lemma 2, [1] pp. 196–197).

Let $\tilde{P} = (x_1 \dots x_s)$, $s \geq 2$ be a path of the twofold-connected graph \tilde{G} . Then there are two paths \tilde{P}_1 and \tilde{P}_2 connecting x_1 and x_s which are disjoint except for their endpoints x_1 and x_s and the common vertices of \tilde{P}_i and \tilde{P} occur in the same order in both paths ($i = 1, 2$).

Let us now apply this theorem to the path P of our graph G^* and let us choose among the pairs of paths satisfying the theorem a pair P_1 and P_2 such that their union contains a maximal number of vertices of P . Put $P_1 \cup P_2 = C$. We shall now show that C contains all the vertices a_{i_1}, \dots, a_{i_p} and a_{j_1}, \dots, a_{j_q} . It will suffice to show this for a_{i_1}, \dots, a_{i_p} . Assume $a_{i_\alpha} \notin C$ ($1 \leq \alpha \leq p$). Let g be the greatest of the indices $1, 2, \dots, i_\alpha - 1$ for which $a_g \in C$ and h the smallest of the indices $i_\alpha + 1, i_\alpha + 2, \dots, m$ for which $a_h \in C$. a_g and a_h can not belong to the same P_i ($i = 1$ or 2). For if let us say both belong to P_1 then the graph

$$P'_1 = (a_1 P_1 a_g) \cup (a_g P a_h) \cup (a_h P_1 a_m)$$

is a path and the pair P'_1, P_2 also satisfies the requirements of DIRAC's theorem, contains all the vertices of C which are contained in P , and furthermore

contains a_{i_a} too. This contradicts the maximality property of the pair P_1, P_2 . We can thus assume

$$a_g \in P_1 \quad \text{and} \quad a_h \in P_2.$$

But then the graphs

$$P_3 = (a_1 P a_g) \cup (a_g P_1 a_m) \quad \text{and} \quad P_4 = (a_1 a_{i_a} a_{i_a+1} \dots a_h) \cup (a_h P_2 a_m)$$

are paths belonging to G^* which satisfy the requirements of DIRAC's theorem. $P_3 \cup P_4$ contains all the vertices of P contained in C and also a_{i_a} , which again contradicts the maximality property of the pair P_1, P_2 . This contradiction proves our assertion.

By III) the vertices $a_{i_1}, \dots, a_{i_p}; a_{j_1}, \dots, a_{j_q}$ are all distinct except possibly $a_{i_p} = a_{j_1}$. Therefore from $p \geq k, q \geq k$ and $a_1 \in C, a_m \in C$ we obtain that C contains at least $2k + 1$ vertices. This contradicts our assumption that the greatest circuit of G^* has length $< 2k$. This completes the proof of Theorem 3.

We can show that Theorem 3 is not sharp but we have not succeeded in finding the best possible theorem here.

§ 4.

A graph will be called a *system of circuits* if its components are circuits; isolated vertices will be regarded as circuits. If the system of circuits T contains every vertex of G , we say that T covers G .

Theorem 4. Let $n \geq 5, 1 \leq j \leq n - 4, k = [(n - j + 2)/2]$. Assume that for $i = 1, \dots, k - 1$ the number of vertices of $G^{(n)}$ of valency $\leq i$ is at most $i - 1$. Then $G^{(n)}$ is covered by a system T containing at most j circuits.

Remark. If $j = 1$ then Theorem 4 is identical with the sharpening of (B) proved in [6].

The proof of Theorem 4 depends on the following

Lemma. Let $n \geq 2k, k \geq 3$. Assume that for every $i = 1, \dots, k - 1$ the number of vertices of $G^{(n)}$ of valency $\leq i$ is at most $i - 1$. Then either $G^{(n)}$ contains a circuit of length $\geq 2k$, or it contains two circuits having disjoint vertices, the sum of whose lengths is $\geq 2k + 1$.

Proof. Assume that $G^{(n)}$ contradicts the theorem. Then by Theorem 3 $G^{(n)}$ can not be twofold connected and hence must contain two endlobes.³

Let G_1 and G_2 be two endlobes. By our assumptions every vertex of G has valency ≥ 2 , thus G_i ($i = 1, 2$) has at least three vertices. We define the vertices a_i ($i = 1, 2$) as follows:

If G_i contains a cutpoint of $G^{(n)}$ then let a_i be this cutpoint. If G_i does not contain a cutpoint of $G^{(n)}$ then a_i is an arbitrary vertex of G_i . The valency of every vertex of G_1 (with the possible exception of a_1) in the graph G_1 is the same as its valency in $G^{(n)}$. Therefore for $i = 0, 1, \dots, k - 1$ the number of vertices in G_1 of valency $\leq i$ is at most i . By Theorem 2 G_1 contains a circuit C_1 of length $\geq k + 1$. Let G_2^* be the graph obtained from G_2 by omitting

³ The lobes of a graph which is not connected are the lobes of its components. The *endlobes* are the lobes which contain at most one cutpoint of the graph (s. [5] p. 88).

the vertex a_2 and all the edges incident to it. Clearly G_2^* is non-empty and the valency of every vertex in G_2^* is by at most one smaller than the valency of the same vertex in $G^{(n)}$. Hence by Theorem 2 G_2^* contains a circuit C_2 of length $\geq k$. C_1 and C_2 are disjoint and the sum of their lengths is $\geq 2k + 1$, which proves the lemma.

The proof of Theorem 4 follows easily from the lemma. Assume that $G^{(n)}$ satisfies the requirements of our theorem. If $j = 1$ the theorem follows from the theorem stated in our remark. Assume thus that $j \geq 2$. Then $n \geq 2k$, $k \geq 3$, thus by our lemma $G^{(n)}$ contains either a circuit C of length $\geq 2k$ or two disjoint circuits C_1 and C_2 the sum of whose lengths is $\geq 2k + 1$. Let \tilde{T} be either C or $C_1 \cup C_2$. Then \tilde{T} together with the vertices of $G^{(n)}$ not belonging to \tilde{T} give a system of $\leq j$ circuits which covers $G^{(n)}$, hence Theorem 4 is proved.

Finally we prove a covering theorem which differs from Theorem 4 inasmuch as we allow in the covering besides circuits and isolated vertices also "isolated edges". A set a_1, \dots, a_m ($m \geq 1$) of vertices of G is said to be *independent* if no two of them are connected by an edge. The maximal number of independent vertices is denoted by $\varphi(G)$.

Theorem 5. *Let G be a non-empty graph. Then it always contains a covering system of disjoint circuits, edges and vertices having at most $\varphi(G)$ members.*

Proof. We use induction with respect to $\varphi(G)$. If $\varphi(G) = 1$, G is complete and can be covered by one circuit or an edge or a vertex. Assume that the theorem holds if $\varphi(G) \leq j - 1$ ($j > 1$) and let $\varphi(G) = j$.

Assume that G has n vertices. Let

$$P = (a_1 \dots a_p) \quad (p \geq 1)$$

be a longest path of G . If $p = 1$, G consists of $n = j$ isolated vertices, hence our theorem is trivial. Assume thus $p > 1$. As stated previously, a_1 can be connected (by an edge) only with the vertices of P . Denote by

$$a_{i_1}, \dots, a_{i_q} \quad (2 = i_1 < \dots < i_q, q \geq 1)$$

the vertices connected with a_1 . Omit from G the vertices a_1, a_2, \dots, a_{i_q} and the edges incident to them, and denote the remaining graph by G' . If G' is empty then $q > 1$ and the circuit $(a_1 \dots a_{i_q} a_1)$ covers G . If G' is non-empty then a_1 is not connected with any vertex of G' , hence $\varphi(G') < \varphi(G)$. By our induction hypothesis G' can be covered by a covering system having at most $\varphi(G')$ components and together with $(a_1 \dots a_{i_q} a_1)$ (or if $q = 1$ with the "edge" $(a_1 a_2)$) we obtain a covering system having at most $1 + \varphi(G') \leq \varphi(G)$ components, which completes our proof.

A graph whose components are triangles show that Theorem 5 is best possible.

(Received June 9, 1963)

REFERENCES

- [1] BERGE, C.: *Théorie des graphes et ses applications*. Paris, 1958.
- [2] DIRAC, G. A.: "Some theorems on abstract graphs". *Proc. London Math. Soc.* (3), **2** (1952) 69—81.
- [3] ERDŐS, P.—GALLAI, T.: "On maximal paths and circuits of graphs". *Acta Math. Sci. Hung.* **10** (1959) 337—356.
- [4] ORE, O.: "Note on Hamilton circuits". *Amer. Math. Monthly* **67** (1960) 55.
- [5] ORE, O.: *Theory of graphs*. (Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 38, 1962)
- [6] PÓSA, L.: "A theorem concerning Hamilton lines". *MTA Mat. Kut. Int. KözL.* **7** (1962) 225—226.

ОБ ОКРУЖНОСТЯХ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

L. PÓSA

Резюме

Автор доказывает для графов, не содержащих петель и многократных рёбер теоремы, из которых он приводит следующие:

Теорема 1. Пусть будет $n \geq 3$, $1 \leq l \leq n - 2$, $k = [(n + l + 1)/2]$ а G — граф с n вершинами, такой что в нём любая вершина имеет степень $\geq k$. Далее, пусть S — система путей в графе G , не содержащих попарно общие вершины и содержащая l рёбер графа G . Тогда существует в G Гамильтонова линия, содержащая все рёбра от S .

Теорема 3. Пусть $n \geq 2k$, $k \geq 2$, и G двухсвязный граф, содержащий n вершин, такой, что число вершин степени $\leq i$ в нём не более $i - 1$ для любого значения $i = 1, 2, \dots, k - 1$. Тогда G содержит по крайней мере одну окружность, состоящую из $2k$ рёбер.

Теорема 4. Пусть $n \geq 5$, $1 \leq j \leq n - 4$, $k = [(n - j + 2)/2]$ и G граф, содержащий n вершин, в котором число вершин степени $\leq i$ не более $i - 1$ для любого значения $i = 1, 2, \dots, k - 1$. Тогда существует в G система окружностей попарно не содержащих общих вершин, которая состоит из составляющих не более j и которая содержит все вершины графа G (здесь рассматривается одна единственная вершина также как окружность).

FILLING OF A DOMAIN BY DISCS

by

ALADÁR HEPPES

As it is well known the area a and perimeter p of a plane domain¹ satisfy the so called isoperimetric inequality $p^2 \geq 4\pi a$, and equality holds only for a circle. This statement has two meanings: on the one hand, of the domains of given perimeter the circle has the greatest possible area, on the other hand, of the domains of given area the circle has the least possible perimeter. Of the numerous variants of the isoperimetric inequality we mention only the following result of BESICOVITCH [1]:

Let C be a convex domain and $C(r)$ the union of the points of those circles of radius r which can be placed into C . Then $C(r)$ has of all isoperimetric discs lying in C the greatest area, and $C(r)$ has of all equiareal discs lying in C the least perimeter.

In the case when C is a convex polygon, $C(r)$ — the outer parallel domain of radius r of the inner parallel domain of radius r of C — arises from C by rounding off each corner by circular arcs which can be put together to form one circle of radius r (Fig. 1). Such a domain we shall call a *smooth polygon*.

Let R be a regular hexagon of unit area, $a_6(p)$ the upper bound of the areas of the discs of perimeter $\leq p$ contained in R and $p_6(a)$ the lower bound of the perimeters of the discs of area $\geq a$ contained in R . It is clear that for small values of p (for small values of a) the bound $a_6(p)$ ($p_6(a)$) is attained by a circle, on the other hand, in view of the theorem of BESICOVITCH, for values of p (of a) greater than the perimeter (area) of the incircle of R the extremal domain will be a smooth hexagon. An elementary computation shows that

$$a_6(p) = \begin{cases} \frac{p^2}{4\pi} & \text{for } \frac{p^2}{4\pi} \leq d \\ \frac{p^2}{4\pi} \cdot \frac{d}{1-d} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{d \cdot \frac{p^2}{4\pi}}} - 1 - \frac{1}{\frac{p^2}{4\pi}} \right) & \text{for } d \leq \frac{p^2}{4\pi} \leq \frac{1}{d} \\ 1 & \text{for } \frac{1}{d} \leq \frac{p^2}{4\pi} \end{cases}$$

¹ Both words „domain” and „disc” will be used for a bounded closed set the inner points of which form a simply connected set.

and

$$p_6^2(a) = \begin{cases} 4\pi a & \text{for } a \leq d \\ 4\pi a \left\{ \sqrt{\frac{1}{d} \cdot \frac{1}{a}} - \sqrt{\left(\frac{1}{d} - 1\right)\left(\frac{1}{a} - 1\right)} \right\}^2 & \text{for } d \leq a \leq 1 \end{cases}$$

where the constant $d = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ equals the density of the densest packing of equal circles in the plane², i.e. the ratio of the area of a circle and that of the circumscribed regular hexagon. (For $\frac{p^2}{4\pi} \leq \frac{1}{d}$ $a_6(p)$ and $p_6(a)$ are inverse functions.)

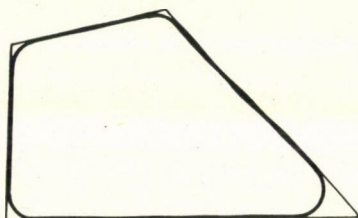


Fig. 1.

FEJES TÓTH extended the investigation of the isoperimetric problem, concerning with a single domain, to the study of a certain set of domains and raised the following two problems:

Problem A. Find the upper bound of the average area a of n non-overlapping discs, each of perimeter $\leq p$, lying in a given domain³ D .

Problem P. Find the lower bound of the average perimeter p of n non-overlapping discs, each of area $\geq a$ $\left(a \leq \frac{D}{n}\right)$ lying in a given domain D .

As it is quite hopeless to solve these problems in such a general form they were investigated under several restrictions. The problem of the determination of the asymptotic behaviour of the extremal configuration for great values of n , may be consider as the fundamental isoperimetric problems for two-dimensional cellaggregates. For convex discs these questions were investigated by FEJES TÓTH [2] (Problem A) and by FEJES TÓTH and the author [3] (Problem P). Their results are summarised in the following theorems⁴

Theorem A. The average area a of n convex discs, each of perimeter $\leq p$ lying in a convex hexagon⁵ H of area n without mutual overlapping, is not greater than the greatest possible area of one disc of perimeter $\leq p$ lying in a regular hexagon of unit area, i.e.

$$a \leq a_6(p).$$

² Cf. L. FEJES TÓTH: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953.

³ We denote a domain and its area with the same symbol.

⁴ In the original form of the above theorems the discs are supposed to be isoperimetric (Theorem A) and equiareal (Theorem P), respectively, but the original proofs remain valid without any modification for these slightly more general statements too.

⁵ Hexagon in a wider sense: polygon having at most six vertices.

Theorem P. *The average perimeter p of n convex discs, each of area $\geq a$ ($a \leq 1$), lying in a convex hexagon⁵ H of area n without mutual overlapping, is not smaller than the least possible perimeter of one disc of area $\geq a$ lying in regular hexagon of unit area, i.e.*

$$p \geq p_6(a).$$

Equality holds in the following cases: (i) H is a regular hexagon containing one single disc, namely the corresponding smooth hexagon, (ii) the discs are congruent circles (in both theorems) and (iii) — in Theorem A — when they fill H without gaps. However these bounds can be approximated with an arbitrary exactitude for great values of n . Since for great values of n the special shape of the given domain is irrelevant these theorems inform us about the asymptotic behaviour of the extremal configurations of the discs in an arbitrary domain. It is interesting to observe that in spite of the fact that the arrangements to be compared were originally entirely irregular a single optimum-requirement implies the congruence of the discs as well as their regular shape and arrangement.

Now the question arises whether Theorems A and P remain valid without the restriction of the convexity of the discs.

We shall show that in the case of Theorem A the answer is affirmative. This is expressed in

Theorem A*. *The average area a of n discs, each of perimeter $\leq p$, lying in a convex hexagon H of area n without mutual overlapping, is not greater than the greatest possible area of a disc of perimeter $\leq p$ lying in a regular hexagon of unit area, i.e.*

$$a \leq a_6(p).$$

We also shall prove a variant of Theorem A*:

Theorem A.** *Let U be the union of n faces of a tessellation consisting of regular hexagons of unit area. The average area a of n discs, each of perimeter⁶ $\leq p \leq \sqrt{8\sqrt{3}} = 3,72 \dots$, lying in U without mutual overlapping, attains its maximum in the case when all the discs are congruent, namely circles or smooth hexagons of perimeter p , inscribed in the faces of the tessellation contained in U , i.e.*

$$a \leq a_6(p).$$

The proofs of Theorem A* and Theorem A** are based on the proof of Theorem A and on three lemmas listed below.

We shall say that two closed convex domains C_1 and C_2 intersect simply if they satisfy one of the following conditions:

- (i) C_1 and C_2 have no inner points in common,
- (ii) one of them is completely covered by the other, or
- (iii) C_1 and C_2 overlap and the boundary of their (convex) intersection can be split up into two non-overlapping connected arcs, one belonging to the boundary of C_1 and the other to that of C_2 .

Lemma 1. *If two discs, D_1 and D_2 have no inner points in common then the convex hull of D_1 and that of D_2 intersect simply.*

⁶ The constant $\sqrt{8\sqrt{3}}$ is the perimeter of a hexagonal face of the tessellation.

Let C_1 and C_2 be the convex hulls of D_1 and D_2 . In contrary to our statement we suppose that C_1 and C_2 do not intersect simply. Then they have inner points in common but none of the discs is completely covered by the other. Thus the boundary B of the union $C_1 \cup C_2$ consists of the common points of the two boundaries (single points or closed arcs) and of the open "proper boundary arcs" of C_1 and C_2 , respectively, consisting of the boundary points of C_1 outside C_2 and the boundary points of C_2 outside C_1 . Since C_1 and C_2 do not satisfy (iii) there exist (at least) two pairs of proper boundary arcs belonging to C_1 and C_2 , respectively, and having the property that each of this pairs separates the arcs of the other pair on B . It is easy to see that to each proper boundary arc there exist a supporting line, which does not meet the other disc. On the other hand each supporting line of the convex hull of a connected bounded set contains at least one of the boundary points of the original set. Consequently B contains two pairs of points belonging alternately to the boundaries of the original discs D_1 and D_2 . Thus both pairs of their four different points can be connected by a single arc through the interior of D_1 and D_2 , respectively. But this contradicts to the fact that D_1 and D_2 have no inner points in common.

Lemma 2. *Suppose that any two of the convex discs C_1, \dots, C_m intersect simply and, that none of them is completely covered by the others. Then the discs can be contracted into non-overlapping discs $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_m$ ($\bar{C}_i \subset C_i$, $i = 1, \dots, m$), the union of which equals the union of C_1, \dots, C_m .*

The proof rests on the following lemma of BAMBAH and ROGERS (see [4] Lemma 1) which we quote without proof:

Lemma 3. *Let S and T be two convex discs which intersect simply. Suppose that a segment divides S into two sets $S^{(1)}$ and $S^{(2)}$. Then $S^{(1)}$ and T intersect simply; except possibly when the segment divides T into sets $T^{(1)}$ and $T^{(2)}$, one of which is contained in $S^{(2)}$. In this latter case $S^{(1)}$ and $T^{(1)}$ intersect simply.*

Lemma 2 is trivial if no pair of the discs have inner points in common. Therefore we suppose that there exist two discs, say C_i and C_j , which overlap. Since the discs intersect simply we can find (according to (iii)) two points P_1 and P_2 on the intersection of the boundaries of C_i and C_j , which split the boundary of the union $C_i \cup C_j$ into two non-overlapping connected arcs B_i and B_j belonging to the boundary of C_i and C_j , respectively. Thus the segment $P_1 P_2$ divides $C_i \cup C_j$ into the non-overlapping discs $C_i^{(1)}$ and $C_j^{(1)}$ ($C_i^{(1)} \subset C_i$ and $C_j^{(1)} \subset C_j$). Replacing now C_i by $C_i^{(1)}$ and C_j by $C_j^{(1)}$ it may happen that some of the new discs do not intersect simply (Fig. 2). For instance, let C_k be a disc which does not intersect $C_j^{(1)}$ simply. Then, referring to Lemma 3, $P_1 P_2$ divides C_k into two parts, one of which is contained in $C_j^{(1)}$ and the other, $C_k^{(1)}$, intersects $C_j^{(1)}$ (and $C_i^{(1)}$) simply. In this case we replace C_k by $C_k^{(1)}$. Proceeding in this way step by step, we can construct a new system of convex discs, intersecting simply one another. In each step of this process the union of the discs remains unchanged, but the number of the overlapping pairs of discs decreases. Thus in at most $\binom{m}{2}$ steps we obtain the desired system $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_m$. (Since, by assumption, none of the original discs were completely covered by the others, all the discs $\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_m$ really occur.)

After these preparations we can easily prove Theorem A*. Let D_1, \dots, D_n be n non-overlapping discs, each of perimeter $\leq p$, contained in the convex

hexagon H . Instead of D_1, \dots, D_n , consider their convex hulls C_1, \dots, C_n . In consequence of Lemma 1, C_1, \dots, C_n intersect simply. If some of them are covered by the others we cancel them one after another. Finally we obtain a subset of the C_i 's consisting of $m \leq n$ discs, none of which is covered by the others and having the same union as originally. Then, using Lemma 2, we can construct, a system of m non-overlapping convex discs, each of perimeter

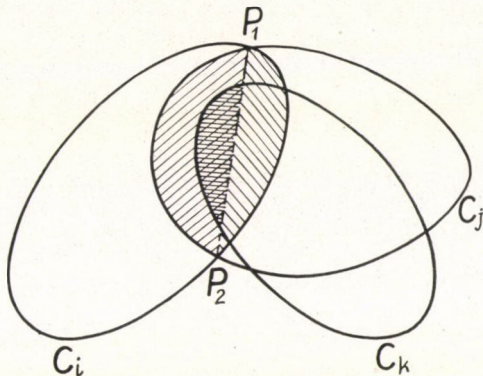


Fig. 2.

$\leq p$, lying in H and having a union U_m , which contains each of the original discs. Applying Theorem A to these convex discs, we have

$$\frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n} \leq \frac{U_m}{n} \leq a_6(p).$$

Theorem A** is trivial in the case, when all the discs are circles of perimeter p or, more generally, if $p \leq \frac{2\pi}{\sqrt{12}}$. Thus we restrict ourselves to the

case $p > \frac{2\pi}{\sqrt{12}}$. We shall show that the problem may be reduced to the case

of cellaggregates consisting of convex cells. The rest of the proof is similar to the proof of Theorem A.

Let \mathcal{T} be a tessellation consisting of regular hexagons of unit area and U the union of n cells of \mathcal{T} . Without loss of generality we may suppose that U is connected. Let U' denote the union of U and the cells of \mathcal{T} adjacent to U (Fig. 3). Being given n discs D_1, D_2, \dots, D_n , each of perimeter $\leq p$, lying in U without mutual overlapping, we have to show that the average area of these discs is not greater than $a_6(p)$. For this purpose we place into each cell of U' not contained in U a smooth hexagon of perimeter p and area $a_6(p)$. We denote these new discs with C_{n+1}, \dots, C_{n+k} . We have only to show that the average area of the discs $D_1, \dots, D_n, C_{n+1}, \dots, C_{n+k}$ is not greater than $a_6(p)$.

Denote the convex hulls of the discs D_1, \dots, D_n with C_1, \dots, C_n . It is not difficult to show that each disc C_i ($i \leq n$) lies in U' : Let c_1 be the circumference of a cell of \mathcal{T} not contained in U' and c_2 the concentric circle of double radius (Fig. 4). Since D_i lies outside of c_2 and its perimeter is not greater than that of a cell of \mathcal{T} ($p \leq \sqrt{8\sqrt{3}}$), the convex hull C_i of D_i can not contain a chord of c_2 longer than $\frac{\sqrt{8\sqrt{3}}}{2}$, and therefore C_i can not intersect the cell lying in c_1 ($i = 1, \dots, n$).

In view of Lemma 1 any pair of C_1, \dots, C_{n+k} intersect simply. Then, referring to Lemma 2 and using similar considerations as in the proof of Theorem A*, we can construct a new system of $m \leq n + k$ non-overlapping convex discs C'_1, \dots, C'_m , each of perimeter $\leq p$, contained in U' and covering together the original discs C_1, \dots, C_{n+k} .

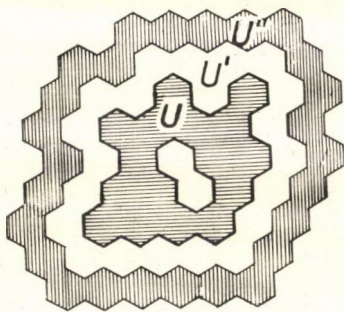


Fig. 3.

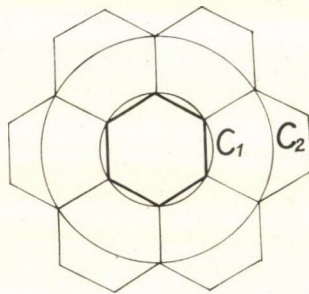


Fig. 4.

First of all we join to the domain U' the neighbouring cells of \mathcal{T} obtaining the domain U'' . Just as above, we place into each new adjoined hexagon a smooth hexagon of perimeter p (and consequently of area $a_6(p)$). We denote these new discs with $C'_{m+1}, \dots, C'_{m+l}$.

Let us now "blow up" the discs C'_1, \dots, C'_{m+l} , preserving their convexity and the property of neither overlapping nor stretching out of U'' , obtaining $m + l$ convex polygons P_1, \dots, P_{m+l} having v_1, \dots, v_{m+l} sides, respectively. Although, in general, these polygons do not fill out U'' without gaps, they may be considered from a combinatorial point of view as to form a "polygonal decomposition" of U'' . We proceed to prove that the average number of sides $\bar{v} = \frac{v_1 + \dots + v_{m+l}}{m + l}$ of these polygons does not exceed 6.

For this purpose we shall compare the irregular decomposition with the regular hexagonal decomposition of U'' . In the hexagonal decomposition let e denote the number of the edges, e_b the number of the edges on the boundary of U'' , v the number of the vertices and v_2 the number of the vertices in which only two edges meet. Let e', e'_b, v' and v'_2 denote the corresponding

⁷ Cf. L. FEJES TÓTH [2].

data of the irregular polygonal decomposition. Counting the edges and vertices in both decompositions we obtain

$$6(n + k + l) = 2e - e_b, \quad \bar{v}(m + l) = 2e' - e'_b,$$

$$3v - v_2 = 2e \quad \text{and} \quad 3v' - v'_2 \leq 2e'.$$

As a consequence of the construction of U'' the polygons, lying along the boundary of U'' , of the irregular decomposition coincide with the cells of the regular decomposition. It follows from this that $e_b = e'_b$ and $v_2 = v'_2$. Using Euler's formula

$$(n + k + l) + v = e + 1 \quad \text{and} \quad (m + l) + v' = e' + 1$$

we obtain from the above relations that

$$e_b + 6 = 2v_2 \quad \text{and} \quad e_b + 6 \leq 2v_2 + (6 - \bar{v})(m + l)$$

which involves the desired inequality $6 \geq \bar{v}$.

Now we make use of a known inequality. Let C be a disc of perimeter $\leq p$ contained in a convex polygon of given area P and given number of side v . Then $C \leq F(P, v)$, where the function $F(P, v)$ is defined by

$$F(P, v) = \begin{cases} P & \text{for } P < \frac{p^2}{4v \operatorname{tg} \frac{\pi}{v}} \\ \frac{p \sqrt{Pv \operatorname{tg} \frac{\pi}{v} - \frac{1}{4}p^2} - \pi P}{v \operatorname{tg} \frac{\pi}{v} - \pi} & \text{for } \frac{p^2}{4v \operatorname{tg} \frac{\pi}{v}} \leq P \leq \frac{p^2}{4\pi^2} v \operatorname{tg} \frac{\pi}{v} \\ \frac{p^2}{4\pi} & \text{for } \frac{p^2}{4\pi^2} v \operatorname{tg} \frac{\pi}{v} < P. \end{cases}$$

In the middle interval $F(P, v)$ equals the area of a smooth polygon of perimeter p lying in a regular v -gon of area P . Since $F(P, v)$ is a non-decreasing function both of P and v , and as a function of two variables, it is concave,⁸ we have, in view of Jensen's inequality

$$\frac{\sum_{i=1}^N C'_i}{N} \leq \frac{\sum_{i=1}^N F(P_i, v_i)}{N} \leq F\left(\frac{\sum_{i=1}^N P_i}{N}, \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{N}\right) \leq F(1, 6) = a_6(p),$$

where, for $i = m + l + 1, \dots, n + k + l = N$, $C'_i = 0$, $P_i = 0$ and $v_i = 6$. Equality holds only when C'_1, \dots, C'_N are regular hexagons lying in the cells of \mathcal{C} .

Let us return now to Problem P . It admits of no doubt that also Theorem P continues to hold for not necessarily convex discs, but the proof of this conjecture seems to involve considerable difficulties. These difficulties are

⁸ For the details of the proof of this statement see L. FEJES TÓTH [2] II and III.

implied in the fact that the best arrangement generally contains also not convex discs. Let us divide, for instance, a regular triangle into two parts of equal area by a shortest arc. It is easy to show⁹ that this arc is an arc of circle centered at a vertex of the triangle. Thus one of the parts is not convex.

More generally, it is not difficult to show that the shortest net, dividing a (plane or spherical) domain into partial domains each of given area, consists of arcs of circle (of finite or infinite radius) meeting another at an angle equal to $\frac{2\pi}{3}$ and meeting the boundary of the domain at an angle not less than $\frac{\pi}{2}$.¹⁰

This necessary condition yields

Theorem S. *For $n \neq 2, 3, 4, 6, 12$, the shortest net dividing the sphere into n parts of equal area contains a non-convex mesh.*

Suppose that for $n = k > 1$ the shortest net consists of convex meshes i.e. convex spherical polygons. Then, in view of the equality of the angles, the area of a polygon depends only on the number of its sides. Thus each polygon must be a $\left(6 - \frac{12}{k}\right)$ -gon, and, consequently, $\frac{12}{k}$ must be an integer.

It is almost trivial that for $n = 2$ and $n = 3$ the extremal net consists of a great circle and of three half great circles meeting another at equal angles. It would be interesting to show that for $n = 4, 6$ and 12 the best net is the spherical net of a regular tetrahedron, hexahedron and dodekahedron, respectively. These nets play an important role in an analogous problem discussed by L. FEJES TÓTH [5]. He has given an estimation for the length of a spherical net consisting of n convex meshes of equal area. His estimation is exact in the cases $n = 2, 3, 4, 6, 12$ for the nets listed above.

(Received June 10, 1963)

REFERENCES

- [1] BESICOVITCH, A. S.: "Variants of a classical isoperimetric problem". *Quart. J. Math. Oxford. Ser. (2)* **3** (1952) 42—49.
- [2] FEJES TÓTH, L.: "Filling of a domain by isoperimetric discs". *Publ. Math. Debrecen* **5** (1957) 119—127.
- [3] FEJES TÓTH, L.—HEPPES, A.: "Filling of a domain by equiareal discs". *Publ. Math. Debrecen* **7** (1960) 198—203.
- [4] BAMBAH, R. P. and ROGERS, C. A.: "Covering the plane with convex sets". *J. London Math. Soc.* **27** (1952) 304—314.
- [5] FEJES TÓTH, L.: „Über das kürzeste Kurvennetz, das eine Kugeloberfläche in flächengleiche Teile zerlegt". *Mat. és Természettud. Ért.* **62** (1943) 349—354.

⁹ Consider the regular hexagon A_1, A_2, \dots, A_6 with center A_0 . Let α and β two arcs joining the sides $A_0 A_1$ and $A_0 A_2$ of the triangle $A_0 A_1 A_2$ and dividing $A_0 A_1 A_2$ into two parts of equal area; let α be a circular arc centered at A_0 and β an arbitrary one. Successive reflections in the lines $A_0 A_2, A_0 A_3, \dots, A_0 A_6$ complete α to a circle and β to a closed curve, both bounding a region the area of which equals the half area of the hexagon $A_0 A_1 \dots A_6$. Since the circle has less perimeter, α is shorter than β . This ingenious proof due to E. MOLNÁR.

¹⁰ Hier we do not intend to discuss the problem of the existence of the shortest net.

ЗАПОЛНЕНИЕ ОБЛАСТИ ПЛОСКИМИ ФИГУРАМИ

А. НЕРПЕС

Резюме

В качестве продолжения исследований, начатых несколько лет назад ([2], [3]) автор доказывает следующую теорему, а также другие теоремы.

Теорема. Если в области, построенной как соединение n регулярных шестиугольников, являющихся составляющими мозаиками, помещены n друг друга не перекрывающих плоских фигур, причём периметр каждой из них не более p , тогда среднее значение площадей этих плоских фигур не может быть больше максимума площадей плоских фигур с периметрами не более p , помещаемыми в одном составляющем (шестиугольнике) мозаики.

Эту оценку, очевидно, нельзя улучшить; ведь максимума можно достичь, если в каждом составляющем мозаики поместить плоскую фигуру возможно наибольшей площади. Следовательно, экстремальная система состоит — соответственно значениям p — из конгруэнтных окружений, или же из шестиугольников, окруженных посредством конгруэнтных дуг окружностей, помещенных в первоначальных составляющих мозаики.

KRITISCHE GRAPHEN II

von
T. GALLAI

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist die Fortsetzung einer früheren, unter dem gleichen Titel (s. [7]) erschienener Arbeit. Wir werden diesen ersten Teil durch das Zeichen KG I anführen. Es werden die Bezeichnungen von KG I benützt und die Abschnitte laufend numeriert. (Die Verweiszahlen (m.n) mit $m < 6$ verweisen also stets auf KG I.) Wir haben in KG I bewiesen, daß diejenigen Teilgraphen der k -kritischen Graphen, die durch die Punkte $(k-1)$ -ten Grades gespannt sind, eine sehr einfache Struktur besitzen. In der vorliegenden Arbeit werden wir beweisen, daß die Struktur der kritischen (punktkritischen) Graphen mit »kleiner« Punktzahl eine gewisse Einfachheit zeigt. Die k -kritischen Graphen mit kleinster Punktzahl sind die vollständigen k -Graphen. G. A. DIRAC hat gezeigt, daß k -kritische Graphen mit $k+1$ Punkten nicht existieren (s. [3] S. 463). Er hat ferner bewiesen, daß es (isomorphe Graphen als nicht verschieden betrachtend) genau einen k -kritischen ($k \geq 3$) Graphen mit $k+2$ Punkten gibt, und daß dieser aus einem Fünfeck und aus einem von dem Fünfeck fremden vollständigen $(k-3)$ -Graphen in solcher Weise zustande kommt, daß man jeden Punkt des Fünfecks mit jedem Punkt des vollständigen Graphen verbindet (s. (2.1); [3] S. 463). Dieser, wie auch der vollständige k -Graph sind zerlegbar.¹ Die DIRAC'schen Graphen von (2.14) sind nichtzerlegbare k -kritische Graphen. Diese haben $2k-1$ Punkte. Nun hat sich gezeigt, daß $2k-1$ die kleinste Punktzahl mit dieser Eigenschaft ist. Es gilt nämlich der folgende

Satz ($E_2.1$). *Ein k -kritischer ($k \geq 2$) Graph mit weniger als $2k-1$ Punkten ist stets zerlegbar.*

Dieser Satz bildet das Hauptergebnis unserer Arbeit (s. (8.17)). Aus diesem, bzw. aus gewissen Verallgemeinerungen von diesem kann man weitere Sätze über kritische Graphen erhalten. Es ergibt sich z. B. der folgende Satz (s. (8.17)):

Satz ($E_2.2$). *Es sei $k \geq 3$ und $n < \frac{5}{3}k$. Dann kann man in jedem n -punktigen k -kritischen Graphen $\left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{5}{3}k - n \right) \right\}$ Punkte² so auswählen, daß jeder*

¹ Wir haben in KG I einen Graphen zerlegbar genannt, wenn die Menge der Punkte des Graphen so in zwei nichtleere Teilmengen zerlegt werden kann, daß je zwei zu den verschiedenen Teilmengen gehörige Punkte durch eine Kante des Graphen verbunden sind (s. (2.2)).

² $\left\{ \frac{p}{q} \right\}$ bezeichnet jene kleinste ganze Zahl, die $\geq \frac{p}{q}$ ist.

ausgewählte Punkt mit allen übrigen $n - 1$ Punkten des Graphen verbunden ist. Ist k durch 3 teilbar, so existiert ein k -kritischer Graph mit $\frac{5}{3}k$ Punkten, in dem es keinen solchen Punkt gibt, der mit allen übrigen Punkten des Graphen verbunden wäre.

Wir haben uns schon in KG I mit der Bestimmung der minimalen Kantenanzahl k -kritischer Graphen beschäftigt (s. Abschnitt 4). Im Falle $\pi(G) \leq 2k - 1$ ermöglicht jetzt der Satz ($E_2.1$) bzw. die erwähnten Verallgemeinerungen von diesem die vollständige Lösung des Problems. Es besteht nämlich folgender

Satz ($E_2.3$). *Es sei $k \geq 3$, $2 \leq p \leq k - 1$ und der k -kritische Graph G besitze $k + p$ Punkte. Dann gilt für die Kantenanzahl $\nu(G)$ von G*

$$\nu(G) \geq \frac{1}{2} (k^2 + (2p - 1)k - p^2 - p - 2).$$

Das Gleichheitszeichen ist dann und nur dann gültig, wenn G durch die folgende Konstruktion hergestellt werden kann: Man nimmt einen $\Gamma_{j_1 j_2}^{p+1}$ -Graphen (s. (2.14)) G_1 und einen von G_1 fremden vollständigen $(k - p - 1)$ -Graphen G_2 und verbindet jeden Punkt von G_1 mit jedem Punkt von G_2 .

Die Fälle $p = 2, 3, 4$ und $k = 1$ des Satzes ($E_2.3$) waren schon früher von DIRAC erledigt worden (s. [4] S. 443, [5] S. 184). Bezüglich diesen ist nur jene Behauptung neu, daß im Falle $p = k - 1$ außer den angegebenen keine anderen extremen Graphen existieren. Es sei bemerkt, daß DIRAC bezüglich den Fällen $4 < p < k - 1$ für $\nu(G)$ mehrere Abschätzungen angegeben hat, und daß in diesen Untersuchungen die extremen Graphen von ($E_2.3$) schon alle vorgekommen sind (s. [3], [4]).

Mit Hilfe der erwähnten Sätze kann man auch für beliebige (nicht unbedingt kritische) Graphen Färbungssätze erhalten. Der folgende Satz enthält ($E_2.3$), ist jedoch nicht viel allgemeiner als dieser (s. (9.4)).

Satz ($E_2.4$). *Es sei $k \geq 3$ und $1 \leq p \leq k - 1$. Ist dann der Grad eines jeden Punktes des $(k + p)$ -punktigen Graphen G größer als $k - 3$, und enthält G keinen vollständigen k -Graphen (als Teilgraphen), so folgt aus*

$$\nu(G) \leq \frac{1}{2} (k^2 + (2p - 1)k - p^2 - p - 2),$$

daß G $(k - 1)$ -färbbar ist, vorausgesetzt, daß G mit keinem der in ($E_2.3$) beschriebenen extremen Graphen zusammenfällt.

Die Sätze ($E_2.1$), ($E_2.2$) und ($E_2.3$) sind offensichtlich auch für punktkritische Graphen richtig. Wir werden sie gleich für diese Graphen bekommen (s. Abschnitt 8), und zwar in solcher Weise, daß wir die entsprechenden »Deckungssätze« über ihrer komplementären³ Graphen beweisen. Diejenige Punkte eines zulässig gefärbten Graphen G , die gleiche Farben erhalten haben, spannen nämlich im komplementären Graphen \bar{G} vollständige Graphen. Daher entsprechen den zulässigen Färbungen von G solche »Deckungen« von \bar{G} , wo die »Deckgraphen« paarweise fremde, vollständige Graphen sind

³ Der komplementäre Graph \bar{G} eines nichtleeren Graphen G besitzt dieselben Punkte wie G , und zwei Punkte sind in \bar{G} dann und nur dann verbunden, wenn sie in G nicht verbunden sind.

(die Deckgraphen müssen Teilgraphen des bedeckten Graphen sein und müssen zusammen alle Punkte des bedeckten Graphen enthalten (s. (6.1)).⁴ In dieser Weise entspricht jedem »Färbungsproblem« ein »Deckungsproblem« und umgekehrt. Es hat sich nun herausgestellt, daß bei »kleinen« Punktzahlen die Deckungsprobleme einfacher behandelt werden können, als die Färbungsprobleme. Wir bemerken noch, daß die Beweise unserer Deckungssätze auf gewissen Ergebnissen der Theorie der alternierenden Züge beruhen.

6. Weitere Erklärungen. Einige vorbereitende Behauptungen

(6.1) In dieser Arbeit verstehen wir unter einer *Deckung* des Graphen G einen solchen Teilgraphen von G , dessen Komponenten alle vollständige Graphen sind und der sämtliche Punkte von G enthält. Die Komponenten einer Deckung werden wir die *Deckgraphen* der Deckung nennen. Die Deckung T heißt eine k -*Deckung*, wenn T höchstens k Komponenten besitzt. Wir sagen ferner, daß der leere Graph die 0-Deckung mit 0 Komponenten besitzt. G ist k -*deckbar*, wenn eine k -Deckung von G existiert.

Eine Deckung von G mit minimaler Anzahl von Komponenten heißt eine *minimale Deckung* von G . Die *Deckungszahl* $\bar{\kappa}(G)$ von G ist die Anzahl der Komponenten der minimalen Deckungen von G . (Für den leeren Graphen G ist also $\bar{\kappa}(G) = 0$.)

Eine Deckung kann isolierte Punkte, d. h. einpunktige Deckgraphen enthalten. Eine minimale Deckung von G mit minimaler Anzahl von einpunktigen Deckgraphen wollen wir eine *extreme Deckung* von G nennen.

(6.2) Ist $A \subseteq \mathcal{S}(G)$ und T eine Deckung von G , so ist $T \cap [A]$ eine Deckung von $[A]$, und es besteht $\bar{\kappa}([A]) \leq \bar{\kappa}(G)$. Der Kürze halber werden wir oft statt $\bar{\kappa}([A])$ einfach $\bar{\kappa}(A)$ schreiben. (Wenn anders nicht gesagt wird, bezieht sich also $\bar{\kappa}(A)$ immer auf dem Graphen $[A] = [A]_G$.)

(6.3) Es sei T eine Deckung von G und die Punktmenge $A \subseteq \mathcal{S}(G)$ besitze die Eigenschaft, daß eine jede Komponente von T entweder ganz zu $[A]$, oder ganz zu $[\bar{A}]$ gehört, wobei $\bar{A} = \mathcal{S}(G) - A$ ist. Dann wollen wir A sowie $[A]$ *bezüglich T rund* nennen. Ist $A \subseteq \mathcal{S}(G)$ bezüglich T rund so gilt das gleiche auch für \bar{A} . Es ist klar, daß *eine jede Komponente eines Graphen G bezüglich jeder Deckung von G rund ist*. Man kann die Richtigkeit der folgenden Behauptung auch leicht einsehen:

(6.4) *Es sei T eine minimale (extreme) Deckung von G , und es sei $\mathcal{S}(G)$ so in die paarweise fremden Mengen A_i ($i = 1, \dots, j$) zerlegt, daß jedes A_i bezüglich T rund ist. Dann ist $T \cap [A_i]$ eine minimale (extreme) Deckung von $[A_i]$ ($i = 1, \dots, j$), und es besteht $\sum_{i=1}^j \bar{\kappa}(A_i) = \bar{\kappa}(G)$.*

Sind speziell G_i ($i = 1, \dots, j$) die Komponenten von G , so ist

$$\bar{\kappa}(G) = \sum_{i=1}^j \bar{\kappa}(G_i).$$

⁴ Viele Probleme der Graphentheorie lassen sich als Deckungsprobleme auffassen. Dabei werden neben den vollständigen Graphen auch andere Graphen als Deckgraphen zugelassen und die Bedingung, daß die Deckgraphen paarweise fremd seien, wird durch allgemeinere Bedingungen ersetzt.

(6.5) Der nichtleere Graph G heißt *punktkritisch bezüglich Deckung*, kurz *dp-kritisch*, wenn für jedes $x \in G$ $\bar{\kappa}(G - x) < \bar{\kappa}(G)$ gilt. Er heißt *kantenkritisch bezüglich Deckung*, wenn die Verbindung zweier beliebiger in G nicht verbundenen Punkte die Deckungszahl verkleinert. Endlich heißt G *kritisch bezüglich Deckung* oder *deckungskritisch*, wenn er punkt- und kantenkritisch bezüglich Deckung ist. Aus (6.4) folgt:

Die Komponenten eines dp-kritischen (deckungskritischen) Graphen sind alle dp-kritisch (deckungskritisch).

Bezeichnet \bar{G} den komplementären Graphen von G so bestehen die folgenden trivialen Behauptungen (s. (2.6)).

(6.6) *Ist G k -deckbar, so ist \bar{G} k -färbbar. Es gilt $\bar{\kappa}(G) = \kappa(\bar{G})$. Ist G punktkritisch, kantenkritisch bzw. kritisch bezüglich Deckung, so ist \bar{G} punktkritisch, kantenkritisch bzw. kritisch (bezüglich Färbung). Ist G nicht zusammenhängend, so ist \bar{G} zerlegbar. Ist der Punkt x in G isoliert so ist x in \bar{G} mit allen übrigen Punkten von \bar{G} verbunden. Es gelten ferner die Umkehrungen sämtlicher ausgesagten Behauptungen.*

Wir können jetzt in Betracht auf (2.6) behaupten: Ein mehrpunktiger, bezüglich Deckung kantenkritischer Graph ist dann und nur dann dp-kritisch, und demzufolge auch deckungskritisch, wenn er keinen solchen Punkt enthält, der mit allen übrigen Punkten des Graphen verbunden ist.

Mit Hilfe der komplementären Graphen wollen wir noch zwei weitere Behauptungen über dp-kritische Graphen erhalten. Es ist bekannt, daß die ungeraden Kreise die einzigen punktkritischen (kritischen) Graphen mit der chromatischen Zahl 3 sind, und daß der Grad jedes Punktes eines punktkritischen (kritischen) Graphen mit der chromatischen Zahl k nicht kleiner als $k - 1$ ist (s. die Einleitung von GK I). Demzufolge gelten:

(6.7) *Die komplementären Graphen der ungeraden Kreise sind die einzigen dp-kritischen (deckungskritischen) Graphen mit der Deckungszahl 3.*

(6.8) *Für jeden Punkt x des dp-kritischen (deckungskritischen) Graphen G gilt $\varrho(x) \leq \pi(G) - \bar{\kappa}(G)$.*

Wir benötigen noch den folgenden einfachen Satz (s. [3] S. 463):

(6.9) *Ein dp-kritischer Graph G kann keinen Punkt x mit $\varrho(x) = 1$ enthalten.*

Beweis. Es sei G dp-kritisch, $x \in G$ und xy die einzige mit x inzidente Kante von G . Ist T eine minimale Deckung von $G - y$, so muß T den einpunktigen Deckgraphen (x) enthalten. Dann ist jedoch $(T - x) \cup (xy)$ eine Deckung von G , und so ist $\bar{\kappa}(G) \leq \bar{\kappa}(G - y)$. Dies widerspricht der Annahme, daß G dp-kritisch ist.

(6.10) Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, benötigen wir zum Beweis unseres Hauptsatzes einige Ergebnisse der Theorie der alternierenden Züge. Wir wollen diese jetzt zusammenstellen:

Es sei G^* ein Graph, dessen Kanten in zwei fremden Klassen eingeteilt sind. Die zu der einen gehörigen Kanten sollen α -Kanten, die zu der anderen gehörigen β -Kanten heißen. Wir nehmen an:

(I) Zu jedem Punkt von G^* ist mindestens eine α -Kante inzident.

Es sei ferner b^* ein ausgezeichneteter Punkt von G^* , der die folgende Eigenschaft hat:

(II) Zu b^* sind nur α -Kanten inzident.

Wir bezeichnen die mit b^* inzidenten α -Kanten mit

$$b^*z_i \quad (i = 1, \dots, h; h \geq 1).$$

Die Folge

$$Z = (x_0x_1 \dots x_m) \quad (m \geq 1)$$

der nicht unbedingt verschiedenen Punkte x_0, x_1, \dots, x_m von G^* heißt ein (von x_0 nach x_m führender) *alternierender Zug* (von G^*), wenn x_ix_{i+1} ($i = 0, \dots, m-1$) verschiedene Kanten von G^* sind, und im Falle $m > 1$ die Kanten $x_0x_1, \dots, x_{m-1}x_m$ in dieser Reihenfolge abwechselnd entweder α - und β -Kanten, oder β - und α -Kanten sind. Die Kantenzahl m von Z heißt die *Länge* von Z . Bezeichnen u und v einen beliebigen der Buchstaben α und β , und ist die Anfangskante x_0x_1 eine u -Kante, die Endkante $x_{m-1}x_m$ eine v -Kante, so heißt Z ein uv -Zug. Aus (II) folgt:

(1) b^* kann nur als Anfangs- oder Endpunkt in einem alternierenden Zug vorkommen.

Ist $x \in G^*$ und gibt es einen von b^* nach x führenden au -Zug, so heißt x *erreichbar*, oder genauer *u-erreichbar*. Ferner nennen wir den Punkt b^* stets β -erreichbar. Ist x α -erreichbar, jedoch nicht β -erreichbar, so heißt er ein α -Punkt; ist er β -erreichbar, jedoch nicht α -erreichbar, so heißt er ein β -Punkt. Ist x α - und β -erreichbar, so heißt er ein $\alpha\beta$ -Punkt. Endlich heißen diejenigen Punkte die weder α - noch β -erreichbar sind, *unerreichbare Punkte*.

Wir machen jetzt zwei weitere Annahmen:

(III) b^* ist nicht α -erreichbar, d.h. b^* ist ein β -Punkt.

(IV) Mit jedem erreichbaren Punkt außer b^* inzidiert höchstens eine α -Kante (d.h. genau eine α -Kante).

Aus (1), (III) und (IV) folgt:

(2) In jedem alternierenden Zug $Z = (b^*x_1 \dots x_m)$ ($m > 1$) sind die Punkte b^*, x_1, \dots, x_{m-1} verschieden. Ist $x_{m-1}x_m$ eine α -Kante, so ist auch x_m von den Punkten b^*, x_1, \dots, x_{m-1} verschieden.

Wir bezeichnen die Menge der β -Punkte mit B^* und setzen $G = G^* - b^*$ und $B = B^* - \{b^*\}$.

Dann gelten laut der Theorie der alternierenden Züge die folgenden Behauptungen (s. [1], [6], [8], [9]):

(3) Jede Kante, die entweder zwei β -Punkte oder einen β -Punkt und einen unerreichbaren Punkt verbindet, ist eine β -Kante.

(4) Eine jede Komponente des Graphen $G^* - B^* = G - B$ enthält entweder nur erreichbare, oder nur unerreichbare Punkte.

Wir nennen jene Komponenten, die erreichbare (unerreichbare) Punkte enthalten, die *erreichbaren* (*unerreichbaren*) *Komponenten* von $G - B$. Da die Punkte z_1, \dots, z_h ($h \geq 1$) α -erreichbar sind, existieren stets erreichbare Komponenten. Diese wollen wir mit $[D_i]_{G^*} = [D_i]$ ($D_i \subseteq \mathcal{S}(G)$, $i = 1, \dots, l$; $l \geq 1$) bezeichnen.

(5) Es gibt zweierlei erreichbare Komponenten: Einpunktige, diese bestehen aus einem einzigen α -Punkt. Mehrpunktige, diese bestehen aus lauter $\alpha\beta$ -Punkten. Zu einem jeden $[D_i]$ ($i = 1, \dots, l$) gibt es genau eine solche α -Kante, die *Eintrittskante* von $[D_i]$, von deren Endpunkten der eine zu D_i , der andere zu B^* gehört.

Die Eintrittskante von $[D_i]$ soll mit $b_i d_i$ ($b_i \in B^*$, $d_i \in D_i$) bezeichnet werden. Der Grund der Benennung »Eintrittskante« ist die folgende Tatsache:

(6) Ist $x \in D_i$ ($1 \leq i \leq l$), $Z = (b^* x_1 \dots x_m \mid x_m = x)$ ein von b^* nach x führender alternierender Zug und x_j ($1 \leq j \leq m$) der erste zu D_i gehörige Punkt der Folge x_1, \dots, x_m , dann ist $x_j = d_i$ und $x_{j-1} = b_i$ ($x_0 = b^*$).

(7) Ist D_i mehrpunktig und $x \in D_i$, so gibt es einen in $[D_i]$ liegenden, von d_i nach x führenden $\beta\beta$ -Zug. Ist $x \in D_i$ und $x \neq d_i$, so gibt es auch einen in $[D_i]$ liegenden, von d_i nach x führenden $\beta\alpha$ -Zug.

Nach den obigen bestehen noch

(8) Es sind mit b^* genau h , mit jedem anderen β -Punkt genau eine α -Kante inzident, und diese müssen alle mit je einem $b_i d_i$ ($i = 1, \dots, l$) zusammenfallen.

(9) Zu d_i ($1 \leq i \leq l$) ist keine, zu jedem von d_i verschiedenen Punkt von D_i ist genau eine zu $[D_i]$ gehörige α -Kante inzident.

7. Graphen, deren extreme Deckungen einpunktige Deckgraphen enthalten

(7.1) Es sei G ein Graph, von dem wir voraussätzen wollen, daß seine extremen Deckungen einpunktige Deckgraphen enthalten, und T sei eine extreme Deckung von G . Wir wollen in diesem Abschnitt G und T festhalten. Die einpunktigen Deckgraphen von T sollen mit

$$(z_i) \quad (z_i \in G; i = 1, \dots, h; h \geq 1)$$

bezeichnet werden.

Nun nehme man zu G einen neuen Punkt b^* und die neuen Kanten $b^* z_i$ ($i = 1, \dots, h$) hinzu. Den entstehenden Graphen bezeichne man mit G^* . Für jede Menge $A \subseteq \mathcal{N}(G)$ gilt dann $[A]_{G^*} = [A]$. Man teile ferner die Kanten von G^* in zwei Klassen: Die Kanten von T und die Kanten $b^* z_i$ ($i = 1, \dots, h$) seien die α -Kanten, die übrigen die β -Kanten. Dann ist zu jedem Punkt von G^* mindestens eine α -Kante inzident, und mit b^* sind nur α -Kanten inzident. Es sind also die Bedingungen (I) und (II) von (6.10) für G^* und b^* erfüllt. Betrachte man weiter die in b^* beginnenden alternierenden Züge, und klassifiziere man mit Hilfe dieser die Punkte von G^* in der unter (6.10) angegebenen Weise. Wir wollen zeigen, daß dann auch die Bedingungen (III) und (IV) von (6.10) bestehen. Die Gültigkeit von (IV) ergibt sich aus der folgenden Behauptung:

(7.2) *Sämtliche Punkte der mehrkantigen Deckgraphen von T sind unerreichbar.*

Beweis. Nehmen wir an, daß unsere Behauptung falsch ist. Betrachte man sämtliche solchen in b^* beginnenden alternierenden Züge, deren Endpunkte zu mehrkantigen Deckgraphen gehören, und wähle man aus diesen einen Zug mit minimaler Länge aus. Es sei dieser

$$Z = (b^* x_1 x_2 \dots x_m) \quad (m \geq 2),$$

wobei $x_m \in T_g$, T_g ein mehrkantiger Deckgraph von T ist. T_g ist ein vollständiger j -Graph ($j \geq 3$). Dann kann kein Punkt der Folge x_1, \dots, x_{m-1} zu einem mehrkantigen Deckgraphen gehören. Es folgt daraus, daß $x_{m-1} x_m$

eine β -Kante ist. m ist also gerade: $m = 2m'$. Nach (6.10) (1) kommt b^* in der Folge x_1, \dots, x_{m-1} nicht vor. Es ist daher zu jedem Punkt x_1, \dots, x_{m-1} genau eine α -Kante inzident. Die Punkte $b^*, x_1, x_2, \dots, x_m$ müssen so verschieden sein (es ist also $(x_1 x_2 \dots x_m)$ ein Weg von G). Es ist (x_1) ein einpunktiger Deckgraph von T , und im Falle $m' > 1$ sind $(x_{2i} x_{2i+1})$ ($i = 1, \dots, m' - 1$) einkantige Deckgraphen von T . Betrachte man nun diejenige Deckung T' von G , die aus T folgendermaßen zustandekommt: Lasse man die Deckgraphen (x_1) und T_g sowie im Falle $m' > 1$ auch die Deckgraphen $(x_{2i} x_{2i+1})$ ($i = 1, \dots, m' - 1$) aus T weg, und nehme man die vollständigen 2-Graphen $(x_{2i-1} x_{2i})$ ($i = 1, \dots, m'$) und den vollständigen $(j-1)$ -Graphen $T_g - x_m$ hinzu. T' besteht dann aus ebensovielen Deckgraphen wie T , es enthält jedoch um eins weniger einpunktige Deckgraphen. Dies widerspricht der Annahme, daß T eine extreme Deckung von G ist. Damit ist (7.2) bewiesen.

(7.3) b^* ist nicht α -erreichbar.

Beweis. Nehmen wir an, daß $Z = (b^* x_1 \dots x_m)$ ein alternierender Zug ist und $x_m = b^*$ besteht. Dann ist $x_{m-1} x_m$ eine α -Kante. m ist also ungerade und größer als 1. Wir setzen $m = 2m' + 1$ ($m' \geq 1$). Nach (6.10) (1) kommt b^* in der Folge $x_1, \dots, x_{2m'}$ nicht vor und daher gehört außer x_1 und $x_{2m'}$ keiner der Punkte $x_1, \dots, x_{2m'}$ zu den einpunktigen Deckgraphen. Da sämtliche Punkte von Z erreichbar sind, gehört nach (7.2) keiner von diesen zu mehrkantigen Deckgraphen. Es ist also zu jedem Punkt $x_1, \dots, x_{2m'}$ genau eine α -Kante inzident. Daraus folgt, daß die Punkte $x_1, \dots, x_{2m'}$ verschieden sind. (x_1) und $(x_{2m'})$ sind einpunktige Deckgraphen von T , und im Falle $m' > 1$ sind $(x_{2i} x_{2i+1})$ ($i = 1, \dots, m' - 1$) einkantige Deckgraphen von T . Betrachte man nun diejenige Deckung T' von G , die aus T folgendermaßen entsteht: Lasse man die Deckgraphen $(x_1), (x_{2m'})$ und im Falle $m' > 1$ auch die Deckgraphen $(x_{2i} x_{2i+1})$ ($i = 1, \dots, m' - 1$) aus T weg, und nehme man die vollständigen 2-Graphen $(x_{2i-1} x_{2i})$ ($i = 1, \dots, m'$) hinzu. T' enthält dann um eins weniger Deckgraphen als T , und das widerspricht der Annahme, daß T eine extreme Deckung von G ist.

Es sind also sämtliche Voraussetzungen von (6.10) durch G^*, b^* und der angegebenen Klasseneinteilung der Kanten von G^* erfüllt, und deshalb kann man alle Behauptungen von (6.10) mit den dortigen Bezeichnungen benützen.

(7.4) Wir wollen jetzt die erreichbaren Komponenten $[D_j]$ ($j = 1, \dots, l$) von $G - B = G^* - B^*$ bezüglich ihrer extremen Deckungen untersuchen.

(7.5) Es sei $b_j \neq b^*$ ($1 \leq j \leq l$). Dann bestehen die folgenden zwei Behauptungen:

$$1) \quad \bar{\kappa}(D_j) = \bar{\kappa}(D_j \cup \{b_j\}).$$

2) $T \cap [D_j]$ ist eine extreme Deckung von $[D_j]$. Jede extreme Deckung von $[D_j]$ besteht aus einem einpunktigen und außerdem aus lauter einkantigen Deckgraphen, und es ist

$$\pi([D_j]) = 2\bar{\kappa}([D_j]) - 1.$$

Beweis. Nach (6.10) (IV) und (9) ist $D_j \cup \{b_j\}$ bezüglich T rund. Daraus folgt nach (6.3) und (6.4), wenn p_j die Anzahl der zu $[D_j]$ gehörigen α -Kanten (d. h. der in $[D_j]$ liegenden Deckgraphen von T) bezeichnet,

$$\bar{\kappa}(D_j \cup \{b_j\}) = p_j + 1.$$

Es gilt daher

$$(1) \quad \bar{\kappa}(D_j) \leq p_j + 1.$$

Es sei $Z = (b^* x_1 \dots x_m)$ ($x_m = d_j$) ein kürzester von b^* nach d_j führender alternierender Zug. Wegen (6.10) (6) und $b_j \neq b^*$ ist $x_{m-1} = b_j$, $m > 1$, m ungerade, und keiner der Punkte x_1, \dots, x_{m-1} gehört zu D_j . Man setze $m = 2m' + 1$ ($m' \geq 1$). Wegen (6.10) (2) ist $(x_1 \dots x_{2m'-1})$ ein von $[D_j \cup \{b_j\}]$ fremder Weg, in dem (x_1) ein punktiger und im Falle $m' > 1$ $(x_{2i} x_{2i+1})$ ($i = 1, \dots, m' - 1$) einkantige Deckgraphen von T sind. Daraus folgt, daß

$$\tilde{D} = \{x_1, \dots, x_{2m'-1}\} \cup (D_j \cup \{b_j\})$$

bezüglich T rund ist, und so ist $\tilde{T} = T \cap [\tilde{D}]$ eine extreme Deckung von $[\tilde{D}]$. \tilde{T} besteht aus einem einpunktigen und außerdem aus lauter zweipunktigen Deckgraphen. Es ist ferner $\bar{\kappa}(\tilde{D}) = m' + p_j + 1$. Nun sei T_j eine extreme Deckung von $[D_j]$. Dann ist

$$\tilde{T}_* = \left(\bigcup_{i=1}^{m'} (x_{2i-1} x_{2i}) \right) \cup T_j$$

eine aus $m' + \bar{\kappa}(D_j)$ Deckgraphen bestehende Deckung von $[\tilde{D}]$. Es muß also $\bar{\kappa}(D_j) \geq p_j + 1$ sein, und dies ergibt zusammen mit (1).

$$(2) \quad \bar{\kappa}(D_j) = p_j + 1.$$

Damit ist die Behauptung 1) bewiesen. Aus (2) folgt, daß $T \cap [D_j]$ eine minimale Deckung von $[D_j]$ ist. Andererseits muß T_j mindestens einen einpunktigen Deckgraphen enthalten, sonst wäre die Anzahl der Deckgraphen von T_j kleiner als $p_j + 1$. Dies bedeutet jedoch, daß $T \cap [D_j]$ eine extreme Deckung von $[D_j]$ ist, woraus die Behauptungen von 2) folgen.

(7.6) Die Behauptungen von 2) des Satzes (7.5) sind auch im Falle $b_j = b^*$ ($1 \leq j \leq l$) richtig.

Beweis. Ist nämlich $b_j = b^*$, so ist (d_j) ein einpunktiger Deckgraph von T , daher ist die Menge D_j bezüglich T rund. $T \cap [D_j]$ ist also eine extreme Deckung von $[D_j]$ und besteht aus einem einpunktigen und außerdem aus lauter einkantigen Deckgraphen. Daraus folgen auch die weiteren Behauptungen von 2) des Satzes (7.5).

(7.7) Jeder Graph $[D_j]$ ($j = 1, \dots, l$) ist ein dp-kritischer Graph, und für jedes $x \in D_j$ gibt es eine solche extreme Deckung von $[D_j]$, in der (x) der einpunktige Deckgraph ist.

Beweis. Nach (7.5) und (7.6) ist $T \cap [D_j]$ eine solche extreme Deckung von $[D_j]$, in der (d_j) der einpunktige Deckgraph ist. Es ist daher offensichtlich $\bar{\kappa}([D_j] - d_j) = \bar{\kappa}(D_j) - 1$. Es sei nun $x \in D_j$, $x \neq d_j$. Laut (6.10) (7) existiert ein in $[D_j]$ liegender $\beta\alpha$ -Zug $Z = (d_j x_1 \dots x_{2m'})$ mit $x_{2m'} = x$, $m' \geq 1$. Nach (6.10) (9) ist $(d_j x_1 \dots x_{2m'})$ ein Weg von $[D_j]$. In diesem ist (d_j) ein einpunktiger Deckgraph, und $(x_{2i-1} x_{2i})$ ($i = 1, \dots, m'$) sind einkantige Deckgraphen von $T \cap [D_j]$. Läßt man alle diese Deckgraphen aus $T \cap [D_j]$ weg, und nimmt man die vollständigen Graphen $(d_j x_1)$, $(x_{2m'})$ und im Falle $m' > 1$ auch die Graphen $(x_{2i} x_{2i+1})$ ($i = 1, \dots, m' - 1$) hinzu, so erhält man eine solche extreme Deckung von $[D_j]$, in der (x) der einpunktige Deckgraph ist. Daraus folgt $\bar{\kappa}([D_j] - x) = \bar{\kappa}(D_j) - 1$. $[D_j]$ ist also tatsächlich ein dp-kritischer Graph.

(7.8) Ist xy eine beliebige Kante von $[D_j]$ ($1 \leq j \leq l$), so gibt es eine solche extreme Deckung von $[D_j]$, in der (xy) ein Deckgraph ist.

Beweis. Es sei T_j eine nach (7.7) existierende solche extreme Deckung von $[D_j]$, deren einpunktiger Deckgraph (x) ist; es sei ferner (yz) jener Deckgraph von T_j , der den Punkt y enthält. Es ist dann $(T_j - \{x, y, z\}) \cup (xy) \cup (z)$ eine gewünschte Deckung von $[D_j]$.

Wir beweisen jetzt bezüglich der Menge der erreichbaren Punkte

$$E = B \cup \left(\bigcup_{i=1}^l D_i \right)$$

von G folgende Behauptung:

(7.9) Es gilt $\bar{\kappa}(E - B) = \bar{\kappa}(E)$.

Beweis. Es genügt den Fall $B \neq \emptyset$ betrachten. Wir dürfen nach (6.10) (8) $b_i = b^*$ ($i = 1, \dots, h$) und $B = \{b_{h+1}, \dots, b_l\}$ annehmen. Dann sind die Mengen D_i ($i = 1, \dots, h$) und $D_i \cup \{b_i\}$ ($i = h+1, \dots, l$) bezüglich T rund, und E ist die Vereinigung dieser Mengen. Andererseits sind die Graphen $[D_i]$ ($i = 1, \dots, l$) die Komponenten des Graphen $[E - B]$. Diese sind für jede Deckung von $[E - B]$ rund. Nach (6.3), (6.4), (7.5) und (7.6) bekommt man daraus

$$\bar{\kappa}(E) = \sum_{i=1}^h \bar{\kappa}(D_i) + \sum_{i=h+1}^l \bar{\kappa}(D_i \cup \{b_i\}) = \sum_{i=1}^l \bar{\kappa}(D_i) = \bar{\kappa}(E - B).$$

Es besteht nun folgende grundlegende Tatsache

(7.10) **Satz.** Es ist

$$\bar{\kappa}(G - B) = \bar{\kappa}(G).$$

Beweis. Bezeichnet \bar{E} die Menge der unerreichbaren Punkte von G , so sind nach (6.10) (3) E und \bar{E} bezüglich T rund. Da sowohl $[E - B]$, wie auch $[\bar{E}]$ Vereinigungen von Komponenten des Graphen $G - B$ sind, sind $E - B$ und \bar{E} beide bezüglich jeder Deckung von $G - B$ rund. Nach (6.4) und (7.9) gilt daher

$$\bar{\kappa}(G) = \bar{\kappa}(E) + \bar{\kappa}(\bar{E}) = \bar{\kappa}(E - B) + \bar{\kappa}(\bar{E}) = \bar{\kappa}(G - B).$$

Aus (7.10) folgt

(7.11) **Satz.** Ist G dp -kritisch, so muß B leer sein. Ist G dp -kritisch und zusammenhängend, so besteht G aus einer einzigen erreichbaren Komponente.

Bevor wir mit Hilfe der obigen Ergebnisse unsere Hauptsätze beweisen, wollen wir noch einige Eigenschaften der Mengen D_i , $E - B$, B und \bar{E} zeigen, die zwar im nachfolgenden keine Rolle spielen, für sich jedoch von gewissem Interesse sind.

(7.12) Ist \tilde{T} eine beliebige (nicht unbedingt minimale) Deckung von G , so gibt es unter den $[D_i]$ ($i = 1, \dots, l$) mindestens h solche, die einpunktige Deckgraphen von \tilde{T} enthalten.

Beweis. Nach (7.5) und (7.6) kann keine Deckung eines $[D_i]$ ($1 \leq i \leq l$) aus lauter mehrpunktigen Deckgraphen bestehen. (Die Anzahl der Deckgraphen einer solchen Deckung wäre nämlich $\leq \frac{1}{2} \pi([D_i]) < \bar{\kappa}(D_i)$.) Ist also ein D_i ($1 \leq i \leq l$) bezüglich \tilde{T} rund, so enthält $[D_i]$ einpunktige Deckgraphen

von \tilde{T} . Andererseits gibt es zu einem bezüglich \tilde{T} nicht-runden $[D_i]$ ($i \leq 1 \leq l$) einen solchen Deckgraphen von \tilde{T} , der sowohl D_i -Punkte wie auch B -Punkte enthält. Da die Deckgraphen vollständige Graphen sind und G keine $D_i\bar{E}$ - und D_iD_j -Kanten ($j \neq i$) enthält, kann ein Deckgraph, der D_i -Punkte enthält, außer D_i -Punkte nur B -Punkte enthalten. Daraus folgt, daß höchstens $\mathcal{N}(B) = l - h$ bezüglich \tilde{T} nicht-runde, und demzufolge mindestens h bezüglich \tilde{T} runde $[D_i]$ existieren. Dies ergibt, zusammen mit den obigen, die Richtigkeit unserer Behauptung.

(7.13) *Die einpunktigen Deckgraphen einer beliebigen extremen Deckung von G gehören alle der Menge $E - B$ an. Jeder Punkt der Menge $E - B$ kommt als einpunktiger Deckgraph bei irgendeiner extremen Deckung von G vor.*

Beweis. Da jede extreme Deckung von G genau h einpunktige Deckgraphen enthält und $E - B = \bigcup_{i=1}^l D_i$ ist, folgt die erste Behauptung unmittelbar aus (7.12). Um die zweite zu beweisen sei x ein beliebiger Punkt von $E - B$. Wir dürfen $x \neq z_i$ ($i = 1, \dots, h$) annehmen. x ist α -erreichbar, d.h. es gibt einen $\alpha\alpha$ -Zug $Z = (b^*x_1 \dots x_{2m+1})$ mit $x = x_{2m+1}$ ($m \geq 1$). Nach (6.10) (2) sind die Punkte $b^*, x_1, \dots, x_{2m+1}$ verschieden. Ferner sind $(x_1), (x_2x_3), \dots, (x_{2m}x_{2m+1})$ Deckgraphen von T . Läßt man nun diese von T weg, und nimmt man die Graphen $(x_1x_2), \dots, (x_{2m-1}x_{2m}), (x_{2m+1})$ hinzu, so erhält man eine solche extreme Deckung von G , in der (x) als Deckgraph vorkommt.

Aus (7.13) und aus den Tatsachen, daß jeder B -Punkt durch eine "Eintrittskante" mit einem $(E - B)$ -Punkt verbunden ist, jedoch kein \bar{E} -Punkt (durch Kanten) mit $(E - B)$ -Punkten verbunden ist, bekommt man folgenden Satz:

(7.14) **Satz.** *Es bezeichne M_e die Menge jener Punkte von G , die bei extremen Deckungen von G als einpunktige Deckgraphen vorkommen und \bar{M}_e die Menge der übrigen Punkte von G . Ferner sei M_b die Menge jener \bar{M}_e -Punkte, die durch Kanten von G mit M_e -Punkten verbunden sind. Dann ist*

$$E - B = M_e, \quad B \cup \bar{E} = \bar{M}_e \quad \text{und} \quad B = M_b.$$

Es sind also die Mengen $E - B, B, \bar{E}$, unabhängig von der gewählten extremen Deckung T , eindeutig bestimmt. Da die $[D_i]$ ($i = 1, \dots, l$) die Komponenten von $[E - B]$ sind, gilt das gleiche auch für die Mengen D_i ($i = 1, \dots, l$). Ob ein D_i ($1 \leq i \leq l$) bezüglich irgendeiner extremen Deckung von G rund oder nicht-rund ist (d.h. ob es einen einpunktigen Deckgraphen der Deckung enthält oder nicht), sowie daß im zweiten Falle welche BD_i -Kante die "Eintrittskante" von $[D_i]$ ist, hängt von der betrachteten extremen Deckung ab.

Aus (7.12) ergibt sich offensichtlich der folgende, für beliebige Graphen gültige Satz:

(7.15) **Satz.** *Jede Deckung eines Graphen enthält mindestens so viele einpunktige Deckgraphen, wie die extremen Deckungen.*

8. Sätze über dp-kritische und punktkritische Graphen

Es gilt die folgende triviale Behauptung

(8.1) *Enthalten die extremen Deckungen eines Graphen G keine einpunktigen Deckgraphen, so ist*

$$\pi(G) \geq 2\bar{\kappa}(G).$$

Nach (7.11) und (7.6) besteht für jeden solchen *zusammenhängenden* dp-kritischen Graphen G , dessen extreme Deckungen einpunktige Deckgraphen enthalten,

$$\pi(G) = 2\bar{\kappa}(G) - 1.$$

Im Bezug auf (8.1) können wir daher den folgenden Satz aussagen:

(8.2) **Satz.** *Es existieren keine zusammenhängenden dp-kritischen Graphen G mit $\pi(G) < 2\bar{\kappa}(G) - 1$.*

Wir wollen wegen der vorangehenden jene zusammenhängenden dp-kritischen (deckungskritischen) Graphen G , für die $\pi(G) = 2\bar{\kappa}(G) - 1$ besteht, die *minimalen* dp-kritischen (deckungskritischen) Graphen nennen. Man kann dann die in (7.11), (7.6), (7.7), (7.8) und (8.1) behaupteten Eigenschaften der zusammenhängenden dp-kritischen Graphen im folgenden Satz zusammenfassen:

(8.3) **Satz.** *Es gibt zwei Arten von zusammenhängenden dp-kritischen Graphen: die minimalen und die nicht minimalen.*

1) *Die minimalen Graphen G haben die folgenden Eigenschaften: Jede extreme Deckung von G besteht aus einem einpunktigen und außerdem aus lauter zweipunktigen Deckgraphen. Es ist $\pi(G) = 2\bar{\kappa}(G) - 1$. Zu jedes $x \in G$ gibt es eine extreme Deckung von G , in der (x) der einpunktige Deckgraph ist. Zu jedes $xy \in G$ gibt es eine extreme Deckung von G in der (xy) ein zweipunktiger Deckgraph ist.*

2) *Bei den nicht minimalen Graphen G bestehen die extremen Deckungen aus lauter mehrpunktigen Deckgraphen und es gilt $\pi(G) \geq 2\bar{\kappa}(G)$.*

Bemerkung. Die einpunktigen Graphen sind minimale dp-kritische Graphen.

Wir wollen noch eine Eigenschaft der *mehrpunktigen* minimalen dp-kritischen Graphen formulieren. Zu diesem Zweck führen wir den folgenden Begriff ein:

Wir sagen, daß die Deckung T des mehrpunktigen Graphen G die $\alpha\beta$ -Eigenschaft besitzt, wenn T den folgenden Bedingungen genügt:

1) T besteht aus einem einpunktigen und außerdem aus lauter zweipunktigen Deckgraphen.

2) Ist (x) der einpunktige Deckgraph von T , und bezeichnet man die Kanten von T als σ -Kanten, die übrigen Kanten von G als β -Kanten, so gibt es zu jedes $y \in G$ einen von x nach y führenden $\beta\beta$ -Zug, und im Falle $y \neq x$ auch einen von x nach y führenden $\beta\alpha$ -Zug.

Nun gilt dann nach (7.11) und (6.10) (7) die Behauptung

(8.4) **Satz.** *Ist G ein mehrpunktiger minimaler dp-kritischer Graph, so besitzt jede extreme Deckung von G die $\alpha\beta$ -Eigenschaft.*

Es gilt auch die folgende Umkehrung von (8.4):

(8.5) **Satz.** *Gibt es eine solche extreme Deckung des mehrpunktigen Graphen G , welche die $\alpha\beta$ -Eigenschaft besitzt, so ist G ein minimaler dp-kritischer Graph.*

Beweis. Es sei T eine solche extreme Deckung von G , welche die $\alpha\beta$ -Eigenschaft besitzt. Wir können auf G und T die Ergebnisse des Abschnittes 7 anwenden. Es ergibt sich, daß sämtliche Punkte von G $\alpha\beta$ -Punkte sind, und da G offensichtlich zusammenhängend ist, ist es selbst eine erreichbare Komponente. Nach (7.7) ist dann G tatsächlich ein dp-kritischer, und zwar ein minimaler dp-kritischer Graph.

Wir wollen jetzt einige spezielle *zusammenhängende* dp-kritische Graphen untersuchen.

(8.6) Die einzigen Graphen G mit $\bar{\kappa}(G) = 1$ sind die vollständigen Graphen. Unter diesen ist nur der einpunktige Graph dp-kritisch. Dieser ist ein minimaler dp-kritischer Graph.

Ist $\bar{\kappa}(G) = 2$, so enthält G zwei nichtverbundene Punkte x und y . Ist ferner der Graph G dp-kritisch, so kann er außer x und y keine anderen Punkte enthalten. *Es existiert also kein zusammenhängender dp-kritischer Graph G mit $\bar{\kappa}(G) = 2$.*

Nach (6.7) sind die einzigen dp-kritischen (deckungskritischen) Graphen mit der Deckungszahl 3 die komplementären Graphen der ungeraden Kreise. Der komplementäre Graph des Dreiecks besteht aus drei isolierten Punkten, derjenige des Fünfecks ist ein Fünfeck. Das Fünfeck ist ein minimaler dp-kritischer Graph. Die komplementären Graphen der $(2j+1)$ -Ecke ($j \geq 3$) sind zusammenhängende, nicht minimale dp-kritische Graphen. *Der einzige minimale dp-kritische (deckungskritische) Graph G mit $\bar{\kappa}(G) = 3$ ist also das Fünfeck.*

Ist G ein zusammenhängender dp-kritischer Graph, und gilt $\bar{\kappa}(G) \geq 4$, so ist nach (8.3) $\pi(G) - \bar{\kappa}(G) \geq 3$ und $\pi(G) \geq 7$.

Aus den Vorangehenden kann man behaupten:

(8.7) *Für jeden mehrpunktigen zusammenhängenden dp-kritischen Graphen G gilt*

$$\bar{\kappa}(G) \geq 3, \quad \pi(G) \geq 5 \quad \text{und} \quad \pi(G) - \bar{\kappa}(G) \geq 2.$$

$\pi(G) = 5$ bzw. $\pi(G) - \bar{\kappa}(G) = 2$ besteht dann und nur dann, wenn G ein Fünfeck ist.

(8.8) Wir wollen nun sämtliche *minimalen* dp-kritischen Graphen mit der Deckungszahl 4 bestimmen. Es bezeichne G einen solchen Graphen. Wir werden neben den in (8.3) zusammengefaßten Eigenschaften von G die für jedes $x \in G$ bestehende Ungleichung $2 \leq \varrho(x) \leq 3$ benützen [s. (6.8) und (6.9)].

Es gilt $\pi(G) = 7$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) G enthält ein Siebeneck V . Dann kann G keine »kürzeste« Diagonale von V enthalten, sonst wäre $\bar{\kappa}(G) \leq 3$. Es können daher nur 0, 1, 2 oder 3 paarweise keinen gemeinsamen Punkt enthaltende »längste« Diagonalen von V zu G gehören. So erhält man fünf verschiedene (nicht isomorphe) Graphen. Man sieht leicht, daß diese alle die Deckungszahl 4 besitzen und dp-kritisch sind. Von diesen ist nur derjenige mit drei Diagonalen deckungskritisch. Dieser ist der komplementäre Graph eines I_{21}^4 -Graphen [s. (2.14)], und wir wollen ihn einen \bar{I}_{21}^4 -Graphen nennen.

2) G enthält kein Siebeneck. Dann kann nicht jeder Punkt den Grad 2 haben (sonst wäre nämlich G nicht zusammenhängend). Es gibt also ein $z \in G$ mit $\varrho(z) = 3$. T sei eine solche extreme Deckung von G , in der (z) der einpunktige Deckgraph ist, und (x, y_i) ($i = 1, 2, 3$) seien die zweipunktigen Deckgraphen von T . z kann für kein i ($1 \leq i \leq 3$) mit den beiden der Punkte x_i und y_i verbunden sein, sonst wäre $\bar{\kappa}(G) \leq 3$. Man kann daher $zx_i \in G$, $zy_i \notin G$ ($i = 1, 2, 3$) annehmen. Eine der Kanten y_1y_3 , y_2y_3 , y_3y_1 muß zu G gehören, sonst wäre $\bar{\kappa}(\{z, y_1, y_2, y_3\}) = 4$. Es sei $y_1y_2 \in G$. Dann ist $x_iy_3 \notin G$ ($i = 1, 2$), sonst würde G das Siebeneck $(zx_3y_3x_iy_1y_2x_i)$ ($j \neq i$, $j = 1$ oder 2) enthalten. Man kann daher (wegen $\varrho(y_3) \geq 2$) $y_2y_3 \in G$ annehmen. Dann

besteht (ähnlich wie vorher) $x_i y_1 \notin G$ ($i = 2, 3$). Ferner kann keine Diagonale der Fünfecke $(zx_1 y_1 y_2 x_2 z)$ und $(zx_3 y_3 y_2 x_2 z)$ zu G gehören, sonst wäre $\bar{\kappa}(G) \leq 3$. G kann daher noch höchstens die Kanten $x_1 x_3$ und $y_1 y_3$ enthalten. Beide können jedoch nicht zu G gehören, da dann $(x_2) \cup (zx_1 x_3 z) \cup (y_1 y_2 y_3 y_1)$ eine 3-Deckung von G wäre. Es muß also G mit einem der Graphen

$$G_1 = (y_1 y_2 y_3) \cup \left(\bigcup_{i=1}^3 (zx_i y_i) \right), \quad G_2 = G_1 \cup (y_1 y_3), \quad G_3 = G_1 \cup (x_1 x_3)$$

zusammenfallen. Nun ist es leicht ersichtlich, daß G_2 und G_3 isomorph sind, sowie daß $\bar{\kappa}(G_1) = \bar{\kappa}(G_2) = 4$, und G_1 und G_2 beide dp-kritisch sind. G_2 ist auch deckungskritisch. Wir werden die mit G_2 isomorphen Graphen $\bar{\Gamma}_*^4$ -Graphen nennen.

Man kann nun zusammenfassend behaupten:

(8.9) *Betrachtet man die isomorphen Graphen als nicht verschieden, so gibt es insgesamt sieben minimale dp-kritische Graphen mit der Deckungszahl 4. Zwei von diesen: der $\bar{\Gamma}_{21}^4$ - und der $\bar{\Gamma}_*^4$ -Graph sind deckungskritisch.*

Wir machen jetzt einige Aussagen über jene zusammenhängende dp-kritische Graphen G , bei denen $\pi(G) - \bar{\kappa}(G)$ einen vorgeschriebenen Wert p besitzt. (Es gilt stets $\pi(G) - \bar{\kappa}(G) \geq 0$.) Laut (8.3) gilt dann $\bar{\kappa}(G) \leq p + 1$ und $\pi(G) \leq 2p + 1$. Daraus folgt in Betracht von (8.6) (8.7) und (8.9).

(8.10) *Betrachtet man isomorphe Graphen als nicht verschieden, so gibt es zu jedem Werte p ($p \geq 0$) nur endlich viele zusammenhängende dp-kritische (deckungskritische) Graphen G mit $\pi(G) - \bar{\kappa}(G) = p$. Für $p = 0$ ist der einpunktige Graph der einzige. Für $p = 1$ gibt es keinen solchen Graphen. Für $p = 2$ ist das Fünfeck der einzige solche Graph. Für $p = 3$ existieren sieben solche Graphen, von denen zwei, der $\bar{\Gamma}_{21}^4$ -Graph und der $\bar{\Gamma}_*^4$ -Graph auch deckungskritisch sind.*

(8.11) Betrachten wir nun die nicht unbedingt zusammenhängenden dp-kritischen Graphen. G sei ein solcher Graph, und es seien G_i ($i = 1, \dots, l$) die Komponenten von G . Die Graphen G_i sind alle zusammenhängend und dp-kritisch, und es besteht [s. (6.4)]

$$(1) \quad 2\bar{\kappa}(G) - \pi(G) = \sum_{i=1}^l (2\bar{\kappa}(G_i) - \pi(G_i)).$$

Ist ferner T eine extreme Deckung von G , so ist $T \cap G_i$ eine extreme Deckung von G_i ($i = 1, \dots, l$). Man kann dann in Bezug auf (1) und (8.3) Behaupten:

(8.12) **Satz.** *Die Zahl der minimalen dp-kritischen Komponenten eines dp-kritischen Graphen G stimmt mit der Zahl der einpunktigen Deckgraphen der extremen Deckungen von G überein. Diese Zahl ist $\geq 2\bar{\kappa}(G) - \pi(G)$.*

Wegen späterer Anwendungen wollen wir die zweite Behauptung von (8.12) auch in einer anderen Form aussprechen:

(8.13) **Satz.** *Es sei $k \geq 1$, $0 \leq p \leq k - 1$ und es bestehe für den dp-kritischen Graphen G $\bar{\kappa}(G) = k$ und $\pi(G) = k + p$. Dann enthält G mindestens $k - p$ minimale (dp-kritische) Komponenten.*

Mit Hilfe von (8.12) und (8.7) bekommt man bezüglich der Anzahl der isolierten Punkte eines dp-kritischen Graphen den folgenden Satz:

(8.14) **Satz.** *Es sei G ein dp -kritischer Graph mit $\bar{\kappa}(G) = k$ ($k \geq 3$), $\pi(G) = n$, und es bezeichne s die Anzahl der isolierten Punkte von G . Dann gilt*

$$(1) \quad s \geq \frac{3}{2} \left(\frac{5}{3} k - n \right).$$

Das Gleichheitszeichen besteht dann und nur dann, wenn sämtliche mehrpunktigen Komponenten von G Fünfecke sind.

Bemerkung. Der Satz besagt, daß im Falle $n < \frac{5}{3}k$ die dp -kritischen

Graphen stets isolierte Punkte enthalten, und daß im Falle $n = \frac{5}{3}k$ ein dp -kritischer Graph (der aus lauter Fünfeck-Komponenten besteht) existiert, der keinen isolierten Punkt enthält.

Beweis. Es bezeichne t die Anzahl der minimalen Komponenten von G . Da nach (8.7) jede mehrpunktige Komponente von G mindestens fünf Punkte enthält, ist

$$(2) \quad n \geq s + 5(t - s).$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn G aus s isolierten Punkten und aus $t - s$ Fünfeck-Komponenten besteht. Nach (8.12) ist

$$(3) \quad t \geq 2k - n,$$

und das Gleichheitszeichen besteht hier in jedem solchen Falle, in welchem dies in (2) gilt. Aus (2) und (3) folgt (1), und man sieht, daß das Gleichheitszeichen in (1) genau in den angegebenen Fällen besteht.

Jetzt untersuchen wir diejenigen (nicht unbedingt zusammenhängenden) dp -kritischen Graphen G , bei denen $\pi(G) - \bar{\kappa}(G)$ einen vorgeschriebenen Wert besitzt. Sind G_i ($i = 1, \dots, l$) die Komponenten des Graphen G , so gilt [s. (6.4)]

$$(4) \quad \pi(G) - \bar{\kappa}(G) = \sum_{i=1}^l (\pi(G_i) - \bar{\kappa}(G_i)).$$

Durch eine einfache Überlegung bekommt man aus (8.10) und (4) den folgenden Satz: [S. die Bemerkung nach (8.19).]

(8.15) **Satz.** *Ist G ein dp -kritischer Graph, so gelten folgende Behauptungen:*

- 1) *Ist $\pi(G) - \bar{\kappa}(G) = 0$, so besteht G aus lauter isolierten Punkten.*
- 2) *$\pi(G) - \bar{\kappa}(G) = 1$ kann nicht eintreten.*
- 3) *Ist $\pi(G) - \bar{\kappa}(G) = 2$, so besteht G aus einem Fünfeck-Komponenten und aus isolierten Punkten.*
- 4) *Ist $\pi(G) - \bar{\kappa}(G) = 3$, so besteht G aus einem mehrpunktigen Komponenten und aus isolierten Punkten. Ist ferner G deckungskritisch, so ist die mehrpunktige Komponente entweder ein $\bar{\Gamma}_{21}^4$ -Graph oder ein $\bar{\Gamma}_*^4$ -Graph.*

Aus (8.14) erhalten wir: [S. die Bemerkung nach (8.20).]

(8.16) **Satz.** *Enthält der dp -kritische Graph G mit $\pi(G) - \bar{\kappa}(G) = p$ keinen isolierten Punkt, so ist*

$$\pi(G) \leq \frac{5}{2} p.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann, wenn G aus lauter Fünfeckkomponenten besteht. Betrachtet man also die isomorphen Graphen als nicht verschieden, so existieren zu jedem Werte p ($p \geq 0$) nur endlich viele solche dp -kritische Graphen G , die keine isolierten Punkte enthalten und der Gleichung $\pi(G) - \kappa(G) = p$ genügen.

(8.17) Nun wollen wir mit Hilfe von (6.6) aus den erhaltenen Deckungssätzen die entsprechenden Färbungssätze herleiten.

Der Satz (8.2) bzw. (8.14) ergibt unmittelbar den Satz (E_2 . 1) bzw. (E_2 . 2) der Einleitung über punktkritische Graphen ausgesprochen. Um die weiteren Sätze einfach formulieren zu können, führen wir zwei neue Begriffe ein.

Ein unzerlegbarer punktkritischer (kritischer) Graph G mit $\pi(G) = 2\kappa(G) - 1$ soll ein *minimaler punktkritischer (kritischer) Graph* heißen.

Der komplementäre Graph \bar{G} eines (nichtleeren) Graphen G zerfällt (in eindeutiger Weise) in Komponenten. Die komplementären Graphen dieser Komponenten sind unzerlegbare Teilgraphen von G , und zwar sind diese durch solche Punktmengen von G gespannt, die paarweise in G vollständig verbunden sind. Diese eindeutig bestimmten Teilgraphen von G wollen wir die *unzerlegbaren Teile von G* nennen. Nach (6.5) und (6.6) [oder nach (2.2)] sind die unzerlegbaren Teile eines punktkritischen (kritischen) Graphen ebenfalls punktkritisch (kritisch).

Aus (8.13) erhalten wir dann:

(8.18) **Satz.** *Es sei $k \geq 1$, $1 \leq p \leq k - 1$ und es bestehe für den punktkritischen Graphen G $\kappa(G) = k$ und $\pi(G) = k + p$. Dann gibt es unter den unzerlegbaren Teilen von G mindestens $k - p$ minimale (punktkritische) Graphen.*

Aus (8.15) bekommt man

(8.19) **Satz.** *Bezeichnet G einen punktkritischen Graphen, so gelten folgende Behauptungen:*

- 1) *Ist $\pi(G) - \kappa(G) = 0$, so ist G ein vollständiger Graph.*
- 2) *$\pi(G) - \kappa(G) = 1$ kann nicht bestehen.*
- 3) *Ist $\pi(G) - \kappa(G) = 2$, so ist einer der unzerlegbaren Teile von G ein Fünfeck, alle andere sind einpunktige Graphen.*
- 4) *Ist $\pi(G) - \kappa(G) = 3$, so enthält G wieder genau einen mehrpunktigen unzerlegbaren Teil. Ist ferner G kritisch, so ist der mehrpunktige Teil entweder ein Γ_{21}^4 -Graph oder ein Γ_*^4 -Graph, wobei ein Γ_*^4 -Graph den komplementären Graphen eines $\bar{\Gamma}_*^4$ -Graphen bedeutet.*

Bemerkung. Die Behauptungen 2) und 3) sind mit zwei in der Einleitung erwähnten DIRAC'schen Behauptungen identisch (s. [3] S. 463).

(8.16) ergibt den folgenden Satz:

(8.20) **Satz.** *Enthält der punktkritische Graph G mit $\pi(G) - \kappa(G) = p$ keinen solchen Punkt, der mit allen übrigen Punkten von G verbunden ist, so ist*

$$\pi(G) \leq \frac{5}{2} p,$$

und das Gleichheitszeichen besteht dann und nur dann, wenn sämtliche unzerlegbaren Teile von G Fünfecke sind. Betrachtet man also die isomorphen Graphen als nicht verschieden, so existieren zu jedem p ($p \geq 0$) nur endlich viele solche punktkritische Graphen G , die der Gleichung $\pi(G) - \kappa(G) = p$ genügen und keinen Punkt enthalten, der mit allen übrigen Punkten von G verbunden ist.

Bemerkung. In [10] beweist J. M. WEINSTEIN für punktkritische Graphen G mit $\pi(G) - \kappa(G) = p$ die Ungleichung $\pi(G) \leq \frac{1}{2} p \max(p+2, 6)$. Die zweite Behauptung von (8.20) stammt von WEINSTEIN.

Endlich wollen wir noch den dem Satz (7.15) entsprechenden Färbungssatz formulieren.

(8.21) **Satz.** *Es sei G ein k -kromatischer Graph, f eine beliebige zulässige Färbung von G (f kann also auch mehr als k Farben enthalten) und es bezeichne j die Anzahl jener Farben von f , die nur bei je einem Punkt von G vorkommen. Dann gibt es eine k -Färbung von G , in der höchstens j solche Farben existieren, die nur bei je einem Punkt von G vorkommen.*

Bemerkung. Sämtliche nachher angeführten Sätze bleiben sinngemäß auch dann bestehen, wenn man nur solche Deckungen zuläßt, deren Deckgraphen vollständige j -Graphen mit $1 \leq j \leq j_0$ ($j_0 > 1$) sind, wobei j_0 eine vorgeschriebene Zahl ist. Die angedeuteten Sätze sind die Sätze (6.2), (6.3), (6.4), (6.5), (6.9), sämtliche Sätze des 7. Abschnittes, die Sätze (8.1), (8.2), (8.3), (8.4), (8.5), (8.12), (8.13).

9. Bestimmung der minimalen Kantenanzahl k -kritischer Graphen mit höchstens $2k - 1$ Punkten

Zur Lösung der im Titel angeführten Aufgabe werden wir die maximale Kantenanzahl der entsprechenden dp-kritischen Graphen bestimmen.

(9.1) Ist G ein dp-kritischer Graph mit $\pi(G) = n$ und $\bar{\kappa}(G) = k$, so bekommt man für die Kantenanzahl von G nach (6.8) die folgende »triviale« obere Schranke

$$(1) \quad v(G) \leq \frac{n(n-k)}{2}.$$

Dies ergibt mit der Bezeichnung $p = n - k$ im Falle $p \geq k$ die Ungleichung

$$(2) \quad v(G) \leq \frac{1}{2} (p+k) p \leq p^2 \quad (p \geq k).$$

(9.2) Bei der Beschreibung der dp-kritischen Graphen mit maximaler Kantenanzahl spielen die komplementären Graphen $\bar{\Gamma}_{j_1 j_2}^k$ der Dirac'schen Graphen $\Gamma_{j_1 j_2}^k$ [s. (2.14)] eine wichtige Rolle. Ein $\bar{\Gamma}_{j_1 j_2}^k$ -Graph (bei der Benützung dieses Zeichen wird stets $k \geq 3$, $j_1 + j_2 = k - 1$, $j_1 > 0$, $j_2 > 0$ vorausgesetzt) G hat folgende Struktur:

$$(1) \quad \mathcal{S}(G) = \{c_2\} \cup C_1 \cup A \cup C_2 \cup \{c_1\},$$

wobei die auf der rechten Seite stehenden Mengen paarweise fremd sind, und $\mathcal{N}(A) = k - 2$, $\mathcal{N}(C_1) = j_1$, $\mathcal{N}(C_2) = j_2$ besteht. Die auf der rechten Seite von (1) benachbart stehenden Mengen sind in G vollständig verbunden und G enthält außer den hierzu erfordernten Kanten nur die Kante $c_1 c_2$.

Nach (2.13), (2.14) und (6.6) ist ein $\bar{\Gamma}_{j_1 j_2}^k$ -Graph ein $(2k-1)$ -punktiger minimaler dp-kritischer Graph mit der Deckungszahl k . Die Kantenanzahl eines solchen Graphen ist $(k-1)^2 + 1$.

Wir werden im folgenden die Benennung »unabhängige Punkte« benutzen. Die Punkte x_1, \dots, x_j des Graphen G heißen (in G) *unabhängig*, wenn keine Kante von G zwei von diesen verbindet. Die maximale Anzahl der unabhängigen Punkte in G soll mit $\varphi(G)$ bezeichnet werden. Ist G ein $\bar{\Gamma}_{j_1 j_2}^k$ -Graph, so ist $\varphi(G) = k - 1$. Ist ferner die Struktur von G durch die unter (1) angegebenen Bezeichnungen und Feststellungen bestimmt, so enthalten nur die folgenden Punktmengen von G $k-1$ unabhängige Punkte:

$$A \cup \{c_1\}, \quad A \cup \{c_2\}, \quad C_1 \cup C_2 \text{ und im Falle} \\ j_i = k-2 \ (i=1 \text{ oder } 2) \text{ auch } C_i \cup \{c_i\}.$$

(Ist $k=3$, so gibt es also fünf, ist $k>3$, so existieren höchstens vier solche Mengen.)

Um den Induktionsschluss einfacher durchführen zu können, und auch aus anderen Gründen ist es vorteilhaft, statt der dp-kritischen Graphen eine größere Graphenklasse zu betrachten, und die maximale Kantenanzahl der zu dieser Klasse gehörigen Graphen zu bestimmen. Der folgende Satz (9.3) enthält dann auch die vollständige Lösung der von uns gestellten Aufgabe über dp-kritische Graphen [s. den Teil I) des folgenden Beweises, sowie (9.2)].

(9.3) **Satz.** *Es sei $k \geq 3$, $1 \leq p \leq k-1$, $n = k + p$ und der Graph G genüge den folgenden Bedingungen:*

$$\pi(G) = n, \quad \bar{\kappa}(G) \geq k, \quad \varphi(G) \leq k-1$$

$$\text{und für jedes } x \in G \quad \varrho(x) \leq p+1.$$

Dann besteht

$$v(G) \leq p^2 + 1.$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn G ein solcher dp-kritischer Graph mit $\bar{\kappa}(G) = k$ ist, der aus einer einzigen mehrpunktigen Komponente G_0 und aus $k-p-1$ isolierten Punkten besteht, und G_0 ein $\bar{\Gamma}_{j_1 j_2}^{p+1}$ -Graph ist.

Beweis. I) Ist G ein dp-kritischer Graph mit $\pi(G) = n$, $\bar{\kappa}(G) = k$, und besteht für $p = n - k$ die Ungleichung $1 \leq p \leq k-1$, so genügt G sämtlichen Voraussetzungen von (9.3). In der Tat: es ist $\varphi(G) \leq k-1$. Gebe es nämlich in G k unabhängige Punkte x_1, \dots, x_k , so wäre für $A = \{x_1, \dots, x_k\}$ $\bar{\kappa}(A) = k$, also müßte $[A] = G$, also $p = 0$ bestehen. Nach (6.8) gilt ferner für jedes $x \in G$ $\varrho(x) \leq p$.

II) Wir zeigen vorerst, daß wenn mit einem gewissen k die Behauptungen von (9.3) für die den Voraussetzungen genügenden dp-kritischen Graphen mit der Deckungszahl k richtig sind, so sind sie mit demselben k auch für alle übrigen den Voraussetzungen genügenden Graphen richtig.

Es sei $k \geq 3$ ein ausgewählter Wert und G ein Graph, der den Voraussetzungen von (9.3) mit diesem k genügt und der im Falle $\bar{\kappa}(G) = k$ nicht dp-kritisch ist. Es gibt dann eine solche nichtleere Menge $A \subseteq \mathcal{P}(G)$, daß der Graph $G' = G - A$ dp-kritisch ist und $\bar{\kappa}(G') = k$ besteht. Wir setzen $\mathcal{N}(A) = j$, $\pi(G') = n - j = n'$ und $n' - k = p - j = p'$. Es ist $j \geq 1$ und $p' < k-1$. Wegen $\varphi(G') \leq \varphi(G) \leq k-1$ besteht $n' > k$, und nach (8.15) gilt dann auch $n' > k+1$. Es ist daher $p' = p - j > 1$. Nach I) genügt

dann G' den Voraussetzungen von (9.3) mit dem ausgewählten Wert k . Ist nun $\nu(G') \leq p^2 + 1$, so ist

$$\begin{aligned}\nu(G) &\leq \nu(G') + j(p+1) \leq (p-j)^2 + 1 + j(p+1) = \\ &= p^2 + 1 - j(p-j-1) \leq p^2.\end{aligned}$$

Die Behauptungen von (9.3) gelten also auch für G .

III) Nun führen wir den Beweis von (9.3) mit Induktion bezüglich k durch. Genügt ein dp-kritischer Graph G mit $\bar{\kappa}(G) = 3$ den Voraussetzungen von (9.3), so ist G ein Fünfeck. Dies — zusammen mit II) — bestätigt die Behauptungen von (9.3) für $k = 3$. Es sei nun $k_0 \geq 4$ und nehmen wir an, daß die Behauptungen von (9.3) für sämtliche k mit $3 \leq k < k_0$ richtig sind. Es sei ferner G ein solcher Graph, der den Voraussetzungen von (9.3) mit $k = k_0$ genügt. Wir wollen zeigen, daß die Behauptungen von (9.3) auch für G richtig sind. Der Kürze halber werden wir im folgenden statt k_0 einfach k schreiben.

Nach II) kann man voraussetzen, daß G dp-kritisch ist und $\bar{\kappa}(G) = k$ besteht. Unter den Komponenten von G (diese sind alle dp-kritische Graphen) sollen s einpunktige, u mehrpunktige minimale und v (mehrpunktige) nicht-minimale vorkommen [s. (8.3); $s \geq 0$, $u \geq 0$, $v \geq 0$]. Da G nicht aus lauter isolierten Punkten bestehen kann, gilt

$$(1) \quad u + v \geq 1.$$

Es bezeichne \tilde{G} bzw. G' die Vereinigung der mehrpunktigen minimalen bzw. der mehrpunktigen nicht-minimalen Komponenten, und es sei

$$\bar{\kappa}(\tilde{G}) = \tilde{k}, \quad \pi(\tilde{G}) = \tilde{n} \quad \text{und} \quad \bar{\kappa}(G') = k', \quad \pi(G') = n'.$$

Es gilt

$$(2) \quad k = s + \tilde{k} + k' \quad \text{und} \quad n = s + \tilde{n} + n'.$$

Ist $u > 0$, so seien G_i ($i = 1, \dots, u$) die mehrpunktigen minimalen Komponenten und man setze

$$\bar{\kappa}(G_i) = k_i \quad \text{und} \quad \pi(G_i) = n_i \quad (i = 1, \dots, u),$$

Nach (8.3) und (8.7) gelten dann

$$(3) \quad n_i = 2k_i - 1, \quad k_i \geq 3, \quad n_i \geq 5 \quad (i = 1, \dots, u).$$

Man bekommt daraus

$$(4) \quad \tilde{k} = \sum_{i=1}^u k_i \geq 3u \quad \text{und} \quad \tilde{n} = \sum_{i=1}^u n_i = 2\tilde{k} - u.$$

Nach (9.1) (1) und (3) ist

$$(5) \quad 2\nu(G_i) \leq n_i(n_i - k_i) = \binom{n_i}{2} \quad (i = 1, \dots, u).$$

Dies ergibt in Bezug auf (3) und (4)

$$2v(\tilde{G}) = \sum_{i=1}^u 2v(G_i) \leq \sum_{i=1}^u \binom{n_i}{2} \leq (u-1) \binom{5}{2} + \binom{\tilde{n} - 5(u-1)}{2},$$

woraus man

$$(6) \quad 2v(\tilde{G}) \leq 2(\tilde{k} - 3u)^2 + 9(\tilde{k} - 3u) + 10u$$

erhält. Diese Ungleichung besteht auch im Falle $u = 0$.

Ist $v > 0$, so seien G'_j ($j = 1, \dots, v$) die (mehrpunktigen) nicht-minimalen Komponenten von G . Da $\bar{\kappa}(G'_j) \geq 3$ und $\pi(G'_j) \geq 2\bar{\kappa}(G'_j)$ ($j = 1, \dots, v$) besteht, gilt

$$(7) \quad k' \geq 3$$

und

$$(8) \quad n' \geq 2k'.$$

Laut (9.1) (1) ist

$$(9) \quad 2v(G') \leq n'(n' - k') = (n' - k')^2 + k'(n' - k').$$

(8) und (9) bestehen auch im Falle $v = 0$.

Aus (6) und (9) bekommt man die in jedem Falle gültige Ungleichung

$$(10) \quad 2v(G) \leq 2(\tilde{k} - 3u)^2 + 9(\tilde{k} - 3u) + 10u + (n' - k')^2 + k'(n' - k').$$

Wir zeigen, daß außer dem Falle $u = 1, v = 0$ stets

$$(11) \quad v(G) \leq p^2$$

besteht. Nach (2) und (4) ist $p = n - k = \tilde{n} - \tilde{k} + n' - k' = \tilde{k} - u + n' - k'$, und so ist

$$\begin{aligned} 2p^2 &= 2((\tilde{k} - 3u) + 2u)^2 + 2(n' - k')^2 + 4(\tilde{k} - u)(n' - k') = \\ &= 2(\tilde{k} - 3u)^2 + 8u(\tilde{k} - 3u) + 8u^2 + 2(n' - k')^2 + 4(\tilde{k} - u)(n' - k'). \end{aligned}$$

In Bezug auf (10) bekommt man so

$$(12) \quad \begin{aligned} 2(p^2 - v(G)) &\geq (8u - 9)(\tilde{k} - 3u) + u(8u - 10) + \\ &\quad + (n' - k')((n' - 2k') + 4(\tilde{k} - u)). \end{aligned}$$

Ist $u \geq 2$, so gilt (11) wegen (12), (4) und (8).

Ist $u = 1$ und $v \geq 1$, so ist nach (7) und (8) $n' - k' \geq k' \geq 3$, und (12), (4) und (8) ergeben so

$$2(p^2 - v(G)) \geq 11(\tilde{k} - 1) > 0.$$

Ist $u = 0$ und $v \geq 1$, so gilt (11) wegen (12) und (8).

Nach (1) ist daher (11) außer dem Falle $u = 1, v = 0$ bewiesen.

Es gelte nun $u = 1$, $v = 0$ und nehmen wir an, daß G nicht zusammenhängend ist. Dann muß $s > 0$ sein, und so ist $k_1 = k - s < k$. Es gilt ferner nach (2) und (3)

$$p = n - k = n_1 - k_1 = k_1 - 1,$$

und so genügt nach I) der dp-kritische Graph G_1 den Voraussetzungen von (9.3). Laut unserer Induktionsannahme ist dann

$$v(G) = v(G_1) \leq p^2 + 1,$$

und das Gleichheitszeichen besteht hier dann und nur dann, wenn G_1 ein $\bar{I}_{j_1 j_2}^{k_1}$ -Graph ist. Wir haben damit die Behauptungen von (9.3) außer dem Falle, wo G ein minimaler dp-kritischer Graph ist, bewiesen.

(IV) Es sei nun G ein minimaler dp-kritischer Graph. Es besteht $n = 2k - 1$ und $p = k - 1$, und so gilt nach (6.8) für jedes $x \in G$ $\varrho(x) \leq k - 1$. Besteht für jedes $x \in G$ auch $\varrho(x) \leq k - 2$, so ist

$$2v(G) \leq (2k - 1)(k - 2) < 2(k - 1)^2 = 2p^2.$$

Man kann also annehmen, daß G einen Punkt z mit $\varrho(z) = k - 1$ besitzt. Nach (8.3) gibt es eine solche extreme Deckung T von G , deren einziger einpunktiger Deckgraph (z) ist, und die außer (z) genau $k - 1$ zweipunktige Deckgraphen: $(x_i y_i)$ ($i = 1, \dots, k - 1$) enthält. Gibt es ein i ($1 \leq i \leq k - 1$), z. B. $i = 1$ mit $zx_1 \in G$ und $zy_1 \in G$, so ist die Vereinigung der Graphen $(zx_1 y_1 z)$, $(x_i y_i)$ ($i = 2, \dots, k - 1$) eine $(k - 1)$ -Deckung von G . Wir können daher annehmen, daß $zx_i \in G$ und $zy_i \notin G$ ($i = 1, \dots, k - 1$) bestehen. Da $\varphi(G) < k$ ist, gibt es zwei y_i , z. B. y_1 und y_2 mit $y_1 y_2 \in G$. Das Fünfeck

$$V = (zx_1 y_1 y_2 x_2 z)$$

gehört dann zu G . Wir wollen der Kürze halber

$$x_{k-1} = x \quad \text{und} \quad y_{k-1} = y$$

setzen. (Wegen $k \geq 4$ liegen x und y nicht in V .)

Betrachte man nun den Graphen $G' = G - \{x, y\}$. Dann ist

$$\pi(G') = 2k - 3 \quad \text{und} \quad \bar{\pi}(G') = k - 1 \geq 3.$$

(Es ist nämlich $T - \{x, y\}$ eine $(k - 1)$ -Deckung von G' , und es gibt keine $(k - 2)$ -Deckung T_1 von G' , sonst wäre $T_1 \cup (xy)$ eine $(k - 1)$ -Deckung von G .) Wir setzen

$$\pi(G') - \bar{\pi}(G') = k - 2 = p'.$$

Es ist ferner $\varphi(G') \leq k - 2$. Ist nämlich $A \subseteq \mathcal{S}(G')$, und sind die Punkte von A in G' unabhängig, so enthält V höchstens zwei A -Punkte (es ist $V \subseteq G'$), und wenn $k > 4$ ist, so enthält jeder Deckgraph $(x_i y_i)$ ($i = 3, \dots, k - 2$) höchstens einen A -Punkt.

Es besteht weiter für jedes $x' \in G'$

$$\varrho_{G'}(x') \leq \varrho(x') \leq k - 1 = p' + 1.$$

Der Graph G' genügt daher sämtlichen Voraussetzungen von (9.3) mit einem kleineren k -Wert als G . Daher gilt nach der Induktionsannahme $\nu(G') \leq p^2 + 1$, und das Gleichheitszeichen besteht hier dann und nur dann, wenn G' ein $\bar{\Gamma}_{h_1 h_2}^{k-1}$ -Graph ist. Man bekommt daraus

$$\nu(G) = \nu(G') + \varrho(x) + \varrho(y) - 1 \leq (k-2)^2 + 1 + 2k - 3 = (k-1)^2 + 1.$$

Es gilt also

$$\nu(G) \leq p^2 + 1,$$

und das Gleichheitszeichen besteht hier dann und nur dann, wenn

$$(13) \quad G' \text{ ein } \bar{\Gamma}_{h_1 h_2}^{k-1}\text{-Graph ist}$$

und

$$(14) \quad \varrho(x) = \varrho(y) = k - 1$$

gilt. Wir wollen jetzt zeigen, daß wenn (13) und (14) gelten, so G ein $\bar{\Gamma}_{h_1 h_2}^k$ -Graph sein muß.

V) Wir nehmen also an, daß (13) und (14) bestehen. Dann besitzt G' nach (9.2) die folgende Struktur:

$$\mathcal{N}(G') = \{c'_2\} \cup C'_1 \cup A' \cup C'_2 \cup \{c'_1\},$$

wobei $\mathcal{N}(A') = k-3$, $\mathcal{N}(C'_1) = h_1$, $\mathcal{N}(C'_2) = h_2$ ist, und G' neben $c'_1 c'_2$ sämtliche $A' C'_i$ -Kanten ($i = 1, 2$) sowie sämtliche $c'_1 C'_2$, $c'_2 C'_1$ -Kanten und nur diese enthält.

a) Kein Punkt von G' kann in G mit den beiden Punkten x und y verbunden sein. Nehmen wir nämlich an, daß ein $x' \in G'$ mit $xx' \in G$ und $x'y \in G$ existiert. Da nach (9.2) G' ein minimaler dp-kritischer Graph ist, gibt es nach (8.3) eine solche extreme Deckung T' von G' , in der (x') der einpunktige Deckgraph ist. Dann wäre jedoch $(T' - x') \cup (x'xyx')$ eine $(k-1)$ -Deckung von G .

b) Wir beweisen: Ist $x'y' \in G'$, so kann in G weder x noch y mit den beiden Punkten x' und y' verbunden sein. Nehmen wir an, daß $x'y' \in G'$, $xx' \in G$ und $xy' \in G$ besteht. Es bezeichne jetzt T' eine nach (8.3) existierende solche extreme Deckung von G' , die den Deckgraphen $(x'y')$ enthält. Es sei ferner (z') der einpunktige Deckgraph von T' . Nach a) ist dann $yx' \notin G$ und $yy' \notin G$. Gebe es einen von $(x'y')$ verschiedenen Deckgraph $(x''y'')$ in T' mit $yx'' \in G$ und $yy'' \in G$, so wäre

$$(T' - \{x', y', x'', y''\}) \cup (xx'y'x) \cup (yx''y''y)$$

eine $(k-1)$ -Deckung von G . Wir können daher annehmen, daß y mit höchstens einem Punkt eines jeden Deckgraphen von T' verbunden ist. Da außer $(x'y')$ in T' genau $k-2$ Deckgraphen existieren und $\varrho(y) = k-1$ ist, muß $z'y \in G$ bestehen. Dann ist jedoch

$$(T' - \{x', y', z'\}) \cup (xx'y'x) \cup (yz')$$

eine $(k-1)$ -Deckung von G . Dieser Widerspruch beweist unsere Behauptung.

c) Es bezeichne B_x bzw. B_y die Menge derjenigen Punkte von G' , die in G mit x bzw. mit y verbunden sind. Nach (14) ist $\mathcal{N}(B_x) = \mathcal{N}(B_y) = k - 2$. Wegen a) ist $B_x \cap B_y = \emptyset$ und nach b) sind die Punkte von B_x sowie die Punkte von B_y unabhängig. Nach (9.2) ist jedoch $\varphi(G') = k - 2$, und so müssen — ebenfalls nach (9.2) — B_x und B_y mit je einer der Mengen

$$A' \cup \{c'_1\}, \quad A' \cup \{c'_2\}, \quad C'_1 \cup C'_2,$$

im Falle $h_i = k - 3$ ($i = 1$ oder 2) auch $C'_i \cup \{c'_i\}$ zusammenfallen.

Nehmen wir zuerst an, daß $C'_1 \cup C'_2$ mit einem von B_x und B_y , sagen wir mit B_x zusammenfällt. Dann muß B_y entweder mit $A' \cup \{c'_1\}$ oder mit $A' \cup \{c'_2\}$ zusammenfallen. Wir dürfen $B_y = A' \cup \{c'_2\}$ annehmen. Dann ist G ein $\bar{\Gamma}_{j_1 j_2}^k$ -Graph ($j_1 = h_1 + 1$, $j_2 = h_2$), der mit der Bezeichnungen von (9.2) folgendermaßen beschrieben werden kann:

$$A = A' \cup \{x\}, \quad C_1 = C'_1 \cup \{y\}, \quad C_2 = C'_2, \quad c_2 = c'_2, \quad c_1 = c'_1.$$

Ist $k = 4$, so ist G' ein Fünfeck und so gibt der eben behandelte Fall wegen Symmetriegründen das gewünschte Ergebnis.

Es sei nun $k > 4$ und $C'_1 \cup C'_2$ weder mit B_x noch mit B_y identisch. Dann muß entweder $C'_1 \cup \{c'_1\}$ oder $C'_2 \cup \{c'_2\}$ mit B_x oder mit B_y zusammenfallen. Wir dürfen $C'_1 \cup \{c'_1\} = B_y$ annehmen. Es ist dann $h_1 = k - 3$ und $h_2 = 1 < k - 3$. Es muß daher $B_x = A' \cup \{c'_2\}$ sein. Dann ist G ein $\bar{\Gamma}_{2, k-3}^k$ -Graph, der mit der Bezeichnungen von (9.2) folgendermaßen beschrieben werden kann:

$$A = C'_1 \cup \{x\}, \quad C_1 = \{c'_2, y\}, \quad C_2 = A', \quad c_2 = c'_1, \quad \{c_1\} = C'_2.$$

Damit haben wir den Beweis von (9.3) beendet.

Wir wollen jetzt mit Hilfe von (6.6) den dem Satz (9.3) entsprechenden Färbungssatz formulieren.

(9.4) **Satz.** Es sei $k \geq 3$, $1 \leq p \leq k - 1$, $n = k + p$ und der Graph G genüge den folgenden Bedingungen:

$\pi(G) = n$, $\kappa(G) \geq k$, G enthält keinen vollständigen k -Graphen (als Teilgraphen) und für jedes $x \in G$ ist $\varrho(x) \geq k - 2$. Dann besteht

$$\nu(G) \geq \binom{n}{2} - (p^2 + 1) = \frac{1}{2}(k^2 + (2p - 1)k - p^2 - p - 2),$$

und das Gleichheitszeichen gilt hier dann und nur dann wenn G aus einem $\Gamma_{j_1 j_2}^{p+1}$ -Graphen G_1 und aus einem zu G_1 fremden vollständigen $(k - p - 1)$ -Graphen G_2 in solcher Weise hergestellt werden kann, daß man jeden Punkt von G_1 mit jedem Punkt von G_2 verbindet.

Der Satz (E₂. 4) der Einleitung ist nur eine andere Fassung von (9.4).

(Eingegangen: 14. Juni, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BERGE, C.: *Théorie des graphes et ses applications*. Paris, 1958.
- [2] DIRAC, G. A.: "Some theorems on abstract graphs". *Proc. London Math. Soc.* (3) **2** (1952) S. 69—81.
- [3] DIRAC, G. A.: "Map colour theorems related to the Heawood colour formula". *J. London Math. Soc.* **31** (1956) S. 460—471.
- [4] DIRAC, G. A.: "Map colour theorems related to the Heawood colour formula (II)". *J. London Math. Soc.* **32** (1957) S. 436—455.
- [5] DIRAC, G. A.: "A theorem of R. L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger". *Proc. London Math. Soc.* (3) **7** (1957) S. 161—195.
- [6] GALLAI, T.: "On factorisation of graphs". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **1** (1950) S. 133—153.
- [7] GALLAI, T.: "Kritische Graphen I". *Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sciences* **8** (1963). S. 165—192.
- [8] ORE, O.: "Graphs and subgraphs". *Trans. Amer. Math. Soc.* **84** (1957) S. 109—136.
- [9] TUTTE, W. T.: "The factors of graphs". *Canadian Journal of Math.* **4** (1952) S. 314—328.
- [10] WEINSTEIN, J. H.: "On the number of disjoint edges in a graph". *Canadian Journal of Math.* **15** (1963) S. 106—111.

КРИТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ II

T. GALLAI

Резюме

В работе рассматриваются критические графы с «маленьким» числом вершин. Основной результат работы следующая теорема:

Если G — k -критический ($k \geq 2$) граф и число вершин меньше $(2k - 1)$, тогда вершины G можно так разделить на 2 класса, что любые две вершины, принадлежащие разным классам, будут соединены гранью из G .

Эта теорема в случае $n < 2k$ дает возможность определить минимум граней k -критического графа с n вершинами.

ON THE JORDAN-HÖLDER THEOREM FOR UNIVERSAL ALGEBRAS

by
GYÖRGY GRÄTZER

Introduction

There are several ways to generalize the Jordan-Hölder theorem. One may consider this theorem as a result on equivalence relations on a set¹ (the set being the group or ring itself); or as a statement on the „subnormal” elements of lattices upon which a binary relation (“ a is normal in b ”) is defined,² the lattice being the lattice of all subgroups of the given group. But if we look at the theorem as it is then the most natural way of generalization is to get rid of the axioms of groups (rings) and prove the result for arbitrary universal algebras. This was done by A. W. GOLDIE [3] and my first aim is to give a variant of his proof. My proof is much shorter although no essentially new idea is used. The concepts are also different and, I hope, more natural. At the proper place (§ 4) I'll give my reasons for not following the old pattern.

Then we will point out that the proof employed makes us possible to give further generalizations. In the proofs we used the concept of homomorphism and subalgebra but the operations were very seldom taken into consideration. Therefore we consider universal algebras as sets among which certain mappings, called homomorphisms, are defined, satisfying certain axioms.³ This axiomatic treatment makes us possible to extend the Jordan-Hölder theorem to multialgebras.

§ 1. Preliminaries

An *algebra* is a couple $(A; F)$ where A is a set and the elements of F are finitary operations on A , i.e. each $f \in F$ is a function of n -variables, n depending on f , it associates with every n -tuple (a_1, \dots, a_n) of elements of A an element $f(a_1, \dots, a_n)$ of A . Let F_n denote the set of all operations of n variable, $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$.

¹ See e.g. BIRKHOFF [1], pp. 87—89 and the references on p. 89.

² See e.g. ZASSENHAUS [7], pp. 190—198, where some references are also given.

³ That this is the natural framework for the Jordan-Hölder theorem was first pointed out to me by E. FRIED who also gave an axiom system similar to I—VIII of § 5. I don't know what is the connection between his (still unpublished) axiom system and mine. Of course, this is not new. If we go one step further, we get the notion of categories.

In this note all algebras considered are of the same type, i.e. the set of operations can be denoted by the same letter F . For simplicity's sake we omit the letter F . Thus if we say that A is an algebra then we have the algebra $(A; F)$ in mind.

A non-void subset B of A is a *subalgebra* if $b_1, \dots, b_n \in B, f \in F_n$ imply $f(b_1, \dots, b_n) \in B$. The intersection of two subalgebras is again a subalgebra, provided it is non-void.

The set of all equivalence relations over A is denoted by $P(A)$. If $\varepsilon_\lambda \in P(A)$, $\lambda \in A$ then $\bigcup \varepsilon_\lambda$, defined by $x \equiv y(\bigcup \varepsilon_\lambda)$ if and only if there exists in A a finite sequence $x = z_0, z_1, \dots, z_n = y$ such that $z_{i-1} \equiv z_i(\varepsilon_{\lambda_i})$ for some $\lambda_i \in A$, $i = 1, 2, \dots, n$ and $\bigcap \varepsilon_\lambda$ defined by $x \equiv y(\bigcap \varepsilon_\lambda)$ if and only if $x \equiv y(\varepsilon_\lambda)$ for all $\lambda \in A$ are again in $P(A)$. If we partially order $P(A)$ by $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ if and only if $\varepsilon_1 = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$ then we see that $P(A)$ is a complete lattice in which $\bigcup \varepsilon_\lambda$ and $\bigcap \varepsilon_\lambda$ are the least upper bound, resp. greatest lower bound of the set $\{\varepsilon_\lambda; \lambda \in A\}$.

A *congruence relation* Θ is an equivalence relation satisfying the *substitution property*: if $a_i \equiv b_i(\Theta)$, $i = 1, 2, \dots, n$ and $f \in F_n$ then $f(a_1, \dots, a_n) \equiv f(b_1, \dots, b_n)(\Theta)$. The set of all congruence relations is denoted by $\Theta(A)$. Obviously, $\Theta(A) \subseteq P(A)$ and as it is known $\varepsilon_\lambda \in \Theta(A)$, $\lambda \in A$ imply $\bigcup \varepsilon_\lambda, \bigcap \varepsilon_\lambda \in \Theta(A)$. We denote by ω and ι the least, resp. greatest element of $P(A)$. Obviously $\omega, \iota \in \Theta(A)$.

If Θ is a congruence relation on A and H is a subset of A let $[H]\Theta$ denote the union of the congruence classes of A represented by H , i.e. $[H]\Theta = \{x; x \equiv h(\Theta) \text{ for some } h \in H\}$. The algebra A/Θ is defined on the congruence classes $[x]\Theta$ in the following way:

$$f([x_1]\Theta, \dots, [x_n]\Theta) = [f(x_1, \dots, x_n)]\Theta.$$

The mapping $\varphi: x \rightarrow [x]\Theta$ is called a *homomorphism*.

It is easy to prove that if B is a subalgebra then so is $[B]\Theta$. B is called *closed* under Θ if $B = [B]\Theta$.

A subalgebra B of A is called *normal* if A is a whole congruence class under some congruence relation Θ , i.e. B is closed under Θ and $x \equiv y(\Theta)$ for every $x, y \in B$.

Let Θ be a congruence relation and B a subalgebra of A . Then we define Θ_B , the *restriction* of Θ to B , as follows:

$x \equiv y(\Theta_B)$ if and only if $x, y \in B$ and $x \equiv y(\Theta)$. Obviously, Θ_B is a congruence relation of B .

Let $\Theta, \Phi \in \Theta(A)$ such that B is closed under Θ and Φ . Then B is closed under $\Theta \cup \Phi$.

Let $\Theta, \Phi \in \Theta(A)$ and B a subalgebra of A . We say (modifying the notion invented by GOLDIE [3]) that Θ and Φ are *weakly associable* over B if

$$[[B]\Theta]\Phi = [[B]\Theta]\Phi,$$

or equivalently,

$$[[B]\Theta]\Phi = [[B]\Phi]\Theta,$$

or, a third equivalent form

$$[B]\Theta \cup \Phi = [[B]\Theta]\Phi.$$

This means, that if $b \equiv x(\Theta)$ and $x \equiv y(\Phi)$, $b \in B$, $x, y \in A$, then there exist $b' \in B$, $z \in A$ with $b' \equiv z(\Phi)$, $z \equiv y(\Theta)$.

Let B, C and D be subalgebras of A , Θ and Φ congruence relations on B and C , respectively, $D \subseteq B \cap C$. Θ and Φ are said to be *weakly associative* over D if $\Theta_{B \cap C}$ and $\Phi_{B \cap C}$ are weakly associative over D .

§ 2. The Zassenhaus lemma

The following statement is the essence of the Zassenhaus lemma:

Lemma 1. *Let A be an algebra, B a subalgebra of A , Θ a congruence relation of A , Φ a congruence relation of B such that $\Theta_B \leq \Phi$. Define a relation $\Theta(\Phi)$ on $[B]\Theta$ by*

$$(1) \quad a \equiv b(\Theta(\Phi)) \text{ if and only if there exist } c, d \in B \text{ such that} \\ a \equiv c(\Theta), c \equiv d(\Phi), d \equiv b(\Theta).$$

Then $\Theta(\Phi)$ is a congruence relation of $[B]\Theta$ and

$$(2) \quad [B]\Theta/\Theta(\Phi) \cong B/\Phi,$$

where an isomorphism is given by

$$(3) \quad [x]\Theta(\Phi) \rightarrow [x]\Phi, \quad x \in B.$$

The relation $\Theta(\Phi)$ is obviously reflexive and symmetric on $[B]\Theta$. The transitivity can be verified as follows: if $a \equiv b(\Theta(\Phi))$, $a' \equiv b'(\Theta(\Phi))$, $b = a'$ then there exist $c, d \in B$ and $c', d' \in B$ as required by (1). Since $d \equiv b(\Theta)$, $b = a' \equiv c'(\Theta)$ we get $d \equiv c'(\Theta)$, thus $d \equiv c'(\Phi)$. Therefore $c \equiv d \equiv c' \equiv d'(\Phi)$ hence $c \equiv d'(\Phi)$ and $a \equiv b'(\Theta(\Phi))$ is verified.

If $f \in F_n$, $a_i \equiv b_i(\Theta)$, $i = 1, 2, \dots, n$ (with c_i, d_i satisfying (1)) then $f(c_1, \dots, c_n) \equiv f(d_1, \dots, d_n)(\Phi)$, $f(a_1, \dots, a_n) \equiv f(c_1, \dots, c_n)(\Theta)$, $f(b_1, \dots, b_n) \equiv f(d_1, \dots, d_n)(\Theta)$, thus $f(a_1, \dots, a_n) \equiv f(b_1, \dots, b_n)(\Theta(\Phi))$, proving that $\Theta(\Phi)$ is a congruence relation on $[B]\Theta$.

By (1) every congruence class of $[B]\Theta$ modulo $\Theta(\Phi)$ can be represented by an element of B , thus we get that (3) maps the left side of (2) onto the right side of (2). Further $x \equiv y(\Theta(\Phi))$ is equivalent to $x \equiv y(\Phi)$ if $x, y \in B$ therefore (3) sets up an isomorphism.

Corollary (Zassenhaus lemma). *Let D and E be subalgebras of A with non-void intersection, Θ and Φ congruence relations of D and E , respectively. Put $\Psi = \Theta_{D \cap E} \cup \Phi_{D \cap E}$. Then*

$$(4) \quad [D \cap E]\Theta/\Theta(\Psi) \cong [D \cap E]\Phi/\Phi(\Psi),$$

an isomorphism is given by

$$(5) \quad [x]\Theta(\Psi) \rightarrow [x]\Phi(\Psi), \quad x \in D \cap E.$$

Indeed, Lemma 1 applied to the algebras $A = [D \cap E]\Theta$ and $B = D \cap E$ with the congruence relations Θ and Ψ (obviously $\Theta_{D \cap E} \leq \Psi$) gives

$$[D \cap E]\Theta/\Theta(\Psi) \cong D \cap E/\Psi,$$

$$[x]\Theta(\Psi) \rightarrow [x]\Psi, \quad x \in D \cap E.$$

This, and the similar result for Φ rather than Θ gives (4) and (5).

§ 3. The Jordan-Hölder-Schreier theorem

Normal series

A normal series of A is a series of subalgebras

$$(6) \quad A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n$$

such that there exists a series of relations

$$(7) \quad \Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_n = \omega_{A_n},$$

such that Θ_i is a congruence relation on A_i and $A_i = [A_n]\Theta_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

The algebras A_i/Θ_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$ are called the *quotient algebras* of (6) (with respect to (7)).

Let

$$(8) \quad A = B_0 \supseteq B_1 \supseteq \dots \supseteq B_m$$

be also a normal series, accompanied by

$$(9) \quad \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_m = \omega_{B_m},$$

$$\Phi_i \in \Theta(B_i), \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad B_i = [B_m]\Phi_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

The normal series (6) and (8) are called *isomorphic* if $n = m$, $A_n = B_m$, and (7), (9) can be chosen in such a way that $A_i/\Theta_i \cong B_{k_i}/\Phi_{k_i}$, for some permutation k_0, k_1, \dots, k_{n-1} of $0, 1, \dots, n-1$.

(8) is a refinement of (6) if $A_n = B_m$ and every A_i is a B_j .

Theorem 1 (Schreier's theorem). *The normal series (6) and (8) have isomorphic refinements if $A_n = B_m$ and (7), (9) can be chosen in such a way that Θ_i is weakly associative with Φ_j over $A_n (= B_m)$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$.*

Define

$$(10) \quad A_{ij} = [A_i \cap B_j] \Theta_i, \quad B_{ij} = [A_i \cap B_j] \Phi_j, \\ \Theta_{ij} = \Theta_i(\Psi_{ij}), \quad \Phi_{ij} = \Phi_j(\Psi_{ij}), \quad \text{where } \Psi_{ij} = \Theta_{i_{A_i \cap B_j}} \cup \Phi_{j_{A_i \cap B_j}}.$$

Then $A_{ij}/\Theta_{ij} \cong B_{ij}/\Phi_{ij}$ by the Zassenhaus lemma.

Further $A_{i0} = A_i$, $A_{im} = [A_i \cap B_m] \Theta_i = [A_n] \Theta_i = A_{i+1}$, $A_{ij} \supseteq A_{i,j+1}$, hence to prove that

$$A = A_{00} \supseteq A_{01} \supseteq \dots \supseteq A_{0m} = A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n$$

and

$$A = B_{00} \supseteq B_{10} \supseteq \dots \supseteq B_{n0} = B_1 \supseteq \dots \supseteq B_m$$

are isomorphic refinements it is enough to verify that

$$(11) \quad [A_n] \Theta_{ij} = A_{i,j+1} \quad (0 \leq j < m)$$

and the similar statement for Φ_{ij} . Indeed, $[A_n] \Theta_{ij} = [A_n] \Theta_i(\Psi_{ij}) = [[A_n] \Psi_{ij}] \Theta_i \supseteq [[A_n] \Phi_{j_{A_i \cap B_j}}] \Theta_i = [A_i \cap B_{j+1}] \Theta_i = A_{i,j+1} \supseteq A_n$, hence $[A_n] \Theta_{ij} = [A_{i,j+1}] \Theta_{ij}$, thus in order to show (11) it is enough to prove that

$$(12) \quad A_{i,j+1} \text{ is closed under } \Theta_{ij}.$$

A_{ij+1} is, by definition, closed under Θ_i , hence it is closed under $\Theta_{ij} = \Theta_i(\Theta_{i_{A_i \cap B_j}} \cup \Phi_{j_{A_i \cap B_j}})$ if and only if $A_{ij+1} \cap (A_i \cap B_j) = A_{ij+1} \cap B_j$ is closed under $\Phi_{j_{A_i \cap B_j}}$. Since

$$A_i \cap B_{j+1} = A_i \cap [A_r] \Phi_j = [A_n] \Phi_{j_{A_i \cap B_j}}$$

and

$$A_{ij+1} \cap B_j = [A_i \cap B_{j+1}] \Theta_i \cap B_j = [A_i \cap B_{j+1}] \Theta_{i_{B_j}} = [[A_n] \Phi_{j_{A_i \cap B_j}}] \Theta_{i_{A_i \cap B_j}} =$$

(by the definition of weak associability of Θ_i and Φ_j over A_n) =

$$= [[A_n] \Theta_{i_{A_i \cap B_j}}] \Theta_{j_{A_i \cap B_j}}$$

which was to be proved.

Principal series

The normal series (6) is a *principal series* if A_i ($i = 0, 1, \dots, n$) is a normal subalgebra and if in (7) every Θ_i is a congruence relation of A ; then the factor algebras are $A_i/\Theta_{i_{A_i}}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Theorem 2 (Schreier's theorem). *The principal series (6) and (8) have isomorphic refinements if $A_n = B_m$ and (7), (9) can be chosen in such a way that Θ_i and Φ_j are weakly associable over A_n .*

Since $A_i(B_i)$ is a normal subalgebra, there exists a congruence relation $\eta_i(\xi_i)$ of A such that $A_i(B_i)$ is a whole congruence class modulo $\eta_i(\xi_i)$. We put

$$A_{ij} = [A_i \cap B_j] \Theta_i, \quad B_{ij} = [A_i \cap B_j] \Phi_j,$$

$$\Theta_{ij} = (\Theta_i \cup \Phi_j) \cap \eta_{i-1}, \quad \Phi_{ij} = (\Theta_i \cup \Phi_j) \cap \xi_{j-1}.$$

Now $A_{ij}/\Theta_{ij} \cong B_{ij}/\Theta_i \cup \Phi_j$ follows from Lemma 1 (with $\Theta = \Theta_{ij}$, $\Phi = (\Theta_i \cup \Phi_j)_{A_i \cap B_j}$) therefore

$$A_{ij}/\Theta_{ij} \cong B_{ij}/\Phi_{ij},$$

hence again it remained only to verify (11), which is again reduced to (12). But $A_{ij} \subseteq A_i$ therefore it is in one class modulo η_{i-1} , thus the problem is reduced to $(\Theta_i \cup \Phi_j)_{A_i}$ and therefore the proof given at the end of Theorem 1 applies here too.

§ 4. Some definitions of normal series

The situation in groups and rings is very simple compared to abstract algebras (due to the fact that every homomorphism of a group or a ring is determined by its kernel) therefore it is difficult to find the most natural generalization of normal (and principal) series. I want to compare here some definitions.

GOLDIE defined the notion of a homomorphic relation R of an algebra A , which means a congruence relation of a subalgebra $D(R)$ of A . Further, he supposed the existence of a subalgebra A_0 contained in every subalgebra

of A , and he put $\{R\} = [A_0]R$, which he called the kernel of R . Then he defined a normal series to be a sequence of homomorphic relations $\iota = R_0, R_1, \dots, R_n = \omega_{A_0}$, such that $\{R_{i+1}\} \subseteq \{R_i\} \subseteq D(R_{i+1})$ and $\{R_i\}$ is closed under R_{i+1} . The quotient algebras are $\{R_i\}/R_{i+1}$. In this way, one might think, it is possible to get a stronger form of Theorem 1 since there we say nothing about the relations accompanying the refinements, while in this form every relation which was a member of a series will remain a member of the new series.

This is obviously true in the proof of Theorem 1 too. Simply, because $\Theta_{im} = \Theta_i$. But is it of any importance? In every application of the general theory (to groups, rings, loops, groupoids, semigroups or lattices) we consider only normal series in which A_{i+1} is an entire class modulo Θ_i ($i = 0, \dots, n-1$). In this case $A_{im}/\Theta_{im} = A_{im}/\Theta_i$ is a one element algebra. Therefore if we omit from the refined series the superfluous terms Θ_i will be among the omitted ones.

Let us see an example. Let B be a one element subalgebra of A such that A has two non-trivial congruence relations Θ, Φ ($\Theta \neq \Phi$) and B is closed under Θ and Φ . Then ι, Θ, ω_B and ι, Φ, ω_B are two normal series, the series of kernels of both is A, B, B . The refinements will be

$$\iota, \Theta \cup \Phi, \Theta, \omega_B, \quad \text{the kernels are } A, B, B, B;$$

$$\iota, \Theta \cup \Phi, \Phi, \omega_B, \quad \text{the kernels are } A, B, B, B.$$

And after omitting the superfluous terms, Θ and Φ drop out. In this situation this is inevitable.

STEINFELD [6] defines a normal sequences as a sequence of couples:

$$A = A_0(\Theta_0) \supseteq \dots \supseteq A_n(\Theta_n),$$

where A_i is a subalgebra of A and Θ_i is a congruence relation of A_i . But fixing the congruence relation to the subalgebra makes it impossible to define the refinement, see the example above.

To sum up, even if in the definition of normal series the congruence relations are included, in the actual applications they have no well defined connection with the congruence relations of the refined sequence. Therefore there is no loss if we do not fix in the definition the accompanying sequence of congruence relations.

However, my definition has a disadvantage. It is not obvious whether or not the isomorphism of normal series is a transitive relation. It would be of interest to find an answer to this problem.

Of course, it is very easy the change the definition so as to make the isomorphism of normal series transitive. Let us say that (6) and (8) are isomorphic if to any accompanying series (7) there corresponds an accompanying series (9) such that $A_i/\Theta_i \cong B_{k_i}/\Phi_{k_i}$.

Then e.g. Theorem 1 has to be modified as follows: "(7) and (9) can be chosen in such a way" is to be replaced by "to any accompanying series (7) there corresponds an accompanying series (9) such".

§ 5. Classes of algebras

If we analyse the proofs in § 2 and the proof of the statements made in § 1 we arrive at the conclusion, that the operations very seldom played rôle in them. Therefore it is not surprising that we can generalize these results by considering „algebras” where besides the sets only mappings are considered.

A *class of algebras* is a class of sets \mathbf{K} and a class of mappings \mathbf{H} , called *homomorphisms*. A $\varphi \in \mathbf{H}$ is always a many-one mapping $\varphi: A \rightarrow B$ where $A, B \in \mathbf{K}$.

To simplify the axioms we define the basic notions.

If $A \in \mathbf{K}$ and $B \subseteq A$, then B is called a *subalgebra* if there exists a $C \in \mathbf{K}$ and a $\varphi \in \mathbf{H}$, $\varphi: C \rightarrow A$ such that $C\varphi = B$.

An equivalence relation Θ on A ($A \in \mathbf{K}$) is a congruence relation if there exists a $B \in \mathbf{K}$ and a $\varphi \in \mathbf{H}$, $\varphi: A \rightarrow B$ such that $a \equiv b(\Theta)$ ($a, b \in A$) if and only if $a\varphi = b\varphi$.

The set of all subalgebras, resp. congruence relation on A ($A \in \mathbf{K}$) is denoted by $S(A)$ and $\Theta(A)$, respectively.

The notations we use (e.g. $[B]\Theta$) are the same as those defined in § 1. Now we list the axioms:

- I. if $\varphi_1: A \rightarrow B$, $\varphi_2: B \rightarrow C$ and $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{H}$, $A, B, C \in \mathbf{K}$, then $\varphi_1\varphi_2 \in \mathbf{H}$; further if $A = C$, $B \in \mathbf{K}$ and φ_1, φ_2 are one-to-one and onto then $\varphi_1 \in \mathbf{H}$ implies $\varphi_2 \in \mathbf{H}$;
- II. $\omega, \iota \in \Theta(A)$;
- III. $B \in S(A)$ and $\Theta \in \Theta(A)$ imply $\Theta_B \in \Theta(B)$;
- IV. if $B, C \in S(A)$ and $B \cap C$ is not void then $B \cap C \in S(A)$;
- V. $\Theta(A)$ is a \cup -semilattice, i.e. $\Theta \cup \Phi$ exists⁴ for every $\Theta, \Phi \in \Theta(A)$;
- VI. $B \in S(A)$ and $\Theta \in \Theta(A)$ imply $[B]\Theta \in S(A)$;
- VII. $B \in S(A)$, $\Theta, \Phi \in \Theta(A)$, $[B]\Theta = B$ and $[B]\Phi = B$ imply⁵
 $[B]\Theta \cup \Phi = B$;
- VIII. $B \in S(A)$, $\Theta \in \Theta(A)$, $\Phi \in \Theta(B)$ and $\Theta_B \leq \Phi$ imply⁶
 $\Theta(\Phi) \in \Theta([B]\Theta)$.

Since the notions of weakly associable congruence relations, normal series are defined in terms of congruence relations and subalgebras therefore these definitions apply in the general situation as well.

Theorem 1'. *Schreier's theorem for normal series holds for algebras satisfying axioms I—VIII.*

To verify this statement one has to observe that nothing else but axioms I—VIII were used in the proof of Theorem 1.

To prove Theorem 2 we used another axiom:

- IX. if $\Theta, \Phi \in \Theta(A)$, and we form $\Theta \cap \Phi$ in $P(A)$ then $\Theta \cap \Phi \in \Theta(A)$.

Theorem 2'. *Schreier's theorem for principal series holds for algebras satisfying axioms I—IX.*

⁴ We do not require that $\Theta \cup \Phi$ should be the same union as defined in § 1.

⁵ In other words, if B is closed under Θ and Φ it be closed under $\Theta \cup \Phi$.

⁶ $\Theta(\Phi)$ was defined in Lemma 1. Axiom VIII is the first statement of Lemma 1.

§ 6. Multi algebras

The notion of groups was generalized to multi groups⁷ by defining the product of two elements as a subset rather than an element. In the same way we define *multi algebras* as a couple $(A; F)$ where A is a set, $F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ and F_n is the set of *multi operations* of n variables; $f \in F_n$ if $f(a_1, \dots, a_n)$ is a unique subset of A for every n -tuple (a_1, \dots, a_n) of elements of A . Instead of $(A; F)$ we use again the notation A .

A subset B of A is a *subalgebra* if $b_1, \dots, b_n \in B, f \in F_n$ imply $f(b_1, \dots, b_n) \subseteq B$. If A and B are multi algebras then a many-one mapping $\varphi: A \rightarrow B$ is called a *homomorphism* if $f(a_1, \dots, a_n)\varphi = f(a_1\varphi, \dots, a_n\varphi)$ for every $f \in F_n$, where for a subset C of A , $C\varphi$ denotes the set of all $c\varphi, c \in C$. Accordingly, an equivalence relation θ is called a *congruence relation* if $a_i \equiv b_i(\theta), i = 1, 2, \dots, n, f \in F_n$ imply that to every $c \in f(a_1, \dots, a_n)$ there exists a $d \in f(b_1, \dots, b_n)$ such that $c \equiv d(\theta)$.

We are going to verify that the class of multi algebras **K** and the class of homomorphisms **H** satisfy axioms I—IX.

Axioms I—IV obviously hold true. Axioms V and VII and IX follow, as usual, from the following statement:

$\theta(A)$ is a complete sublattice of $P(A)$. This can be verified in the same way as for algebras by properly using the characterization of congruence relations, as given above.

To verify Axiom VI let B be a subalgebra and θ a congruence relation of A . If $c_1, \dots, c_n \in [B]\theta, f \in F_n$ then there exist $b_1, \dots, b_n \in B$ such that $c_i \equiv b_i(\theta), i = 1, 2, \dots, n$. Then $c \in f(c_1, \dots, c_n)$ implies the existence of a $d \in f(b_1, \dots, b_n)$ such that $d \equiv c(\theta)$. But $f(b_1, \dots, b_n) \subseteq B$ therefore $d \in B$, thus $c \in [B]\theta$ and $f(c_1, \dots, c_n) \subseteq [B]\theta$ follows.

The proof of Lemma 1 applies to multi algebras as well excepting the part where we proved that $\theta(\Phi)$ satisfies the substitution property. Arguments, as the one used in the above paragraph, can be applied to modify the proof. Therefore axiom VIII is valid. We get

Theorems 1' and 2'. *Theorems 1 and 2 hold true for multi algebras.*

Even more is true. We do not have to require that the *operations are finitary* and everything remains true. However, we do not go into the details.

Applications

Several applications of Theorems 1 and 2 are found in GOLDIE's paper [3]. In case of groups, rings any two congruence relations are weakly associative therefore Theorems 1 and 2 apply.

In case of semigroups (or even without the associativity of multiplication) we can get Schreier's theorems if the ideals take the place of subsemigroups and θ is a congruence relation if $x \equiv y(\theta)$ if and only if $x = y$ or x and y are elements of a fixed ideal. But in this case it is not enough to verify that any two congruence relations are permutable but one has to verify axioms I—IX as well. This is easy since all these statements are consequences of the fact that the set theoretical union and intersection of two ideals is again an ideal.

⁷ See e.g. BRUCK [2] and the bibliography therein.

A new application is the case of multi groups. In the paper [4] I introduced the notion of standard ideals in lattices (the English version of this paper is GRÄTZER and SCHMIDT [5], where a more detailed theory of standard ideals was given). Given an ideal S of a lattice L we can define a relation Θ_s on L as follows:

$x \equiv y(\Theta_s)$ if and only if $(x \cap y) \cup s = x \cup y$ for some $s \in S$. If Θ_s is a congruence relation then S is called a *standard ideal* and Θ_s is called a *standard congruence relation* (in [4] this is not the definition of a standard ideal, but an equivalent condition, see condition (γ) of Theorem 1, also the same in [5]). The set $\Theta_s(L)$ of all standard congruence relations is a sublattice of $\Theta(L)$ and $S(L)$ the set of all standard ideals form a sublattice of the lattice of all ideals of L . (This is Lemma 1 of [4], see Theorem 3 in [5] as well.)

Let \mathbf{L} be the class of all lattices, $L_1, L_2 \in \mathbf{L}$. A many one mapping $\varphi: L_1 \rightarrow L_2$ is called an *S-homomorphism* if there exists a standard ideal S in L_1 such that $a\varphi = b\varphi$ if and only if $a \equiv b(\Theta_s)$, further, every *isomorphism* is also called an *S-homomorphism*; let \mathbf{S} denote the class of *S-homomorphisms*. The class \mathbf{L}, \mathbf{S} just defined satisfies the axioms I—IX.

All axioms but axiom VIII are trivial or consequences of statements about standard ideals and congruences mentioned above.

To verify axiom VIII let B be a sublattice and S a standard ideal of L , T be a standard ideal of B such that⁸ $\Theta_T \leq (\Theta_s)_B$. We extend L by defining a zero element 0. Let $L_1 = \{L, 0\}$, $B_1 = \{B, 0\}$, $S_1 = \{S, 0\}$, $T_1 = \{T, 0\}$. If we verify axiom VIII for L_1 , B_1 , Θ_{S_1} and Θ_{T_1} , then it implies that it holds for L , B , Θ_S and Θ_T . Therefore we may suppose that L has a 0 and $0 \in B$.

We state that

1. $[B]\Theta_S = \{b \cup s; b \in B, s \in S\}$;
2. S is a standard ideal of $[B]\Theta_S$;
3. $[T]\Theta_S$ is a standard ideal of $[B]\Theta_S$.

If $\Theta = \Theta_S$, $\Phi = \Theta_T$ in B , $\Theta_B \leq \Phi$, then $\Theta(\Phi) = \Theta_{[T]\Theta_S}$ is an easy consequence of statement 3, therefore it is enough to prove statements 1—3.

Proof of 1. The relation

$$[B]\Theta_S \supseteq \{b \cup s; b \in B, s \in S\}$$

is obvious, further the right side is a \cup -semilattice containing B . Hence it is enough to prove that $\{b \cup s; b \in B, s \in S\}$ is a \cap -semilattice. Let $t_1 = b_1 \cup s_1$, $t_2 = b_2 \cup s_2$ ($b_1, b_2 \in B$, $s_1, s_2 \in S$), then $b_1 \equiv t_1(\Theta_S)$ and $b_2 \equiv t_2(\Theta_S)$; therefore $b_1 \cap b_2 \equiv t_1 \cap t_2(\Theta_S)$ implying the existence of an $s \in S$ with $t_1 \cap t_2 = (b_1 \cap b_2) \cup s$ which means $t_1 \cap t_2 \in \{b \cup s; b \in B, s \in S\}$ since $b_1 \cap b_2 \in B$.

Proof of 2. $[B]\Theta_S$ is a sublattice of L containing S therefore S is a standard ideal of $[B]\Theta_S$.

Proof of 3. We put $I = [T]\Theta_S$. Then $T \supseteq S$. We apply Theorem 9 of [4] (see also Theorem 14 of [5]) which says that I is standard in $[B]\Theta_S$ if and only if I/S (I/S denotes I/Θ_S) is standard in $[B]\Theta_S/\Theta_S$. But $x \rightarrow [x]\Theta_S$ is an isomorphism between B and $[B]\Theta_S/S$ carrying T into I/S . Therefore I is standard in $[B]\Theta_S/S$ if and only if I/S is standard in $[B]\Theta_S/S$ which in turn is equivalent to the fact that T is standard in B , which in fact holds true.

⁸ $(\Theta_S)_B$ is the restriction of Θ_S to the sublattice B .

Thus we get that we can apply Theorems 1' and 2' for lattices. Theorem 1' in this special case gives a generalization of the Jordan—Hölder—Schreier theorem of [4]. In the mentioned theorem we require that in a normal series $L = S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots \supseteq S_n$, S_i is a standard ideal of S_{i-1} . As an application of Theorem 1' we require only that S_i is a sublattice of S_{i-1} and that S_{i-1} as a lattice contains a standard ideal T_{i-1} such that

$$S_i = [S_n] \theta_{T_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

If, as an application we want to get only the original results we can define in \mathbf{L} the notion of homomorphism in the following way. φ is a homomorphism of L_1 into L_2 if φ is an S -homomorphism and $L_1 \varphi$ is an ideal in L_2 . In this case the verification of axioms I—IX is simpler.

The application of Theorem 2' to standard ideals gives a new result contained neither in [4], nor in [5].

(Received June 28, 1963)

REFERENCES

- [1] BIRKHOFF, G.: *Lattice theory*. New York, 1948.
- [2] BRUCK, R. H.: *A survey of binary systems*. Berlin, 1958.
- [3] GOLDIE, A. W.: "The Jordan-Hölder theorem for general abstract algebras". *Proc. London Math. Soc.* (2) **52** (1950) 107—131.
- [4] GRÄTZER, G.: "Standard ideálok" (Standard ideals). *MTA III. O. Közl.* **9** (1959) 81—97 (Hungarian).
- [5] GRÄTZER, G.—SCHMIDT, E. T.: "Standard ideals in lattices". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **12** (1961) 17—87.
- [6] STEINFELD, O.: "Über das Zassenhaus'sche Lemma in allgemeinen algebraischen Strukturen". *Annales Univ. Sci. Budapestinensis de R. Eötvös nom. Sectio Math.* **3—4** (1960/61) 309—314.
- [7] ZASSENHAUS, H. J.: *The theory of groups*. New York, 1948.

О ТЕОРЕМЕ JORDAN-HÖLDER ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

G. GRÄTZER

Автор предлагает более простое доказательство и дальнейшее распространения обобщения Goldie теоремы Jordan—Hölder.

ON A COMBINATORIAL PROBLEM IN LATIN SQUARES

P. ERDÖS and A. GINZBURG¹

1. Denote by S_n an arbitrary latin square with n elements $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. A row and column of this square, intersecting on the main diagonal (i.e. diagonal beginning at the left lower corner) will be called corresponding.

After striking out $n - c$ arbitrary rows and corresponding columns, a square T_c with $c \times c$ entries remains. Such a square will be called a principal minor. It is clearly determined by denoting its c elements belonging to the main diagonal.

Denote by k_{i_1, i_2, \dots, i_q} ($i_1, i_2, \dots, i_q = 1, 2, \dots, n$ all different) the number of columns in T_c containing the elements $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_q}$ simultaneously. Let $k^{(q)}$ be the minimum of k_{i_1, i_2, \dots, i_q} . We shall consider the following problem:

Assuming that n and $k^{(q)}$ are two given positive integers, what is the minimal c (denoted by b), such that from an arbitrary S_n at least one T_c can be obtained with the prescribed $k^{(q)}$.

The problem is solved by a method used already in [1] and [2].

The question for the case of $k^{(2)}$ arises in connection with so called generalized normal multiplication tables of groups (and other systems) [3], [4], [5]. Such tables are complete (i.e. the product of any two group elements appears explicitly in them) if and only if $k^{(2)} \geq 1$. E.g. the following

10	9	8	6	5	2	0
8	7	6	4	3	0	13
5	4	3	1	0	12	10
4	3	2	0	14	11	9
2	1	0	13	12	9	7
1	0	14	12	11	8	6
0	14	13	11	10	7	5

is a generalized normal multiplication table of the group Z_{15} (the cyclic group of order 15). The multiplication is performed according to the rule

$$g_{ij}g_{jk} = g_{ik},$$

¹ Technion, Israel Institute of Technology, Haifa.

where g_{ij} is the element placed at the intersection of the i -th column and j -th row.

It can be directly inspected that in the above table $k^{(2)} = 1$ and it is really complete. It can also be shown that for $n = 15$ and $k^{(2)} = 1$, $b \geq 7$.

2. From the definition of b follows directly

$$(1) \quad \binom{b}{q} b \geq k^{(q)} \binom{n}{q}.$$

Assuming that the main diagonal is occupied by one element a_1 , one improves (1) to

$$\binom{b-1}{q} b \geq k^{(q)} \binom{n-1}{q}.$$

The following theorem gives an upper bound for b when $k^{(q)} = 1$.

Theorem. *In any given n by n latin square there can be found a principal minor of order not more than*

$$C n^{\frac{q}{q+1}} (\log n)^{\frac{1}{q+1}}.$$

(C a sufficiently large absolute constant) containing every q -tuple $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_q})$ ($i_1, i_2, \dots, i_q = 1, 2, \dots, n$ all different) in some column.

Proof. We shall show that if $2t = \lceil C n^{\frac{q}{q+1}} (\log n)^{\frac{1}{q+1}} \rceil$ elements are chosen at random on the main diagonal, then all but $o\left(\binom{n}{2t}\right)$ of the principal minors so obtained will contain every q -tuple in some column.

For this it will suffice to show that the number of principal minors in which a given q -tuple (a_1, a_2, \dots, a_q) does not occur in any of its columns is $o\left(\frac{\binom{n}{2t}}{n^q}\right)$. We shall now estimate this number.

First we choose t elements at random. This can be done in $\binom{n}{t}$ ways.

Denote the chosen columns by i_1, i_2, \dots, i_t . In every i_s ($1 \leq s \leq t$) the elements a_1, a_2, \dots, a_q occur in the rows denoted correspondingly by $j_1^{(s)}, j_2^{(s)}, \dots, j_q^{(s)}$. When choosing the remaining t elements on the diagonal we have to take care that none of the t q -tuples $(j_1^{(s)}, j_2^{(s)}, \dots, j_q^{(s)})$ occurs amongst the t chosen elements, for otherwise (a_1, a_2, \dots, a_q) would occur in a column of our minor.

It is easy to show that there are at least $\frac{t}{q^2 - q + 1}$ of these q -tuples which are disjoint (this follows from the fact that there are at most q q -tuples which contain the same element). Denote the number of disjoint q -tuples by u . The number of t -tuples not containing any of the u q -tuples equals by a simple sieve process:

$$(2) \quad \binom{n-t}{t} - \binom{u}{1} \binom{n-t-q}{t-q} + \binom{u}{2} \binom{n-t-2q}{t-2q} - \dots$$

It can be shown that the sum (2) is $o\left(\frac{\binom{n-t}{t}}{n^q}\right)$ if $2t = [Cn^{\frac{q}{q+1}}(\log n)^{\frac{1}{q+1}}]$ where C is a sufficiently large absolute constant. Our proof of this fact uses standard probabilistic arguments and is inelegant and therefore we suppress it. (A proof due to Prof. N. G. DE BRUIJN is given in Addendum).

Now the total number of ways of choosing $2t$ elements on the diagonal so that no column of the obtained principal minor should contain the fixed q -tuple (a_1, a_2, \dots, a_q) is less than

$$\binom{n}{t} \cdot o\left(\frac{\binom{n-t}{t}}{n^q}\right) \cdot \frac{1}{\binom{2t}{t}} = o\left(\frac{\binom{n}{2t}}{n^q}\right).$$

Since there are $\binom{n}{q}$ q -tuples we obtain for all but $o\left(\frac{\binom{n}{2t}}{\binom{n}{q}}\right)$ choices principal minors of order $2t$ with every q -tuple in some column.

This completes the proof.

For $q = 1$ there is an explicit formula for the sum (2) (see [6] p. 316).

In this case $u = t$ and $\sum_{v=0}^t (-1)^v \binom{t}{v} \binom{n-t-v}{t-v} = \binom{n-2t}{t}$.

$$\begin{aligned} \text{Now } \frac{\binom{n}{t} \binom{n-2t}{t}}{\binom{n}{2t} \binom{2t}{t}} &= \frac{n! (n-2t)! (n-2t)! (2t)! t! t!}{(n-t)! t! (n-3t)! t! n! (2t)!} = \\ &= \frac{(n-2t)(n-2t-1) \dots (n-3t+1)}{(n-t)(n-t-1) \dots (n-2t+1)} = \left(1 - \frac{t}{n-t}\right) \left(1 - \frac{t}{n-t-1}\right) \dots \\ &\quad \dots \left(1 - \frac{t}{n-2t+1}\right) < \left(1 - \frac{t}{n}\right)^t < e^{-\frac{t^2}{n}}. \end{aligned}$$

For $2t = [Cn^{\frac{1}{2}}(\log n)^{\frac{1}{2}}]$ $e^{-\frac{t^2}{n}} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ if $C > 2$.

3. At present we can not decide if this theorem is close to being best possible (from (1) it follows that in any case $b > n^{q/(q+1)}$). It seems though that it will not be easy to improve it with the method of this paper. Following a suggestion of Prof. H. HANANI we can show that for any p prime or a power of a prime a quadratic table of $p^2 + p + 1$ by $p^2 + p + 1$ can be constructed containing $p^3 + p^2 + p + 1$ elements, such that any pair of these elements occurs at least in one column of the table and no element occurs more than once in one column or one row of it. This can be done as follows: it is well known that from $p^2 + p + 1$ elements $p^2 + p + 1$ $p + 1$ -tuples can be formed with every pair of elements in one (and only one) $p + 1$ -tuple. Now replace

every one of the above $p^2 + p + 1$ elements by p new elements and a „zero”. The total number of the obtained elements will now be $p^3 + p^2 + p + 1$ and they are divided in $p^2 + p + 1$ $p^2 + p + 1$ -tuples. Every pair of the new elements occur clearly in one of the $p^2 + p + 1$ -tuples. (Some of the pairs occur in $p + 1$ such $p^2 + p + 1$ -tuples.) It is easy to see that the replacing can be performed in such a way, that no element occurs twice in one row of the obtained quadratic table. This table can now be extended to a latin square, since it fulfils the condition of RYSER [7].

4. A number of unsolved problems arise in connection with the above one:

- 1) To find bounds for b in case when $k^{(q)} > 1$.
- 2) Given three positive integers n , $k^{(q)}$, d . What is the minimal c such that from an arbitrary S_n at least one T_c can be obtained (if any) with

$$\max(k_{i_1, i_2, \dots, i_q}) - k^{(q)} \leq d.$$

- 3) Given an arbitrary S_n . What is the c of the maximal minor (not necessarily principal) in which all elements are different.

Addendum

The following proof is due to Prof. N. G. DE BRUIJN.

$$\begin{aligned} \Sigma &= \binom{m}{t} - \binom{u}{1} \binom{m-q}{t-q} + \binom{u}{2} \binom{m-2q}{t-2q} - \dots = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int (1+x)^m x^{t-1-m} \left[1 - \frac{1}{(1+x)^q} \right]^u dx, \end{aligned}$$

where the integration is performed along a circle around 0. There is a saddle point near $x = \frac{m}{t}$, so we take the radius of the circle equal to $\frac{m}{t}$.

The contribution of the saddle point is about $\left[1 - \left(1 + \frac{m}{t} \right)^{-q} \right]^u$ times what it would be if $u = 0$. If $u = 0$ it has the value $\binom{m}{t}$, so under the assumption

$$t = C_1 m^{\frac{q}{q+1}} (\log m)^{\frac{1}{q+1}}, \quad u = \theta t, \quad \frac{1}{q^2 - q + 1} \leq \theta \leq 1,$$

u and q are integers, $q = O(1)$, we find for Σ

$$\Sigma \sim \binom{m}{t} \exp \left[- \left(\frac{t}{m} \right)^q u \right] = \binom{m}{t} \exp (-\theta C_1^{q+1} \log m).$$

So indeed it is $o \left(m^{-q} \binom{m}{t} \right)$ if C_1 is large enough.

(Received July 13, 1963)

BIBLIOGRAPHY

- [1] ERDŐS, P.: "Graph theory and probability." I.: *Can. J. Math.* **11** (1959) 34—38.
II.: *Can. J. Math.* **13** (1961) 346—352.
- [2] ERDŐS, P.: "Some remarks on the theory of graphs." *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947) 292—294.
- [3] TAMARI, D.: "Les images homomorphes des groupoides de Brandt et l'immersion des semi-groupes." *Comptes rendus* **229** (1949) 1291—93.
- [4] TAMARI, D.: "Représentations isomorphes par de systèmes de relations. Systèmes associatifs." *Comptes rendus* **232** (1951) 1332—34.
- [5] GINZBURG, A.: "Systèmes multiplicatifs de relations. Boucles quasiassociatives." *Comptes rendus* **250** (1960) 1413—16.
- [6] NETTO, E.: *Lehrbuch der Kombinatorik*. II. Auflage. Chelsea P. C. N. Y.
- [7] RYSER, H. J.: "A combinatorial theorem with an application to latin rectangles." *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951) 550—552.

ОБ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ПРОБЛЕМЕ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Р. ERDŐS и А. GINZBURG

Резюме

Авторы занимаются до сих пор не исследованными свойствами латинских квадратов. Оценивают сверху порядок миноров, обладающих некоторыми свойствами. Авторы указывают на то, что исследованные ими проблемы связаны с, так называемой, обобщенной нормальной таблицей операций. В конце работы отмечены открытые проблемы, из них особенно третья кажется интересной.

SUR UN CRITÈRE D'APPROXIMATION UNIFORME

par
ÁKOS CSÁSZÁR

À la mémoire de mon ami
regretté J. Czipser

Dans un ouvrage récent [1] de J. CZIPSZER et de l'auteur le critère général suivant d'approximation uniforme a été démontré:

(A) Soient E un ensemble quelconque et \mathfrak{S} une classe de fonctions réelles définies sur E , jouissant des propriétés suivantes:

- (1) Les fonctions $f \in \mathfrak{S}$ sont bornées;
- (2) Les fonctions constantes appartiennent à \mathfrak{S} ;
- (3) $f \in \mathfrak{S}$ implique $f + c \in \mathfrak{S}$ pour tout nombre réel c ;
- (4) Si $f, g \in \mathfrak{S}$, on a $\max(f, g) \in \mathfrak{S}$ et $\min(f, g) \in \mathfrak{S}$.

Supposons que, pour une fonction réelle bornée F et des nombres $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ quelconques, il existe des fonctions $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{S}$ satisfaisant à la condition

- (5) $x, y \in E, F(y) - F(x) \geq \varepsilon$ entraînent $\max_i (f_i(y) - f_i(x)) \geq \delta$.

Alors la fonction F peut être approchée uniformément aussi près que l'on veut par des fonctions appartenant à \mathfrak{S} .

Nous avons déduit de ce critère plusieurs corollaires, en particulier un critère dû à G. NÖBELING et H. BAUER ([2], p. 58, Korollar).

En examinant les possibilités de généraliser le théorème (A), nous avons montré ([1], § 3, exemple 2) que si l'on supprime des hypothèses la condition (3), le théorème cesse d'être valable. Dans ce qui suit, je vais examiner du même point de vue les autres conditions figurant dans l'hypothèse de (A) et je vais montrer que (A) n'est plus valable dès qu'on supprime une quelconque des conditions (1) à (4). Par contre, la condition d'après laquelle la fonction à approcher F doit être bornée, peut être omise sans toucher la validité du théorème.

1. Posons $E = (-\infty, +\infty)$ et soit \mathfrak{S} le plus petit treillis contenant les polynômes (rationnels), c'est-à-dire la classe des fonctions ayant la forme

$$(1.1) \quad f(x) = \max(g_1(x), \dots, g_n(x)),$$

où

$$(1.2) \quad g_i(x) = \min(h_{i1}(x), \dots, h_{in_i}(x))$$

et les $h_{ij}(x)$ sont des polynômes. On constate aisément que cette classe \mathfrak{S} satisfait aux conditions (2) à (4). De plus, pour la fonction $F(x) = \sin x$, $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, les fonctions $f_1(x) = \frac{\delta}{\varepsilon} x \in \mathfrak{S}$, $f_2(x) = -\frac{\delta}{\varepsilon} x \in \mathfrak{S}$ satisfont à (5). Cependant, F n'est pas limite uniforme de fonctions appartenant à \mathfrak{S} . En effet, si f est

donné par (1.1) et (1.2), vu que la différence de deux polynômes ne change de signe qu'un nombre fini de fois, il existe des nombres c_i et des indices $1 \leq m_i \leq n_i$ tels que

$$g_i(x) = h_{im_i}(x) \quad \text{pour } x \geq c_i;$$

de même, il existe un nombre c et un indice $1 \leq k \leq n$ tels que

$$f(x) = g_k(x) = h_{km_k}(x) \quad \text{pour } x \geq c.$$

Par suite, on a soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$, soit $f(x) = a$ pour $x \geq c$.

2. Posons $E = [0, 1]$ et désignons par \mathfrak{S} la classe des fonctions continues dans $[0, 1]$ telles que

$$(2.1) \quad f(y) - f(x) \geq y - x \quad \text{pour } 0 \leq x < y \leq 1.$$

Les conditions (1) et (3) sont évidemment remplies; il en est de même pour (4). En effet, si $f, g \in \mathfrak{S}$ et $h = \max(f, g)$ ou $h = \min(f, g)$, alors

$$h(y) - h(x) \geq y - x$$

est valable pour $0 \leq x < y \leq 1$ lorsque $h(x) = f(x)$, $h(y) = f(y)$ ou $h(x) = g(x)$, $h(y) = g(y)$; or, si par exemple $h(x) = f(x)$, $h(y) = g(y)$, il y a un z tel que $x \leq z \leq y$, $f(z) = g(z) = h(z)$, et alors

$$h(z) - h(x) = f(z) - f(x) \geq z - x,$$

$$h(y) - h(z) = g(y) - g(z) \geq y - z,$$

donc

$$h(y) - h(x) \geq y - x.$$

De plus, pour $F(x) = \frac{x}{2}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, la condition (5) est remplie

en choisissant la seule fonction $f(x) = \frac{\delta'}{2\varepsilon} x \in \mathfrak{S}$ où $\delta' = \max(\delta, 2\varepsilon)$. Pourtant,

la classe \mathfrak{S} étant évidemment fermée par rapport à la convergence uniforme, la fonction $F \notin \mathfrak{S}$ ne peut pas être approchée aussi près que l'on veut par des fonctions appartenant à \mathfrak{S} .

3. Soient E le disque fermé $x^2 + y^2 \leq 1$ dans le plan et \mathfrak{S} la classe des fonctions continues sur E et harmoniques à l'intérieur de E . Cette classe satisfait évidemment aux conditions (1) à (3). Posons $F(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ sont donnés et

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1) \geq \varepsilon,$$

alors

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \geq \varepsilon$$

en vertu de l'inégalité du triangle, donc les fonctions

$$f_1(x, y) = \frac{2\delta}{\varepsilon} x, \quad f_2(x, y) = \frac{2\delta}{\varepsilon} y,$$

$$f_3(x, y) = -\frac{2\delta}{\varepsilon} x, \quad f_4(x, y) = -\frac{2\delta}{\varepsilon} y$$

(appartenant à \mathfrak{S}) satisfont à la condition (5). Cependant, la classe \mathfrak{S} étant fermée par rapport à la convergence uniforme, la fonction $F \notin \mathfrak{S}$ ne peut pas être approchée uniformément aussi près que l'on veut par des fonctions appartenant à \mathfrak{S} .

4. Nous allons montrer que, dans le théorème (A), on peut supprimer la condition que la fonction F soit bornée, cette condition étant une conséquence des autres hypothèses du théorème; la même remarque s'applique aux corollaires déduits de (A) dans [1]. Tout cela s'ensuit du lemme suivant:

Soient E un ensemble quelconque et \mathfrak{S} une classe de fonctions réelles bornées sur F . Supposons que, pour une fonction réelle F et $\varepsilon > 0$ quelconque, il existe un nombre $\delta > 0$ et des fonctions $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{S}$ satisfaisant à (5). Alors F est bornée sur E .

Démonstration. En raisonnant par l'absurde, supposons p. ex. que F n'est pas bornée supérieurement. À un $\varepsilon > 0$ donné, cherchons un $\delta > 0$ et des fonctions $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{S}$ satisfaisant à (5). Soit $\{x_k\}$ une suite d'éléments de E tels que

$$(4.1) \quad F(x_{k+1}) - F(x_k) \geq \varepsilon.$$

Par conséquent, on peut faire correspondre à chaque indice k un $i(k)$ tel que $1 \leq i(k) \leq n$ et

$$f_{i(k)}(x_k) - f_{i(k)}(x_1) \geq \delta.$$

Il existe un i_1 tel que $i(k) = i_1$ est valable pour une infinité des indices k , de sorte qu'on peut trouver une suite partielle $\{x_{1j}\}$ de la suite $\{x_k\}$ telle que $x_{11} = x_1$ et

$$f_{i_1}(x_{1j}) - f_{i_1}(x_{11}) \geq \delta \quad (j > 1).$$

De la même façon, on peut choisir eu égard à (4.1) un indice i_2 et une suite partielle $\{x_{2j}\}$ de la suite $\{x_{1j}\}$ telle que $x_{21} = x_{12}$ et

$$f_{i_2}(x_{2j}) - f_{i_2}(x_{21}) \geq \delta \quad (j > 1).$$

En général, soit $\{x_{mj}\}_{j=1,2,\dots}$ une suite partielle de la suite $\{x_{m-1,j}\}_{j=1,2,\dots}$ telle que $x_{m1} = x_{m-1,2}$ et

$$(4.2) \quad f_{i_m}(x_{mj}) - f_{i_m}(x_{m1}) \geq \delta \quad (j > 1)$$

pour un indice i_m convenable ($1 \leq i_m \leq n$).

Or, dans la suite $\{i_m\}$, un indice doit figurer une infinité de fois, disons

$$(4.3) \quad i_{m_p} = i. \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Posons

$$(4.4) \quad y_p = x_{m_p 1}.$$

La suite $\{x_{m_p j}\}_{j=1,2,\dots}$ étant une suite partielle de la suite $\{x_{m_p-1,j}\}_{j=1,2,\dots}$, il existe un indice $j_p > 1$ tel que

$$(4.5) \quad y_p = x_{m_p-1,j_p}.$$

Donc

$$f_i(y_p) - f_i(y_{p-1}) = f_{i_{m_{p-1}}}(x_{m_{p-1}p}) - f_{i_{m_{p-1}}}(x_{m_{p-1}1}) \geq \delta$$

d'après (4.2) à (4.5). Il en résulte $f_i(y_p) \rightarrow +\infty$ pour $p \rightarrow +\infty$, contrairement à ce que la fonction $f_i \in \mathfrak{S}$ est bornée.

Remarque. Ce lemme peut être déduit d'un théorème de F. P. RAMSEY appartenant à la théorie des graphes (v. [3]); en effet, notre démonstration fournit un des résultats de [3].

(Reçu le 16 Juillet 1963)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CSÁSZÁR, Á.—CZIPSZER, J.: "Sur des critères généraux d'approximation uniforme." *Annales Univ. Sci. Budapest., Sectio Math.* **6** (1963) 17—26.
- [2] NÖBELING, G.—BAUER, H.: "Allgemeine Approximationskriterien mit Anwendungen." *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **58** (1955) 54—72.
- [3] RAMSEY, F. P.: "On a problem of formal logic." *Proc. London Math. Soc.* (2) **30** (1930) 264—286.

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ, СВЯЗАННОМ С РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ

Á. CSÁSZÁR

Резюме

В работе [1] автор и ныне покойный J. CZIPSZER доказали следующую теорему:

Пусть E — произвольное множество, \mathfrak{S} — множество действительных функций, определённых на E . Предположим следующее:

- (1) Функции $f \in \mathfrak{S}$ ограничены;
- (2) Постоянные принадлежат множеству \mathfrak{S} ;
- (3) Если $f \in \mathfrak{S}$, то и $f + C \in \mathfrak{S}$ для любого действительного числа C ;
- (4) Если $f, g \in \mathfrak{S}$, то и $\max(f, g) \in \mathfrak{S}$, $\min(f, g) \in \mathfrak{S}$.

Предположим, что для ограниченной функции F и для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существуют такие функции $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{S}$, что если

- (5) $x, y \in E$ и $F(y) - F(x) \geq \varepsilon$, то $\max(f_i(y) - f_i(x)) \geq \delta$.

Тогда функцию F можно с произвольной точностью равномерно аппроксимировать функциями из множества \mathfrak{S} .

Это обобщение одной из теорем работы [2].

В этой работе на примерах показано, что каждое из условий (1), (2) и (4) является в теореме необходимым (по отношению к условию (3) это было доказано в [1]). Однако требование ограниченности функции F можно опустить, поскольку из (1) и из того, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ можно найти функции $f_i \in \mathfrak{S}$, удовлетворяющие условию (5), уже следует, что и F ограничена.

ÜBER DIE TOPOLOGISCHE NATUR EINIGER ALLGEMEINER SÄTZE DER THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN

VON
KARL SZILÁRD

In dem vorliegenden Artikel soll gezeigt werden, dass die unten angeführten allgemeinen Sätze der Theorie der elliptischen Funktionen für allgemeinere Klassen der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, als die Klasse der analytischen Funktionen (*mutatis mutandis*) gültig sind.

Diese Sätze sind die folgenden (s. z. B. [4]):

1. Wenn die doppeltperiodische analytische Funktion $f(z)$ der komplexen Veränderlichen z keinen singulären Punkt besitzt, so ist sie eine Konstante.

2. Die doppeltperiodische meromorphe Funktion $f(z)$ vom Grade $r \geq 2$ nimmt in jedem (»kleinsten«) Periodenparallelogramm einen beliebigen gegebenen komplexen Wert genau r -mal an (mehrfache Werte entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt.)

3. Eine doppeltperiodische meromorphe Funktion mit einem einzigen einfachen Pol im Periodenparallelogramm kann nicht existieren.

Das Interesse an der Verallgemeinerung solcher Sätze für Klassen nicht-analytischer Funktionen erklärt sich dadurch, dass in den letzten drei Jahrzehnten von mehreren Verfassern komplexwertige Funktionen einer komplexen Veränderlichen untersucht worden waren, deren Realteil und Imaginärteil einem System partieller Differentialgleichungen, welches allgemeiner als das System der Cauchy—Riemannschen Differentialgleichungen ist, genügen (s. [1] und [2]). Es wurden zum Beispiel solche komplexwertige Funktionen $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ untersucht deren Realteil u und Imaginärteil v das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} v_y &= au_x + bu_y \\ -v_x &= du_x + cu_y \\ (4ac - (b+d)^2 > 0; \quad a > 0), \end{aligned} \tag{1}$$

wo a, b, c und d gegebene stetige Funktionen von x, y, u und v sind, befriedigen (s. [1], wo auch weitere Literatur angeführt wird). Natürlich sind solche Funktionen im Allgemeinen (d. h. für beliebige a, b, c, d , die der obenangeführten Bedingungen genügen) nichtanalytisch. Doch kann man auch für eine beliebige Funktionenklasse die aus allen Lösungen $f = u + iv$ eines bestimmten Gleichungssystems vom Typ (1) besteht, von »ganzen rationalen«, von »ganzen«, »doppeltperiodischen« usw. Funktionen genau so, wie in der klassischen Funktionentheorie sprechen, und sie durch ähnliche Mittel, wie dies im klassischen Falle geschieht, untersuchen. (Die Anführungszeichen

sollen andeuten, dass es sich um Analoga der gleichbenannten Funktionen aus der klassischen Funktionentheorie handelt.) Die Analoga der elliptischen Funktionen in solchen Klassen sind, soweit es dem Verfasser bekannt ist, mit direkten Methoden bisher wenig untersucht worden (vergl. indessen [3]).

Im Folgenden werden wir von den zu betrachtenden Funktionen $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen nur verlangen, dass sie folgende Eigenschaften besitzen sollen (unter gewissen Annahmen über die Koeffizienten a , b , c und d wird es sich hierbei auch um Funktionen $f = u + vi$ handeln, deren Realteil und Imaginärteil einem System vom Typ (1) genügen):

a) Der Definitionsbereich von $f(z)$ ist die ganze endliche z -Ebene mit eventueller Ausnahme von isolierten Punkten, sie ist in jedem Punkte des Definitionsbereiches eindeutig und stetig.

b) $f(z)$ nimmt ihre Werte isoliert an (d. h., wenn $f(z_0) = \zeta_0$ so gibt es um z_0 als Mittelpunkt einen Kreis in dem sonst $f(z) \neq \zeta_0$ ist), oder aber $f(z) \equiv \text{Const.}$

c) Liegt der Punkt z_0 im Innengebiet einer Jordanschen Kurve Γ die selbst, samt Innengebiet aus lauter Punkten des Definitionsbereiches von $f(z)$ besteht, so ist

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - f(z_0)] > 0,$$

wenn z die Kurve Γ im »positiven Sinne« durchläuft (es wird selbstverständlich angenommen, dass auf der Kurve Γ selbst $f(z) \neq f(z_0)$ ist).

d) Es sei z_1 ein Punkt in dem $f(z)$ ($\neq \text{Const.}$) nicht definiert ist und M eine (beliebig gross gewählte) positive Zahl. Dann gibt es um z_1 als Mittelpunkt einen Kreis mit einem Radius $\varrho > 0$, dessen übrigen Punkte, d. h. alle Punkte z mit $0 < |z - z_1| \leq \varrho$, zum Definitionsbereich von $f(z)$ gehören und für welche gilt: $|f(z)| \geq M$. Den Punkt z_1 bezeichnen wir als »Pol« der Funktion $f(z)$ d. h. wir postulieren: $f(z)$ soll höchstens Pole als singuläre Stellen besitzen.

e) $f(z)$ ist doppeltperiodisch, d. h. es gibt zwei komplexe Zahlen ω_1 und ω_2 ($\neq 0$) deren Quotient ω_1/ω_2 nicht reell ist und für welche gilt: $f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2)$.

Der Kürze halber werden wir Funktionen mit den Eigenschaften a), b), c), d), e) als »doppeltperiodische Funktionen der Klasse P « bezeichnen. Es ist bekannt (s. [5]), dass die Funktionen $w = f(z) \neq \text{Const.}$ mit den Eigenschaften a), b) und c) gebietstreue Abbildungen verwirklichen.

Der Vollständigkeit halber soll der bekannte Beweis dieses Satzes hier angeführt werden: Ist $w = f(z)$ eine Funktion mit den Eigenschaften a), b) und c) und ist Γ ein kleiner Kreis mit einem Radius $\varrho_0 > 0$ um einen Punkt z_0 ihres Definitionsbereiches (z_0 ist der Mittelpunkt und auf Γ selbst soll $f(z) \neq w_0 = f(z_0)$ sein), so haben wir wegen c) $\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - w_0] > 0$, wenn z die Kreislinie Γ im positiven Sinne einmal umläuft. Γ' sei das Bild von Γ in der w -Ebene. Auf Γ' selbst ist, wegen der Stetigkeit von $f(z)$, $\text{Min } |f(z) - w_0| = \varrho_1 > 0$. Das bedeutet, dass in der w -Ebene die Kreisscheibe $|w - w_0| \leq \varrho_1/2$ keinen Punkt mit der Kurve Γ' gemeinsam hat. Daraus folgt, dass sämtliche w_1 -Werte mit $|w_1 - w_0| < \varrho_1/2$ von der Funktion $w = f(z)$ im Kreise $|z - z_0| \leq \varrho_0$ angenommen werden. Für alle diese w_1 -Werte gilt nämlich:

$$\text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - w_1] = \text{Var}_{\Gamma} \arg [f(z) - w_0] > 0$$

(s. [5], Seite 655), woraus nach einem bekannten Satze (s. daselbst) folgt, dass es wenigstens ein Punkt z_1 ($|z_0 - z_1| < \varrho_0$) mit $f(z_1) = w_1$ existiert. Somit ist die Abbildung $z \rightarrow w = f(z)$ in der Umgebung von z_0 gebietstreu, was auch gezeigt werden sollte.

Für die doppeltperiodischen Funktionen der Klasse P beweisen wir nun vier Sätze.

Satz 1. *Es sei $f(z)$ eine doppeltperiodische Funktion der Klasse P . Wenn sie keinen Pol besitzt (d. h. für alle $z \neq \infty$ definiert ist), so ist sie eine Konstante.*

Beweis. Es seien $z = 0$, $z = \omega_1$, $z = \omega_2$ und $z_1 = \omega_1 + \omega_2$ die Eckpunkte des Periodenparallelogramms T in dessen Innerem und auf dessen Rande $f(z)$ keinen Pol besitzt und somit stetig ist. Dann ist die Menge \mathfrak{B} der Bildpunkte $w = f(z)$; $z \in T$, beschränkt und abgeschlossen. Die Menge \mathfrak{B} ist wegen der doppelten Periodizität von $f(z)$ überhaupt der Menge aller Bildpunkte $w = f(z)$ identisch, wenn z alle endlichen Werte in der z -Ebene annimmt. Es sei nun $f(z) \neq \text{Const.}$ Dann ist die Abbildung $z \rightarrow w = f(z)$ gebietstreu. w_0 sei ein Randpunkt von \mathfrak{B} (\mathfrak{B} besitzt Randpunkte, da sie beschränkt und abgeschlossen ist) und es sei z_0 ein w_0 entsprechender Wert in der z -Ebene [$w_0 = f(z_0)$, — natürlich kann es mehrere solche z_0 -Werte geben]. Da $w_0 = f(z_0)$ ein Randpunkt ist, kann die Abbildung $z \rightarrow w$ im Punkte z_0 nicht gebietstreu sein und somit kann auch $f(z)$ nicht $\neq \text{Const.}$ sein. Die Annahme $f(z) \neq \text{Const.}$ führt also zu einem Widerspruch, daher muss $f(z) \equiv \text{Const.}$ sein, w. z. b. w.

Genau so, wie der Satz 1 wird folgender Satz 1a bewiesen.

Satz 1a. *Die doppeltperiodische Funktion $f(z) \neq \text{Const.}$ der Klasse P nimmt alle komplexen Werte w an.*

Um den Beweis auszuführen braucht man nur zu bemerken, dass wenn es einen komplexen Wert w_1 gäbe, der von $f(z)$ nicht angenommen worden wäre, so müsste die Menge der Bildpunkte mindestens einen Randpunkt w_0 besitzen und weiter (d. h. von der Stelle des Nachweises der Existenz eines Randpunktes an) kann der Beweis des Satzes 1 wörtlich wiederholt werden.

Satz 2. *Es sei R die Anzahl der Pole im Periodenparallelogramm der doppeltperiodischen Funktion $f(z)$ der Klasse P und w_0 sei eine beliebige komplexe Zahl. Dann nimmt $f(z)$ im Periodenparallelogramme den Wert w_0 genau R -mal an (mehrfache Werte entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt s. [5], Seite 258).*

Bevor wir zum Beweise übergehen soll der Begriff des »kleinsten« Periodenparallelogramms näher beschrieben werden (s. [4], Seite 139). Zu einem Periodenparallelogramm T mit den Ecken z_0 , $z_0 + \omega_1$, $z_0 + \omega_1 + \omega_2$, $z_0 + \omega_2$ zählen wir alle inneren Punkte des Parallelogramms und ausserdem die Randpunkte z_0 , $z_0 + t\omega_1$, $z_0 + t\omega_2$, wo $0 < t < 1$ ist (zum Beispiel die Eckpunkte $z_0 + \omega_1$ und $z_0 + \omega_2$ werden nicht mehr zum Periodenparallelogramm gezählt). Dadurch wird erreicht, dass »in einem Periodenparallelogramm« von den abzählbar unendlich vielen Punkten $z_1 \pm n\omega_1 \pm m\omega_2$ (z_0 ist ein fixierter Punkt der z -Ebene; $n, m = 0, 1, 2, \dots$) genau einer liegen wird, den wir als Repräsentant dieser Punktmenge im Periodenparallelogramm T betrachten werden. Zum Beispiel ist z_1 ein Pol der Funktion $f(z)$ in T , dann sind die Punkte $z_1 \pm n\omega_1 \pm m\omega_2$ auch Pole von $f(z)$, jedoch nur z_1 von ihnen wird zum Periodenparallelogramm T gezählt. In diesem Sinne merken wir uns: Die Funktion $f(z)$ hat in einem Periodenparallelogramm endlich viele Pole (was laut a) leicht zu zeigen ist). Sie liegen im Inneren von

T , oder aber auf den Seiten $z_0 + t_1 \omega_1$; ($0 \leq t_1 < 1$) und $z_0 + t_2 \omega_2$; ($0 \leq t_2 < 1$). Diejenigen, welche im Inneren von T liegen, bilden eine endliche Punktmenge, welche vom Rande von T einen positiven Abstand ϱ hat und es ist leicht einzusehen, dass man durch Verschiebung des Systems der Periodenparallelogramme um weniger als ϱ zu einem neuen System der Periodenparallelogramme gelangen kann in dem alle Pole von $f(z)$ innere Punkte der Periodenparallelogramme sind. Dementsprechend nehmen wir auch für das Weitere an, dass alle Pole von $f(z)$ innere Punkte der Periodenparallelogramme sind. Auch können wir uns mit Hilfe der Eigenschaften a) und d) klarmachen, dass $f(z)$ in einem Periodenparallelogramm einen komplexen Wert w_0 nur endlich oft annimmt. Fixieren wir diesen Wert, so werden wir für den nächstfolgenden Beweis annehmen, dass die w_0 -Stellen von $f(z)$ auch im Inneren von T liegen.

Den Satz 2 beweisen wir nun folgendermassen:

Es sei R die Anzahl der Pole und N die Anzahl der w_0 -Stellen von $f(z)$ im Periodenparallelogramm T . (Auf dem Rande gibt es keine Pole und keine w_0 -Stellen.) Nach einem für Funktionen der Klasse P gültigen Satze ist (s. [5], Seite 658)

$$\frac{1}{2\pi} \text{Var}_T \arg[f(z) - w_0] = N - R$$

wo durch T der im positiven Sinne durch z einmal umlaufene Rand des Periodenparallelogramms bezeichnet wird (selbstverständlich werden hier zum Rande alle vier Seiten des Parallelogramms hinzugerechnet). Die Zahl $(N-R)$ ist aber gleich Null, da sich die Änderungen des Argumentes von $[f(z) - w_0]$ beim Durchlaufen der einander gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms T wegen der Periodizität von $f(z)$, gegenseitig aufheben (werden doch die einander gegenüber liegenden Seiten durch z in entgegengesetzten Richtungen durchgelaufen). Somit ist $N = R$, w. z. b. w.

Satz 3. *Es kann keine doppeltperiodische Funktion der Klasse P mit einem einzigen einfachen Pol innerhalb des Periodenparallelogramms existieren.*

Beweis. Nehmen wir an, dass $f(z)$ im Periodenparallelogramm T einen einzigen einfachen Pol besitzt. Wie vorhin dürfen wir annehmen, dass dieser Pol ein innerer Punkt von T ist. Nach dem vorigen Satze wird jeder komplexe Wert w_1 von der Funktion $f(z)$ in T genau einmal angenommen. Daraus folgt, dass das Bild der Seite $(z_0 + t_1 \omega_1)$, wo $0 \leq t_1 \leq 1$ in der w -Ebene eine einfache Jordan'sche Kurve \mathfrak{S}_1 ist, welche ein beschränktes Innengebiet besitzt. Genau so ist das Bild der Seite $(z_0 + t_2 \omega_2)$, wo $0 \leq t_2 \leq 1$ auch eine einfache Jordansche Kurve \mathfrak{S}_2 welche mit \mathfrak{S}_1 einen gemeinsamen Punkt hat — nämlich den Punkt $w_0 = f(z)$. Die beiden Kurven \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 müssen aber wenigstens einen zweiten gemeinsamen Punkt haben. Betrachten wir nämlich eine genügend kleine kreisförmige Umgebung \mathfrak{Q} des Punktes z_0 (der Punkt z_0 ist der Mittelpunkt von \mathfrak{Q}), so ist das durch die Abbildung $z \rightarrow w = f(z)$ entstandene Bild \mathfrak{Q}_1 von \mathfrak{Q} ein durch eine Jordansche Kurve begrenztes Gebiet in der w -Ebene zu dem w_0 als innerer Punkt gehört. Die beiden Kurven \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 schneiden sich in w_0 . \mathfrak{S}_1 teilt das Gebiet \mathfrak{Q}_1 in zwei Teile, der eine Teil gehört zum Innengebiete, der andere zum Aussengebiete der Jordanschen Kurve \mathfrak{S}_1 . Die Kurve \mathfrak{S}_2 verbindet Punkte dieser beiden Teile innerhalb von \mathfrak{Q}_1 , doch besitzt sie, falls der Kreis \mathfrak{Q} genügend klein gewählt wurde, Randpunkte von \mathfrak{Q}_1 sowohl im Innengebiete, als auch im Aussengebiete von \mathfrak{S}_1 , welche

sie miteinander verbindet ohne dabei sonst das Gebiet \mathfrak{L}_1 zu treffen. Nach dem Jordanschen Kurvensatze muss also \mathfrak{S}_2 die Kurve \mathfrak{S}_1 wenigstens in einem Punkte ausserhalb \mathfrak{L}_1 schneiden, und dieser Punkt w_1 kann also mit w_0 nicht identisch sein. w_1 muss sowohl einem Punkte $(z_0 + t_1\omega_1)$ als auch einem Punkte $(z_0 + t_2\omega_2)$ entsprechen ($0 < t_1 < 1$ und $0 < t_2 < 1$) und wir gelangen zu dem Widerspruch dass $f(z)$ einen Wert w_1 in T nicht einmal, sondern mindestens zweimal annehmen muss und die Abbildung $z \rightarrow w = f(z)$ in T nicht umkehrbar eindeutig sein kann, w. z. b. w.

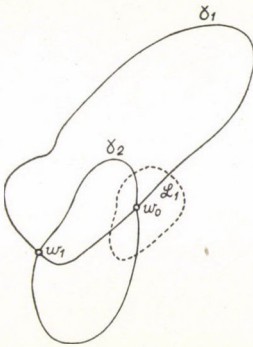


Fig. 1.

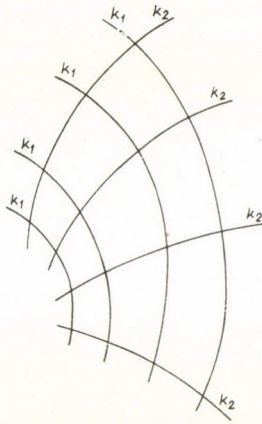


Fig. 2.

Die angeführten Sätze können noch weiter verallgemeinert werden, denn die Funktionen $f(z)$ brauchen gar nicht streng doppelperiodisch zu sein, es genügt, wenn sie in dem unten angegebenen Sinne automorph sind. Verfolgt man aufmerksam die Beweise dieser Sätze, so konstatiert man, dass statt der doppelten Periodizität, d. h. statt der Eigenschaft e) es genügen würde den betrachteten Funktionen $f(z)$ folgende Eigenschaft e') zuzuschreiben:

e') Es sollen zwei Kurvenscharen (die Kurven k_1 und k_2 auf der Figur 2) existieren, die ein krummliniges Gitter bilden, d. h. ein System von zwei Kurvenscharen durch welche die ganze endliche z -Ebene, mit eventueller Ausnahme von isolierten Punkten,¹ in krummlinige »Vierecke« aufgeteilt wird. Wenn T_1 und T_2 zwei solche »Vierecke« sind so soll eine topologische Abbildung $T_1 \rightarrow T_2$ existieren derart, dass die Funktion $f(z)$ in entsprechenden Punkten denselben Wert annimmt. Insbesondere soll $f(z)$ auf den »gegenüberliegenden Seiten« eines solchen »Vierecks« den gleichen Wertevorrat besitzen, wobei die Mengen der $w = f(z)$ -Werte auf beiden Seiten gleichgeordnet sind, wenn z diese Seiten, ausgehend von Ecken auf einer der Seiten des anderen Seitenpaares, durchläuft. (Mehrfach angenommene w -Werte sollen dabei entsprechend mehrfach gezählt werden.) Auch soll es möglich sein dieses Gitter stetig so zu deformieren, dass seine eben geschilderte Eigenschaft

¹ Bemerkung: Diese isolierten Punkte sind singuläre Punkte in Bezug auf das Gitter und auch singuläre Punkte der Funktion $f(z)$, jedoch keine Pole. In der Formulierung der Eigenschaft d) muss dann unter z_1 ein von diesen singulären Punkten verschiedener Punkt verstanden werden.

der Funktion $f(z)$ gegenüber erhalten bleibt. (Z. B. soll eine solche Deformation einer Verschiebung topologisch äquivalent sein.)

Durch Wiederlesen der Beweise der Sätze 1, 1a, 2 und 3 kann man sich überzeugen, dass sie auch für Funktionen $f(z)$ mit den Eigenschaften a), b), c), d), e') glütig sind (wo also der Begriff »doppeltperiodisch« im Sinne der Eigenschaft e') abgeändert werden muss).

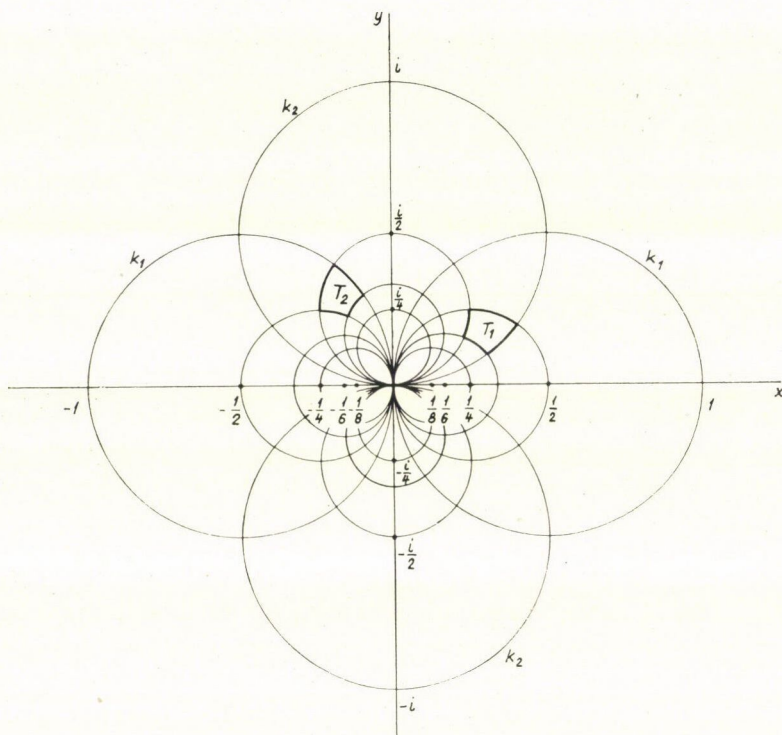


Fig. 3.

Funktionen mit den Eigenschaften a), b), c), d) und e') existieren auch in der Klasse der analytischen Funktionen. Z. B. die Funktion $f(z) = F\left(\frac{1}{z}\right)$, wobei $F(\zeta)$ eine beliebige elliptische Funktion der komplexen Veränderlichen ζ ist, ist eine solche. Wenn wir hier den denkbar einfachsten Fall betrachten und $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = i$ setzen, so sind die Kurven k_1 die Kreise (s. Fig. 3):

$$\left(x - \frac{1}{2n}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \text{ und die Gerade } x = 0; (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Die Kurven k_2 sind dann die zu den k_1 orthogonalen Kreise:

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2n}\right)^2 = \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \text{ und die Gerade } y = 0; (n = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Man kann natürlich $f(z)$ wiederum in eine elliptische Funktion zurücktransformieren, doch betreffs der Beweismethode der Sätze 1, 1a, 2 und 3 ist es gut zu wissen, dass es für ihre Beweise genügt nur von den erwähnten topologischen Eigenschaften Gebrauch zu machen.

(Eingegangen: 3. September, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] SCHABAT, B. W.: "Über Abbildungen die durch Lösungen von Systemen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung verwirklicht werden". *Suomalaisen Tiedekakatemian Toimituksia. I. Mathematica* **251/8** (1958).
- [2] ЛАВРЕНТЬЕВ, М. А.: "Общая теория квазиконформных отображений плоских областей." *Матем. сб.* **21** (63), (1947) 285—320.
- [3] ДАНИЛЮК, И. И.: "Об автоморфных квазианалитических функциях на поверхностях". *Матем. сб.* **41** (83), (1957) 97—104.
- [4] HURWITZ, A.—COURANT, R.: *Funktionentheorie*. Berlin 1922 (Die Grundlehren der Math. Wissenschaften, Bd. III.).
- [5] SZILÁRD, K.: "Über die Grundlagen der Funktionentheorie". *Math. Zeitschrift* **26** (1927) 653—671.

О ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ПРИРОДЕ НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ ТЕОРЕМ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

K. SZILÁRD

Резюме

Автор показывает, что некоторые общие теоремы теории эллиптических функций могут быть доказаны топологическими средствами и поэтому они остаются в силе и для некоторых классов неаналитических функций одного комплексного переменного (для которых топологические свойства аналитических функций сохраняются).

ON THE INTERCONNECTION BETWEEN THE REPRESENTATION THEOREMS OF CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF UNIMODAL DISTRIBUTION FUNCTIONS AND OF CONVEX CHARACTERISTIC FUNCTIONS

by
PÁL MEDGYESSY

Dedicated to Professor G. Pólya on the occasion of his 75th birthday

1.

First we recall some definitions.

Following A. YA. KHINCHIN (see e.g. [1], p. 157) a distribution function $F(x)$ is called *unimodal* if there exists at least one value $x = a$ (called the *vertex* of the distribution function) such that $F(x)$ is convex for $x < a$ and concave for $x > a$. Let us notice that $F(x)$ is then continuous at every point $x = a$.

Following G. PÓLYA (see e.g. [2], p. 70), a function $\psi(t)$ defined for all real t is called a *convex characteristic function* if

- (I) a) $\psi(t)$ is real-valued and continuous,
 b) for $t > 0$, $\psi(t)$ is convex,
 c) $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$,
 d) $\psi(0) = 1$,
 e) for $t < 0$, $\psi(t) = \psi(-t)$.

As proved by G. PÓLYA, such a function is in fact the characteristic function of a distribution function; moreover this distribution function is absolutely continuous.

2.

There exist representation theorems concerning the characteristic functions of unimodal distribution functions and convex characteristic functions, resp.

Theorem 1. *The function $\varphi(t)$ is the characteristic function of a unimodal distribution function $F(x)$ (with the vertex at $x = 0$) if and only if it can be represented in the form*

$$\varphi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \chi(u) du$$

where $\chi(u)$ is some characteristic function.

This theorem is due to A. YA. KHINCHIN (1938). For its proof see e. g. [1], pp. 157—160, supplemented by the corrections of K. L. CHUNG, *ibid.*, pp. 252—253.

This proof also involves that Theorem 1 is equivalent to the following

Theorem 1'. *The function $F(y)$ is a unimodal distribution function (with the vertex at $y = 0$) if and only if it can be represented in the following form:*

$$(2.1) \quad \text{for } y < 0, \quad F(y) = - \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^u \frac{dV(x)}{x} du = \int_{-\infty}^y \left(1 - \frac{y}{x}\right) dV(x),$$

$$(2.2) \quad \text{for } y > 0, \quad F(y) = 1 - \int_y^{\infty} \int_u^{\infty} \frac{dV(x)}{x} du = 1 - \int_y^{\infty} \left(1 - \frac{y}{x}\right) dV(x)$$

(see [1], pp. 158—160) where $V(x)$ is some distribution function (exactly, this is the distribution function possessing the characteristic function $\chi(u)$).

Evidently, $F(-0) = V(-0)$, $F(+0) = V(+0)$.

Our investigations will be based on this latter version of Theorem 1.

Theorem 2. *The function $\psi(t)$ is a convex characteristic function if and only if for $t > 0$ it can be represented in the form*

$$(2.3) \quad \psi(t) = \int_t^{\infty} \left(1 - \frac{t}{x}\right) dG(x) \quad (t > 0)$$

where $G(x)$ is some distribution function for which $G(x) = 0$ if $x \leq 0$ and $G(+0) = 0$, and

$$(2.4) \quad \text{for } t < 0, \quad \psi(t) = \psi(-t).$$

Evidently, $\psi(+0) = \psi(-0) = \psi(0) = 1$.

This is a simple consequence of a result due to D. DUGUÉ (1955) and of some remarks of M. GIRAULT (see [3], pp. 6—7 and [4], p. 292). The representation (2.3) is to be found in [3], p. 6.

3.

Our aim is to show that there is an intimate interconnection between Theorem 1' and Theorem 2 in 2.

A. Theorem 2 can be deduced by the aid of Theorem 1'. Namely, let $\psi(t)$ be a convex characteristic function and let us consider the function $F(y)$ defined by

$$(3.1) \quad F(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y \leq 0 \\ 1 - \psi(y) & \text{if } y > 0 \end{cases}$$

(see Fig. 1.). $F(y)$ will be a unimodal distribution function with vertex at $x = 0$; further, $F(+0) = 0$. Then, by (2.2), for $y > 0$ we have

$$(3.2) \quad F(y) = 1 - \int_y^{\infty} \left(1 - \frac{y}{x}\right) dV(x)$$

where $V(x)$ is some distribution function; further, $F(+0) = V(+0) = 0$. Now let

$$(3.3) \quad W(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ V(x) & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

Then, for $t > 0$, by (3.1), (3.2) and (3.3) we have

$$(3.4) \quad \psi(t) = \int_t^\infty \left(1 - \frac{t}{x}\right) dV(x) = \int_t^\infty \left(1 - \frac{t}{x}\right) dW(x).$$

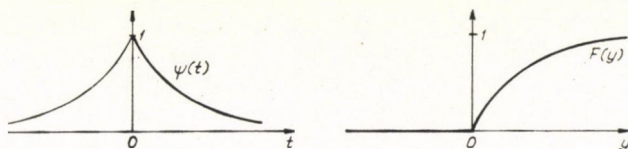


Fig. 1.

(3.4) is identical with the representation (2.3), since $W(x)$ is evidently of the same type as $G(x)$ in (2.3). Since, *per definitionem*, $\psi(t) = \psi(-t)$ for $t < 0$, all these facts involve that the conditions (2.3), (2.4) are necessary for that $\psi(t)$ be a convex characteristic function. — Conversely, if $\psi(t)$ is any function satisfying the conditions (2.3) — (2.4) then it is easily seen that $\psi(t)$ satisfies also the conditions under (I).

Thus the conditions (2.3) — (2.4) are also sufficient for that $\psi(t)$ be a convex characteristic function and, consequently, the deduction of Theorem 2 from Theorem 1' is completed.

B. As to Theorem 1', for

$$F(y) \equiv F_0(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

Theorem 1' is obvious from the identities

$$(3.5) \quad F_0(y) = \int_{-\infty}^y \left(1 - \frac{y}{x}\right) dF_0(x) \quad (y < 0)$$

$$(3.6) \quad F_0(y) = 1 - \int_y^{\infty} \left(1 - \frac{y}{x}\right) dF_0(x) \quad (y > 0).$$

If $F(y) \not\equiv F_0(y)$ i.e. if $F(y)$ is non-degenerate, Theorem 1' can be deduced from Theorem 2. The way of showing this consists in reverting the sequence of ideas in A in some sense, — having to distinguish, at any rate, three particular cases.

a) Let $F_1(x)$ be a non-degenerate unimodal distribution function with vertex at $x = 0$ for which $F_1(x) = 1$ if $x > 0$. Then, *per definitionem*, the function

$$(3.7) \quad \psi_1(t) = \begin{cases} \frac{F_1(t)}{F_1(-0)} & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{if } t > 0 \end{cases}$$

may be regarded over $(-\infty, 0)$ as the part lying over $(-\infty, 0)$ of a convex characteristic function and, by (2.3) and (2.4), we have

$$(3.8) \quad \psi_1(t) = \int_{-t}^{\infty} \left(1 + \frac{t}{x}\right) dG_1(x) \quad (t < 0)$$

where $G_1(x)$ is a distribution function for which $G_1(x) = 0$ if $x \leq 0$ and $G_1(+0) = 0$. Then, by (3.7) and (3.8)

$$(3.9) \quad F_1(y) = -F_1(-0) \int_{-\infty}^y \left(1 - \frac{y}{x}\right) dG_1(-x) \quad (y < 0).$$

Upon introducing the distribution function

$$R_1(x) = \begin{cases} F_1(-0) [1 - G_1(-x)] & \text{if } x \leq 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

($R_1(-0) = F_1(-0)$, $R_1(+0) = 1$) we then have [cf. (3.9) and (3.6)]:

$$(3.10) \quad F_1(y) = \int_{-\infty}^y \left(1 - \frac{y}{x}\right) dR_1(x) \quad \text{if } y < 0$$

$$(3.11) \quad F_1(y) = 1 - \int_y^{\infty} \left(1 - \frac{y}{x}\right) dR_1(x) \quad \text{if } y > 0.$$

Consequently, (3.10) and (3.11) are necessary for that $F_1(x)$ be a unimodal distribution function.

b) Let $F_2(x)$ be a non-degenerate unimodal distribution function with vertex at $x = 0$ for which $F_2(x) = 0$ if $x \leq 0$. Then, *per definitionem*, the function

$$(3.12) \quad \psi_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ \frac{1 - F_2(t)}{1 - F_2(+0)} & \text{if } t > 0 \end{cases}$$

may be regarded over $(0, \infty)$ as the part lying over $(0, \infty)$ of a convex characteristic function and, by (2.3), we have

$$(3.13) \quad \psi_2(t) = \int_t^{\infty} \left(1 - \frac{t}{x}\right) dG_2(x) \quad (t > 0)$$

where $G_2(x)$ is a distribution function for which $G_2(x) = 0$ if $x \leq 0$ and $G_2(+0) = 0$. Then, by (3.12) and (3.13)

$$(3.14) \quad F_2(y) = 1 - [1 - F_2(+0)] \int_y^{\infty} \left(1 - \frac{y}{x}\right) dG_2(x) \quad (y > 0).$$

Upon introducing the distribution function

$$R_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ [1 - F_2(+0)] G_2(x) + F_2(+0) & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

($R_2(-0) = 0$, $R_2(+0) = F_2(+0)$) we then have [cf. (3.14) and (3.5)]:

$$(3.15) \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^y \left(1 - \frac{y}{x}\right) dR_2(x) \quad \text{if } y < 0$$

$$(3.16) \quad F_2(y) = 1 - \int_y^{\infty} \left(1 - \frac{y}{x}\right) dR_2(x) \quad \text{if } y > 0.$$

Consequently, (3.15) and (3.16) are necessary for that $F_2(x)$ be a unimodal distribution function.

c) Let $F(y)$ be a non-degenerate unimodal distribution function, $F(y) \neq F_1(y)$, $F(y) \neq F_2(y)$. Then, over $(-\infty, 0)$, it is of the same type as $F_1(x)$ over $(-\infty, 0)$ and, over $(0, \infty)$, it is of the same type as $F_2(x)$ over $(0, \infty)$. Then we have, with respect to (3.10) and (3.16):

$$F(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y \left(1 - \frac{y}{x}\right) dS_1(x) & \text{if } y < 0 \\ 1 - \int_y^{\infty} \left(1 - \frac{y}{x}\right) dS_2(x) & \text{if } y > 0 \end{cases}$$

where $S_1(x)$ and $S_2(x)$ are distribution functions of the type of $R_1(x)$ and $R_2(x)$, resp. [hence $S_1(-0) = F_1(-0)$, $S_1(+0) = 1$, $S_2(-0) = 0$, $S_2(+0) = F(+0)$]. Defining the distribution function $R(x)$ by

$$R(x) = \begin{cases} S_1(x) & \text{if } x \leq 0 \\ S_2(x) & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

we finally have

$$(3.17) \quad F(y) = \int_{-\infty}^y \left(1 - \frac{y}{x}\right) dR(x) \quad \text{if } y < 0$$

$$(3.18) \quad F(y) = 1 - \int_y^{\infty} \left(1 - \frac{y}{x}\right) dR(x) \quad \text{if } y > 0$$

($F(-0) = R(-0)$, $F(+0) = R(+0)$). Consequently, (3.17) and (3.18) are necessary for that $F(x)$ be a unimodal distribution function.

As to the converse considerations, if $F_1(y)$, $F_2(y)$, $F(y)$ are functions satisfying the conditions (3.10) — (3.11), (3.15) — (3.16), (3.17) — (3.18), resp. then it is easily shown that they are unimodal distribution functions (with the vertex at $y = 0$). Thus the validity of (3.10) — (3.11), (3.15) — (3.16), (3.17) — (3.18) is also sufficient for that $F_1(y)$, $F_2(y)$, $F(y)$ be unimodal distribution functions (with the vertex at $y = 0$). Consequently, the deduction of Theorem 1' from Theorem 2 is completed.

This way of deducing Theorem 1' (and, implicitly, Theorem 1) by the aid of Theorem 2, whose proof is relatively simple, seems to have some advantages with respect to the original one presented in [1], pp. 157—160, which is, in view of the remarks of K. L. CHUNG referring hereto (see [1], pp. 252—253), rather complicated.

(Received January 21, 1963; in revised form September 9, 1963)

REFERENCES

- [1] GNEDENKO, B. V.—KOLMOGOROV, A. N.: *Limit distributions for sums of independent random variables*. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Cambridge, Mass., 1954.
- [2] LUKÁCS, E.: *Characteristic functions*. Hafner Publishing Co., New York, 1960.
- [3] DUGUÉ, D.—GIRAULT, M.: "Fonctions convexes de Pólya". *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris* 4 (1955) 3—10.
- [4] GIRAULT, M.: "Les fonctions caractéristiques et leurs transformations". *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris* 4 (1955) 221—299.

О СВЯЗИ МЕЖДУ ТЕОРЕМАМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ОДНОВЕРШИННОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ВЫПУКЛОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

P. MEDGYESSY

Резюме

В 1938 г. А. Я. Хинчин дал известное представление характеристической функции одновершинного закона распределения. В 1955 г. D. Dugué сообщил формулу представления выпуклой характеристической функции. В работе устанавливается тесная связь упомянутых двух теорем представления.

ON THE CONNECTEDNESS OF BICHROMATIC RANDOM GRAPHS

by
ILONA PALÁSTI

§ 1. Introduction

A graph is given by a set of labelled points (vertices) P_1, P_2, \dots, P_n and by a set of pairs (P_i, P_j) of its points, called the edges of the graph. (See [2], [3].) Let us suppose that $i \neq j$ (no loops are allowed).

A graph is bichromatic, if the set of its n points can be split into two subsets P_1, P_2, \dots, P_m and Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-m} (we can imagine that all the points are coloured e.g. all the points P_i are red but all Q_j are blue), so that no vertices of the same colour are connected by an edge.

A graph is called a random graph if its edges are chosen at random so that each admitted choice has the same probability. (See in [1] and [4].)

P. ERDŐS and A. RÉNYI considered in the paper [1] the random graphs $\Gamma_{n,N}$ with n vertices and N edges, the latter chosen at random so that all

possible $\binom{n}{2}$ choices have the same probability. They answered the question: what is the probability of the random graph obtained in such a way being connected. They showed that if the number of the edges is equal to N_c , where

$$(1) \quad N_c = \left[\frac{n}{2} \log n + cn \right]$$

and c is an arbitrary fixed real number ($[x]$ means the integral part of x), and if $\mathbf{P}_0(n, N_c)$ denotes the probability of the random graph Γ_{n,N_c} being connected, then

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_0(n, N_c) = e^{-e^{-2c}}.$$

The outline of their proof is the following.

Let us call a graph to be of type A if it consists of a connected subgraph with $n - k$ vertices and of k isolated points ($k = 0, 1, \dots$). Any graph which is not of type A is called to be of type \bar{A} . Let $\mathbf{P}(\bar{A}, n, N_c)$ denote the probability that the random graph be of type \bar{A} .

It has been shown in [1] that

$$(3a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bar{A}, n, N_c) = 0$$

holds if N_c is given by (1).

It follows from (3a) that if $\mathbf{P}_0^*(n, N_c)$ denotes the probability that the random graph Γ_{n,N_c} should contain no isolated points, then

$$(3b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{P}_0^*(n, N_c) - \mathbf{P}_0(n, N_c)) = 0.$$

It remained only to prove that

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_0^*(n, N_c) = e^{-e^{-2c}},$$

which could be achieved relatively easily; (2) follows evidently from (3b) and (4).

The problem had to be treated in this way because no explicit formula is known for the number of connected graphs with n vertices and N edges which would admit asymptotic evaluation.

Our aim is to determine the probability of a bichromatic random graph being connected and to examine the asymptotical behaviour of these probabilities.

§ 2. Bichromatic random graphs

Let the bichromatic random graph $\Gamma_{m,n,N}$ have m given labelled points P_1, P_2, \dots, P_m of one colour (say red), n given labelled points Q_1, Q_2, \dots, Q_n of another colour (say blue) and N edges, each of which connecting a red point with a blue point, chosen at random in such a way that all possible choices have the same probability $1/\binom{m}{N}$ (see in [5], [6]).

A bichromatic graph G is connected, if any P_i can be connected with any Q_j by a path in G . (This implies that any two points can be connected by a path.)

We shall deal with the case when $m \sim \lambda n$ (where $\lambda > 0$ is a constant). First let be $\lambda = 1$, $m = n$ and let us prove the following

Theorem 1. *If $\mathbf{P}(n, n, N_c)$ denote the probability of the bichromatic random graph Γ_{n,n,N_c} being connected, assuming that*

$$(5) \quad N_c = [n \log n + cn]$$

(where c is an arbitrary fixed real number), then

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(n, n, N_c) = e^{-2e^{-c}}.$$

Proof. Likewise to the considerations of P. ERDŐS and A. RÉNYI in [1] we shall call the bichromatic random graph to be of type A if it has a component with exactly $n - k$ red points and $n - l$ blue points, further k isolated red points ($k = 0, 1, \dots$) and l isolated blue points ($l = 0, 1, \dots$). All other graphs belong to the type \bar{A} .

Let us first prove the following lemma.

Lemma 1. *Let $\mathbf{P}(\bar{A}, n, n, N_c)$ denote the probability that the random graph Γ_{n,n,N_c} is of type \bar{A} . Then we have*

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bar{A}, n, n, N_c) = 0,$$

where N_c is given by (5). Thus if n is large enough then „almost all” graphs Γ_{n,n,N_c} are of type A , assuming that (5) holds.

Proof of Lemma 1. Let us put $U = \log \log n$. All graphs Γ_{n,n,N_c} consisting of the vertices P_1, P_2, \dots, P_m and Q_1, Q_2, \dots, Q_n and N_c edges belong to one of the following two classes: Let us define E_U as the class consisting

of those graphs in which the greatest component (i.e. with the greatest number of points) contains not less than $n-U$ red points and not less than $n-U$ blue points. All other graphs belong to the class \bar{E}_U (i.e. those graphs in which the greatest components consist of less than $n-U$ red or less than $n-U$ blue points).

Let r and s denote the number of points outside a greatest component of the first colour and the second colour resp.

If a graph consists of t components such that the i -th component consists of a_i red and b_i blue points where of course

$$\sum_{i=1}^t a_i = \sum_{i=1}^t b_i = n$$

and

$$\sum_{i=1}^t a_i b_i \geq N_c$$

holds; then — according to the inequality concerning the arithmetic and geometric means — we obtain

$$\sum_{i=1}^t \left(\frac{a_i + b_i}{2} \right)^2 \geq N_c$$

and thus

$$\max_i (a_i + b_i) \left(\sum_{i=1}^t (a_i + b_i) \right) \geq 4 N_c,$$

therefore

$$\max_i (a_i + b_i) \geq \frac{2 N_c}{n}.$$

Accordingly if the greatest component consists of $n-r$ red and $n-s$ blue points, then

$$n-r + n-s \geq \frac{2 N_c}{n},$$

whence

$$\max(n-r, n-s) \geq \frac{N_c}{n},$$

i.e.

$$n - \min(r, s) \geq \frac{N_c}{n},$$

thus

$$\min(r, s) \leq n - \frac{N_c}{n}.$$

Let us fix the $n-r$ red points, and the $n-s$ blue points belonging to the greatest component; then $s(n-r) + r(n-s)$ edges could be established connecting these points with points outside, this component and these edges

cannot belong to the graph; thus if $\mathcal{N}(\bar{E}_U, n, n, N_c)$ denotes the number of graphs not belonging to the class E_U , then

$$(8) \quad \mathcal{N}(\bar{E}_U, n, n, N_c) \leq 2 \sum_{U < r < n} \sum_{\substack{0 \leq s \leq n - \frac{N_c}{n} \\ s \leq r}} \binom{n}{r} \binom{n}{s} \binom{n^2 - s(n-r) - r(n-s)}{N_c}.$$

If $\mathbf{P}(\bar{E}_U, n, n, N_c)$ denotes the probability of the event that the graph G_{n,n,N_c} does not belong to the class E_U then

$$(9) \quad \mathbf{P}(\bar{E}_U, n, n, N_c) \leq \frac{\mathcal{N}(\bar{E}_U, n, n, N_c)}{\binom{n^2}{N_c}}.$$

Now we have (by the inequality $1 - x \leq e^{-x}$)

$$(10) \quad \binom{n}{r} \binom{n}{s} \frac{\binom{n^2 - s(n-r) - r(n-s)}{N_c}}{\binom{n^2}{N_c}} \leq \frac{n^r}{r!} \frac{n^s}{s!} e^{-N_c \left(\frac{r}{n} + \frac{s}{n} \right) + N_c \frac{2rs}{n^2}}.$$

Making use of the assumption (5), we obtain according to (9) and (10),

$$(11) \quad \mathbf{P}(\bar{E}_U, n, n, N_c) \leq 2 \sum_{U < r < n} \sum_{\substack{0 \leq s \leq n - \frac{N_c}{n} \\ s \leq r}} a_{rs}$$

where

$$(12) \quad a_{rs} = \binom{n}{r} \binom{n}{s} \frac{\binom{n^2 - s(n-r) - r(n-s)}{N_c}}{\binom{n^2}{N_c}} \leq \frac{e^{\frac{2rs}{n}(\log n + c) - cr - cs + 2}}{r! s!}.$$

Let us estimate the sums on the right hand side of (11).

Case 1. Let us write (12) in the following form

$$(12') \quad a_{rs} \leq \frac{e^{(2-c)r + (2-c)s + 2}}{r! s!} e^{\frac{2rs}{n}(\log n + c) - 2r - 2s}$$

and let us consider first the values of r and s for which

$$\frac{rs}{n}(\log n + c) \leq r + s,$$

that is

$$(13) \quad \frac{\log n + c}{n} \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{s}.$$

(13) certainly holds, if

$$(14) \quad s \leq \frac{n}{\log n + c}.$$

If s satisfies (14) we say that we have case 1. Thus

$$(15) \quad a_{rs} \leq \frac{e^{(2-c)r + (2-c)s + 2}}{r! s!}$$

holds, if (14) is valid.

Case 2. Let us consider the terms in (11), for which (14) does not hold, but

$$(16) \quad r + s \leq n.$$

Applying Stirling's formula we obtain that, for sufficiently large n , these terms are less than

$$(17) \quad \exp \left\{ \frac{2rs}{n} (\log n + c) + (r + s)(1 - c) - r \log r - s \log s \right\}.$$

Using the inequality

$$2rs \leq \frac{(r + s)^2}{2}$$

the expression in brackets in (17) is less than

$$(18) \quad \frac{(r + s)^2}{2} (\log n + c) + (1 - c)(r + s) - (r \log r + s \log s).$$

Since $x \log x$ is a convex function, we conclude by Jensen's inequality

$$-(r \log r + s \log s) \leq -(r + s) \log \frac{r + s}{2}.$$

Thus (18) is less than $\varphi(x) + x \log 2$ where

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2n} (\log n + c) + (1 - c)x - x \log x$$

and

$$x = r + s.$$

According to (16) $\frac{2n}{\log n + c} < x \leq n$. Now

$$\varphi'(x) = \frac{x}{n} (\log n + c) - (\log x + c) < 0; \text{ if } e^{1-c} < x \leq n,$$

because $\frac{x}{c + \log x}$ is an increasing function of x if

$$e^{1-c} < x < n.$$

Thus it follows that

$$(19) \quad \varphi(x) \leq \varphi\left(\frac{2n}{\log n + c}\right) \leq -2n + \frac{Kn \log \log n}{\log n}$$

where $K > 0$ is a constant. Thus for $n \geq n_0$ the sum of the terms on the right side of (11) for which (16) holds does not exceed $n^2 e^{-n}$ and therefore tends to 0, if $n \rightarrow \infty$.

Case 3. Taking into account that $a_{rs} = a_{r's'}$ where $r' = n - s$, $s' = n - r$ the estimation of the terms a_{rs} with $r + s > n$ can be reduced to the estimation of the terms $a_{r's'}$ with $r' + s' \leq n$, regarding the fact that from $r + s > n$ there follows that $r' + s' < n$ further that from $s \leq n - \frac{N_c}{n}$ it follows

that $r' \geq \frac{N_c}{n} > U = \log \log n$, if n is sufficiently large.

Thus we have for (11)

$$(20) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{E}_U, n, n, N_c) &\leq 4e^2 \sum_{0 \leq r \leq n - \frac{N_c}{n}} \frac{e^{(2-c)r}}{r!} \sum_{U < s < n} \frac{e^{(2-c)s}}{s!} + o(1) \leq \\ &\leq 4e^{2+e^{2-c}} \left(\sum_{U < s} \frac{e^{(2-c)s}}{s!} \right) + o(1). \end{aligned}$$

As we have chosen $U = \log \log n$, we obtain

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bar{E}_{\log \log n}, n, n, N_c) = 0.$$

Now we only need to show that the probability of obtaining a random graph not being of the type A , but nevertheless belonging to the class $E_{\log \log n}$, tends to zero. That is we have to show that

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bar{A}E_{\log \log n}, n, n, N_c) = 0.$$

Since in these graphs the greatest component consists of $n - r$ red and $n - s$ blue points, therefore $q \geq 1$ denoting the number of edges connecting some of the r and s outside points, these outside edges can be chosen in $\binom{rs}{q}$ different ways; thus the remaining $N_c - q$ inner edges must be selected from the $(n - r)(n - s)$ possibilities, i.e.

$$(23) \quad \mathbf{P}(\bar{A}E_{\log \log n}, n, n, N_c) \leq \sum_{r=1}^U \sum_{s=1}^U \binom{n}{r} \binom{n}{s} \sum_{q=1}^{rs} \binom{rs}{q} \frac{\binom{(n-r)(n-s)}{N_c - q}}{\binom{n^2}{N_c}}.$$

Taking into account the inequalities

$$\binom{n}{r} \binom{n}{s} < \frac{n^r n^s}{r! s!}; \quad \sum_{q=1}^{rs} \binom{rs}{q} = 2^{rs} - 1 < 2^{rs},$$

and

$$\frac{\binom{(n-r)(n-s)}{N_c - q}}{\binom{n^2}{N_c}} \leq \frac{N_c^q}{(n^2 - q)^q} \left(\frac{(n-r)(n-s)}{n^2 - q} \right)^{N_c - q},$$

we obtain

$$(24) \quad \mathbf{P}(\bar{A}E_{\log \log n}, n, n, N_c) \leq \leq \frac{\log n}{n} \sum_{r=1}^U \sum_{s=1}^U \frac{2^{rs} e^{-(r+s)c}}{r! s!} = O\left(\frac{2^{(\log \log n)^2} \log n}{n}\right) = o(1).$$

Thus (22) holds and therefore the proof of Lemma 1 is completed.

The proof of Theorem 1. Denoting by $\mathcal{N}'(n, n, N_c)$ the number of bichromatic random graphs without isolated points, according to the sieve method we have evidently

$$(25) \quad \mathcal{N}'(n, n, N_c) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n (-1)^{k+l} \binom{n}{k} \binom{n}{l} \binom{(n-k)(n-l)}{N_c}.$$

Putting into (25) $k + l = h$, we obtain a more often used form:

$$(26) \quad \mathcal{N}'(n, n, N_c) = \sum_{h=0}^{2n} (-1)^h \mathcal{A}_h$$

where

$$\mathcal{A}_h = \sum_{k=0}^h \binom{n}{k} \binom{n}{h-k} \binom{n(n-h) + k(h-k)}{N_c}.$$

Using the following inequalities (similarly as was done in [1], p. 295):

$$(27) \quad \sum_{h=0}^{2H+1} (-1)^h \mathcal{A}_h \leq \mathcal{N}'(n, n, N_c) \leq \sum_{h=0}^{2H} (-1)^h \mathcal{A}_h$$

and taking into account that for any fixed value of h

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{A}_h}{\binom{n^2}{N_c}} = \sum_{k=0}^h \frac{e^{-ch}}{k! (h-k)!},$$

we obtain

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}'(n, n, N_c)}{\binom{n^2}{N_c}} \leq \sum_{h=0}^{2H} (-1)^h \sum_{k=0}^h \frac{e^{-ch}}{k! (h-k)!}$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}'(n, n, N_c)}{\binom{n^2}{N_c}} \geq \sum_{h=0}^{2H+1} (-1)^h \sum_{k=0}^h \frac{e^{-ch}}{k! (h-k)!}.$$

Since H can be chosen arbitrarily large, we obtain

$$(28) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}'(n, n, N_c)}{\binom{n^2}{N_c}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-ck}}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{e^{-cl}}{l!} = e^{-2e^c}.$$

It is however evident that if $\mathcal{N}(n, n, N_c)$ denotes the number of the connected graphs, then

$$(29) \quad 0 \leq \frac{\mathcal{N}'(n, n, N_c) - \mathcal{N}(n, n, N_c)}{\binom{n^2}{N_c}} \leq \mathbf{P}(\bar{A}, n, n, N_c).$$

Applying Lemma 1, Theorem 1 follows immediately.

Let us suppose now that $\lambda \neq 1$.

Theorem 2. Let us denote by $\mathbf{P}(m, n, N_{c,\lambda})$ the probability that the bichromatic random graph $\Gamma_{m,n,N_{c,\lambda}}$ be connected, assuming that $m \sim \lambda n$ and

$$(30) \quad N_{c,\lambda} = [m \log m + cm]$$

(where $\lambda > 1$ and c are constants); then

$$(31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(m, n, N_{c,\lambda}) = e^{-e^c}$$

holds.

Proof. In this case we shall call the graphs consisting of a component with $m - k$ red and n blue vertices and of k isolated red points ($k = 0, 1, \dots$) (that is one component contains all blue points) to be of type B . Any graph $\Gamma_{m,n,N_{c,\lambda}}$ which is not of type B shall be called to be of type \bar{B} . We shall prove that the following lemma is valid.

Lemma 2. Let $\mathbf{P}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda})$ denote the probability that the bichromatic random graph $\Gamma_{m,n,N_{c,\lambda}}$ is of the type \bar{B} ; then

$$(32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda}) = 0.$$

Thus in case n is sufficiently large and $N_{c,\lambda}$ is the same as in (30), then „almost all” graphs $\Gamma_{m,n,N_{c,\lambda}}$ will be of type B .

Proof of Lemma 2. The proof of Lemma 2 is similar to that of Lemma 1, therefore we give only the outlines of the proof.

Let us denote by $\mathcal{N}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda})$ the number of bichromatic graphs, with m red and n blue points and $N_{c,\lambda}$ edges, which are of type \bar{B} . Then we have clearly

$$(33) \quad \mathcal{N}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda}) \leq \sum_{r=0}^m \sum_{s=1}^{n-1} \binom{m}{r} \binom{n}{s} \binom{mn - s(m-r) - r(n-s)}{N_{c,\lambda}}.$$

The probability of the random graph $\Gamma_{m,n,N_{c,\lambda}}$ being of the type \bar{B} is equal to

$$(34) \quad \mathbf{P}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda}) = \frac{\mathcal{N}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda})}{\binom{mn}{N_{c,\lambda}}}$$

and thus

$$(35) \quad \mathbf{P}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda}) \leq \sum_{r=0}^m \sum_{s=1}^{n-1} b_{rs}$$

where

$$(36) \quad b_{rs} = \binom{m}{r} \binom{n}{s} \binom{mn - s(m-r) - r(n-s)}{N_{c,\lambda}}$$

and thus

$$(37) \quad b_{rs} \leq \frac{m^r n^s}{r! s!} e^{-\left(\frac{r}{m} + \frac{s}{n} - \frac{2rs}{mn}\right) N_{c,\lambda}}.$$

Let now E_1 denote the set of those pairs (r, s) for which

$$(38) \quad 0 \leq r \leq \alpha m, \quad 1 \leq s \leq n-1$$

where

$$(39) \quad 0 < \alpha < \frac{\lambda - 1 - \delta}{2\lambda} \quad (0 < \delta < \lambda - 1).$$

Then we obtain easily

$$(40) \quad \sum_{(r,s) \in E_1} b_{rs} = O\left(\frac{1}{n^\delta}\right).$$

Let now E_2 denote the set of those pairs (r, s) for which

$$(41) \quad \alpha m < r < m, \quad 1 \leq s \leq \frac{n}{2}.$$

For these terms we get

$$(42) \quad \sum_{(r,s) \in E_2} b_{rs} = O\left(\frac{1}{n^{\lambda-1}}\right).$$

Finally if E_3 denotes the set of those pairs (r, s) for which

$$(43) \quad 0 \leq r \leq m, \quad \frac{n}{2} < s \leq n-1$$

we get, in view of

$$(44) \quad b_{rs} = b_{m-r, n-s}$$

$$(45) \quad \sum_{(r,s) \in E_3} b_{rs} \leq \sum_{(r,s) \in E_1} b_{rs} + \sum_{(r,s) \in E_2} b_{rs}.$$

Thus it follows from (35), (40), (42) and (45) that (32) holds.

Thus Lemma 2 has been proved.

Proof of Theorem 2. In this case we denote by $\mathcal{N}'(m, n, N_{c,\lambda})$ the number of those graphs, which do not contain isolated red points. We obtain

$$(46) \quad \mathcal{N}'(m, n, N_{c,\lambda}) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \binom{(m-k)n}{N_{c,\lambda}}.$$

Since $\mathcal{N}'(m, n, N_{c,\lambda})$ lies between any two consecutive partial sums of the right hand side of (46), in the case of any fixed k ,

$$(47) \quad \binom{m}{k} \frac{\binom{(m-k)n}{N_{c,\lambda}}}{\binom{mn}{N_{c,\lambda}}} \sim \frac{m^k}{k!} \left(1 - \frac{k}{m}\right)^{N_{c,\lambda}}.$$

Thus we obtain

$$(48) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}'(m, n, N_{c,\lambda})}{\binom{mn}{N_{c,\lambda}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-ck}}{k!} = e^{-e^c}.$$

From the inequality where $\mathcal{N}(m, n, N_{c,\lambda})$ denotes the number of connected graphs

$$(49) \quad 0 \leq \frac{\mathcal{N}'(m, n, N_{c,\lambda}) - \mathcal{N}(m, n, N_{c,\lambda})}{\binom{mn}{N_{c,\lambda}}} \leq \mathbf{P}(\bar{B}, m, n, N_{c,\lambda}).$$

Theorem 2 follows.

I am indebted to Professors A. RÉNYI and T. GALLAI for their valuable remarks.

(Received September 10, 1963)

REFERENCES

- [1] ERDŐS, P. and RÉNYI, A.: „On random graphs I”. *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959) 290—297.
- [2] BERGE, C.: *Theorie des graphes et ses applications*. Paris, Dunod, 1958.
- [3] ORE, O.: *Theory of graphs*. American Math. Soc., 1962.
- [4] ERDŐS, P. and RÉNYI, A.: „On the evolution of random graphs”. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **5** (1960) 17—61.
- [5] PALÁSTI, I.: „On the distribution of the number of trees which are isolated subgraphs of a chromatic random graph”. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **6** (1961) 405—409.
- [6] PALÁSTI, I.: „Threshold functions for subgraphs of given type of the bichromatic random graph”. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **7** (1962) 215—221.
- [7] RÉNYI, A.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Anhang über Informationstheorie*. Berlin, Deutscher Verl. der Wiss., 1962.

О СВЯЗНОСТИ ДВУХЦВЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

I. PALÁSTI

Резюме

Пусть двухцветный случайный граф $\Gamma_{m,n,N}$ состоит из m пронумерованных вершин P_1, P_2, \dots, P_m , которые окрашены первой краской, из n пронумерованных вершин Q_1, Q_2, \dots, Q_n , которые окрашены второй краской, и из N случайно выбранных граней. Точки одинакового цвета нельзя соединять гранью. В работе показывается, что в случае $m = \lambda n$ (где $\lambda > 1$ константа) вероятность того, что двухцветный случайный граф $\Gamma_{m,n,N_{c,\lambda}}$ будет связным, стремится при $n \rightarrow \infty$ к $e^{-e^{-c}}$ (c — произвольная константа) при условии, что число граней $N_{c,\lambda} = [m \log m + cm]$ ($[x]$ обозначает целую часть числа x) и $\lambda > 1$. В случае $\lambda < 1$ вероятность связности также стремится к пределу $e^{-e^{-c}}$ при условии, что число граней $N_c = [n \log n + cn]$. В случае $m = n$ предельная вероятность связности двухцветных случайных графов равна $e^{-2e^{-c}}$ при условии, что число выбранных граней $N_c = [n \log n + cn]$.

ÜBER RINGE, DEREN ENDLICH ERZEUGBARE ECHTE UNTERRINGE STRENG ZYKLISCHE RECHTSIDEALE SIND

VON
FERENC SZÁSZ

§ 1. Einleitung

Professor L. RÉDEI hat in seiner Arbeit [8] alle durch ein Element erzeugten Ringe bestimmt, deren sämtliche Unterringe Ideale sind. Ferner habe ich in der Arbeit [13] alle Ringe angegeben, deren echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind. Später wurden in meiner Arbeit [14] auch die Ringe aufgezählt, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptrechtsideale sind. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun die explizite Bestimmung der Klasse aller im Titel dieser Arbeit erwähnten Ringe, welche wir im folgenden genau definieren werden. Bezüglich ähnlicher Forschungen verwiesen wir auf die Literaturverzeichnisse der Arbeit [14] und der vorliegenden Arbeit.

Für einen Ring A werde ein A -Untermodul S eines A -Rechtsmoduls M nach der Terminologie von JACOBSON [4] streng zyklisch genannt, wenn es zu S ein Element m von M mit $S = mA$ existiert. Dementsprechend nennen wir ein Rechtsideal R eines Ringes A streng zyklisch, wenn R als ein A -Untermodul des A -Rechtsmoduls A streng zyklisch ist, d. h. wenn es ein $a \in A$ mit $R = aA$ gibt.

Kurz werde ein Ring ein Ω -Ring genannt, wenn seine endlich erzeugbaren Unterringe streng zyklische Rechtsideale von A sind. Unsere Aufgabe ist dann die Bestimmung der Ω -Ringe. (Bezüglich des ähnlichen, halbgruppentheoretischen Problems siehe man meine Arbeit [15].)

Unter einem nichttrivialen Polynom verstehen wir ein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom. $|M|$ bezeichnet die Mächtigkeit einer Menge und S^+ die additive Gruppe eines Unterringes S eines Ringes A . $\{ \dots \}$ bezeichnet den durch die eingeklammerten Elemente erzeugten Unterring eines Ringes.

\mathcal{T} ist der Ring der ganzen rationalen Zahlen. p bezeichnet eine Primzahl. Bezüglich weiterer nötiger Begriffe und Bezeichnungen siehe man z. B. das Buch [9] von L. RÉDEI und das Buch [3] von L. FUCHS.

Es gilt der

Satz. *Alle Ω -Ringe sind bis auf Isomorphie die folgenden:*

- 1) Der Ring \mathcal{T} ;
- 2) Die homomorphen Bilder des Ringes $\{a\}$ mit $a = a^3 = 0$;
- 3) Die endlichen Primkörper;
- 4) Die Ringe $\{a, b\}$ mit $pa = pb = a^2 = b^2 - b = ab - a = ba = 0$;
- 5) Die Ringe $\mathcal{T}/(p^k)$ ($k \geq 2$) und $p(\mathcal{T}/(p^l))$ ($l \geq 3$)
- 6) Die Ringe, deren additive Gruppe periodisch, aber keine p -Gruppe ist,

und für die jede p -Komponente einem Ring $\mathcal{T}/(p^k)$ ($k \geq 1$) isomorph ist.

§ 2. Vorbereitungen

Aus der Definition der Ω -Ringe folgt, dass alle homomorphen Bilder eines Ω -Ringes ebenfalls Ω -Ringe sind. (Dagegen ist ein Unterring eines Ω -Ringes im allgemeinen kein Ω -Ring, denn der Unterring 2. \mathcal{I} von \mathcal{I} besitzt den endlich erzeugbaren echten Unterring 6. \mathcal{I} , der kein streng zyklisches Rechtsideal von 2. \mathcal{I} ist. Das triviale Beispiel eines Zeroringes von Primzahlordnung, der offenbar ein Ω -Ring ist, zeigt übrigens, dass ein endlich erzeugbarer Ω -Ring nicht notwendig ein streng zyklisches Rechtsideal ist. Ferner braucht ein echter Unterring eines Ω -Ringes im allgemeinen kein streng zyklisches Rechtsideal zu sein, wofür ein Beispiel durch die Summe von unendlich vielen nichtisomorphen endlichen Primkörpern geliefert wird.)

Für alle Elemente a eines Ω -Ringes A gilt $aA \subseteq \{a\}$. Ist nämlich $\{a\} = A$, so ist die Behauptung trivial. Im anderen Falle ist $\{a\}$ ein durch ein Element erzeugter echter Unterring, also ein (streng zyklisches) Rechtsideal von A , weshalb dann die Behauptung $aA \subseteq \{a\}$ richtig ist. Aus dieser Bemerkung folgt, dass die endlich erzeugbaren echten Unterringe eines Ω -ringes kommutativ sind, ferner folgt dasselbe wegen der lokalen Eigenschaft der Kommutativität sogar für alle echten Unterringe. Deshalb sind die Ω -Ringe entweder kommutativ, oder — nach der Terminologie von L. RÉDEI [9] — einstufig nichtkommutativ. Es wird sich unter anderem herausstellen, dass die einstufig nichtkommutativen Ω -Ringe endlich sind. (Die einstufig nichtkommutativen endlichen Ringe hat RÉDEI [9] allgemein bestimmt. Jedoch werden seine Resultate hier nicht benutzt, denn man kommt im Falle der Ω -Ringe auf direktem Wege leichter zum Ziel.)

Hilfssatz 2.1. *Jedes Element a eines Ω -Ringes A ist die Nullstelle eines nichttrivialen Polynomes $f(x) \in x. \mathcal{I}[x]$*

Beweis. Im Falle $\{a^2\} = A$ erhält man $a \in \{a^2\}$. Im Falle $\{a^2\} \neq A$ ergibt sich $a^3 = a^2$. $a \in \{a^2\}$. Somit ist Hilfssatz 2.1 bewiesen.

Hilfssatz 2.2 *Die additive Gruppe A^+ eines von Null verschiedenen Ω -Ringes ist keine teilbare (»divisible«) Gruppe.*

Beweis. Wir setzen voraus, dass A^+ teilbar ist. Dann gilt $nA = A$ für jedes $n \neq 0$ ($n \in \mathcal{I}$). Es sei a ein beliebiges Element von A . Es sei $f(x)$ durch Hilfssatz 2.1 gesichertes Polynom mit dem Anfangskoeffizienten $k \neq 0$. Es folgt, dass $\{ka\}^+$ reduziert, und zwar die direkte Summe von endlich vielen zyklischen Gruppen ist. Da aber kaA^+ ein endomorphes Bild der teilbaren Gruppe A^+ ist, ergibt sich wegen $kaA \subseteq \{ka\}$ gewiss $kaA = 0$, somit $aA = = a(ka) = (ka) \cdot A = 0$ für jedes $a \in A$. Deshalb gilt $A^2 = 0$, und wegen der Definition der Ω -Ringe auch $|A| = p$. $pA = 0 \neq A$, was der Teilbarkeit von A widerspricht. Somit haben wir den Hilfssatz 2.2 bewiesen.

Hilfssatz 2.3. *Lässt sich ein endlicher Ω -Ring A nicht durch ein Element erzeugen, so ist er durch zwei Elemente erzeugbar, und zwar gilt dann $A \cong \cong \{a, b\}$ mit $pa = pb = a^2 = b^2 - b = ab - b = ba = 0$ und passendem p .*

Beweis. Zuerst werden wir beweisen, dass die additive Gruppe eines beliebigen echten Unterringes S von A zyklisch ist. S kann nämlich in einen echten maximalen Unterring $M = mA$ ($m \in A$) eingebettet werden. Wegen der Maximalität von M und wegen $mA \subseteq \{m\} \neq A$ ergibt sich $mA = \{m\}$, folglich $m = mx$ ($x \in A$). Dann ist die additive Gruppe $m\{x\}^+$ des Unterringes $m\{x\}$ wegen $mx^k = m(k \in \mathcal{I}, k \geq 1)$ zyklisch, und deshalb ist auch S^+ zyklisch. Meine Arbeit [11] bestimmt alle Ringe, in denen die additive Gruppe jedes

echten Unterringes zyklisch ist. Nach [11] und nach unseren Voraussetzungen ergibt sich $|A| = p^2$ und $pA = 0$ für eine Primzahl p . Ferner ist $A = \{a, b\}$ mit $|\{a\}| = |\{b\}| = p$. Wir beweisen, dass A nichtkommutativ ist.

Ist $ab = ba$, so erhält man wegen $ab = ba \in \{a\} \cap \{b\}$ sogar $ab = ba = 0$. Wir betrachten jetzt einige Unterfälle. Ist $a^2 = b^2 = 0$, so ergibt sich $A^2 = 0$ und wegen der Definition der Ω -Ringe $|A| = p$, also ein Widerspruch. Folglich darf im Falle $a^2 = 0$ schon $b^2 = b$ vorausgesetzt werden. Dann gewinnen wir aus $ab = ba$, $a^2 = 0$ und $b^2 = b$ offenbar

$$(a + b)^2 = b, \quad (a + b) - (a + b)^2 = a,$$

also $A = \{a + b\}$, was wegen der Voraussetzung unmöglich ist. Der Fall $a^2 = a$, $b^2 = 0$ ist zum Fall $a^2 = 0$, $b^2 = b$ ganz ähnlich. Im Fall $a^2 = a$, $b^2 = b$ erhält man aus $ab = ba$ offenbar $a = (a + b)a \in \{a + b\}$, $b = (a + b)b \in \{a + b\}$, also den Widerspruch $A = \{a + b\}$. Also ist A nichtkommutativ.

Gewiss gelten $a^2 = a$ oder $b^2 = b$, denn im Fall $a^2 = b^2 = 0$ erhält man $ab = ka$, $ba = lb$ ($k, l \in \mathcal{I}$), mit passenden k und l . Es muss $p \mid k^2$, $p \mid l$ und $ab = 0$ sein, was unmöglich ist. Ist $a^2 = 0$, $b^2 = b$, so ergibt sich wegen $ab \neq ba$ und wegen $p \mid l^2$ bzw. $k^2 \equiv k \not\equiv 0 \pmod{p}$ offenbar $ab = a$ und $ba = 0$. Der Fall $a^2 = a$, $b^2 = 0$ ist dem vorigen ähnlich. Im Fall $a^2 = a$ und $b^2 = b$ gewinnen wir $k^2 \equiv k \pmod{p}$ und $l^2 \equiv l \pmod{p}$. Wegen $(ab)a = a(ba)$ und $(ba)b = b(ab)$ erhält man auch $k \equiv lk \equiv l \pmod{p}$, folglich wegen $ab \neq ba$ auch $ab = a$ und $ba = b$. Mit den Bezeichnungen $a_1 = a - b$ und $b_1 = b$ gilt dann $A = \{a_1, b_1\}$ und $pa_1 = pb_1 = a_1^2 = b_1^2 - b_1 = a_1b_1 - a_1 = b_1a_1 = 0$. Hierdurch ist dieser Fall auf einen vorigen Fall zurückgeführt. Somit haben wir Hilfssatz 2.3 bewiesen.

§ 3. Der Fall der Ω -Ringe mit elementarer additiver p -Gruppe

Jetzt werden wir die im Titel dieses § erwähnten Ω -Ringe A , d. h. die Ω -Ringe A mit $pA = 0$ betrachten.

Hilfssatz 3.1. *Ist A durch ein Element erzeugter nilpotenter Unterring eines Ω -Ringes B , gilt ferner $pA = 0$, so ist A endlich, und zwar gilt $A^3 = 0$.*

Beweis. Es sei $A = \{a\}$ ($a^n = 0$, $a^{n-1} \neq 0$, $pa = 0$) Dann ist $|A| < \aleph_0$. Wegen $a^3 = a^2 \cdot a \in \{a^2\}$ gilt eine Gleichung

$$a^3 + n_1 a^2 + \dots + n_s a^{2^s} = 0 \quad (n_i \in \mathcal{I}).$$

Ist hier $(p, n_1) = 1$, so lässt sich die Kongruenz

$$n_1 \cdot m \equiv 1 \pmod{p} \quad (m \in \mathcal{I})$$

lösen, somit gilt dann $a^2 = -m(a^3 + \dots + n_s a^{2^s}) = a^2 a_1$ ($a_1 \in \{a\}$). Also ergibt sich

$$a^2 = a^2 a_1 = \dots = a^2 \cdot a_1^n = 0,$$

woraus $A^2 = 0$ folgt. Ist aber $p \mid n_1$, so erhält man $a^3 = -a^3 (n_2 a + \dots + n_s a^{2^{s-3}}) = a^3 a_2$ ($a_2 \in \{a\}$), also $a^3 = a^3 \cdot a_2^n = 0$ und $A^3 = 0$. Somit haben wir Hilfssatz 3.1 bewiesen.

Hilfssatz 3.2. Für einen Ω -Ring $A = \{a\}$ mit $pa = 0$ gilt entweder $a^3 = 0$, oder $a^2 = a$ (a ist ein geeignetes erzeugendes Element von A).

Beweis. Ist A nilpotent, so erhält man nach Hilfssatz 3.1 $a^3 = 0$. Ist aber A nicht nilpotent, und J das (Jacobsonsche) Radikal von A , so ist $J \neq A$, denn A ist wegen $a^3 \in \{a^2\}$ und $pa = 0$ endlich. Ferner ist A/J wegen der Kommutativität und nach einem bekannten Satz von E. NOETHER die direkte Summe von Körpern. Es seien $\{b\}$ und $\{c\}$ Primkörper in A/J mit $\{b\} \cap \{c\} = 0$, $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = cb = 0$. Dann erhält man $(b + c)^2 = b + c$, $b = (b + c)b$, $c = (b + c)c$, folglich $\{b + c\} = \{b\} \oplus \{c\}$, was wegen $p \neq p^2$ unmöglich ist. Also erhält man $A/J \cong \mathcal{I}/(p)$. Da J nilpotent ist, existiert ein idempotentes Element $e \in A$. Dann ist der Unterring $\{e\}$ sowohl ein Primkörper, als auch ein Rechtsideal in A , woraus $\{e\} \cap J = \{e\}$. $J = J \cdot e = 0$ und $A = \{e\} \oplus J$ folgt. Da J ein direkter Summand von A ist, ist das endomorphe Bild J von A ebenfalls durch ein Element erzeugt, d. h. $J = \{j\}$ ($j \in A$). Nach Hilfssatz 3.1 erhält man $j^3 = 0$. Da jedes Element von A eine Gestalt $m_1e + m_2j + m_3j^2$ ($m_i \in \mathcal{I}$) besitzt, gibt es ein Element $c = n_1e + n_2j + n_3j^2$ ($n_i \in \mathcal{I}$) mit $J = cA$ und $j = ca$ mit $a = k_1e + k_2j + k_3j^2$ ($k_i \in \mathcal{I}$). Hiernach ergibt sich aber $j = n_1k_1e + n_2k_2j^2$ und wegen $\{e\} \cap J = 0$ auch $j = j \cdot j_1$ mit $j_1 = n_2k_2j \in J$. Ferner gewinnen wir

$$j = j \cdot j_1 = j_1 \cdot j_1^2 = j \cdot j_1^3 = 0,$$

also $J = 0$ und $A \cong \mathcal{I}/(p)$. Somit haben wir Hilfssatz 3.2 bewiesen.

Hilfssatz 3.3. Jeder Ω -Radikalring A mit $pA = 0$ ist endlich.

Beweis. Wir setzen voraus, dass A unendlich ist. Lässt sich A durch endlich viele Elemente erzeugen, so gibt es eine minimale Anzahl n von erzeugenden Elementen. Dann ist $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ für geeignete Elemente a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) und $S \neq A$ für $S = \{a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Es gilt $S = s \cdot A \subseteq \subseteq \{s\}$ und somit $A = \{a_1, s\}$, also $n \leq 2$. Im Falle $n = 1$ ist A wegen $pA = 0$ und wegen des Hilfssatzes 2.1 endlich. Also kann $n = 2$, d. h. $A = \{a, b\}$ vorausgesetzt werden. Wegen $ab \in \{a\}$, $ba \in \{b\}$, $x^3 \in \{x^2\}$ und $px = 0$ für jedes $x \in A$ ist dann A endlich, was ausgeschlossen ist. Also kann A nicht durch endlich viele Elemente erzeugt werden. Deshalb gibt es eine Folge a_1, a_2, a_3, \dots von Ringelementen mit der Bedingung $a_{j+1} \notin \{a_1, a_2, \dots, a_j\}$ für jedes j ($j \in \mathcal{I}$; $j \geq 1$). Es sei $T = \{a_1, a_2, a_3\}$. Dann ist $T \neq A$ und $T = tA \subseteq \{t\}$ ($t \in A$). Ferner ergibt sich wegen der Definition der Folge a_1, a_2, a_3, \dots gewiss $|T| \geq p_3$. Wegen $ax \in \{a\}$ ($x \in A$) stimmt die Menge der Hauptrechtsideale von A mit der Menge der durch ein Element erzeugten Unterringe von A überein, und wegen $px = 0$, $x^3 \in \{x^2\}$ ($x \in A$) ist A ein MHR-Ring in Sinne meiner Arbeit [16]. Folglich ist der Radikalring A nach [16] ein Nilring, und das Element $t \in A$ ist nilpotent. Nach Hilfssatz 2.1 ergibt sich $t^3 = 0$, $|T| \leq p^2$. Mit diesem Widerspruch ist Hilfssatz 3.3 bewiesen.

Hilfssatz 3.4. Jeder Ω -Ring A mit $pA = 0$ ist endlich.

Beweis. Wir setzen voraus, dass A unendlich ist. Dann ist A nach dem Hilfssatz 3.3 kein Radikalring. Also gilt $J \neq A$ für das Radikal J von A . Wie wir im Beweis des Hilfssatzes 3.3 gesehen haben, ist A ein MHR-Ring (vgl. [16]). Also ist der halbeinfache MHR-Ring A/J die direkte Summe von idempotenten minimalen Rechtsidealen von A/J . Da in Ω -Ringen jeder Unterring auch ein Rechtsideal ist, ist A/J die direkte Summe von Primkörpern. Ein unmittelbares Rechnen zeigt, dass A/J selbst ein Primkörper ist, denn man erhält einen Widerspruch, wenn die Mächtigkeit der direkten

Summanden in einer Zerlegung von A/J mindestens zwei ist. Da A ein *MHR*-Ring ist, ist J ein Nilideal, und es gilt $A = \{e\} \oplus J$ für ein idempotentes Element e , denn wegen $|A| \geq \aleph_0$ kann A nicht endlich erzeugt werden. Somit ist A wegen $\{x, y\} = zA \subseteq \{z\}$ kommutativ. Also ist J ein endomorphes Bild von A , folglich ist J ebenfalls ein Ω -Ring, woher nach Hilfssatz 3.3 $|J| < \aleph_0$ und wegen $|A/J| = p$ auch $|A| < \aleph_0$ folgt. Somit haben wir Hilfssatz 3.4 bewiesen.

§ 4. Der Fall der Ω -Ringe mit periodischer additiver Gruppe

Hilfssatz 4.1. *Jeder Ω -Ring A , dessen additive Gruppe A^+ eine p -Gruppe ist, ist endlich.*

Beweis. Nach Hilfssatz 3.4 darf angenommen werden, dass $pA \neq 0$ ist. Dann ist die Gruppe A^+ die direkte Summe einer teilbaren Abelschen Gruppe G_t mit einer reduzierten Abelschen Gruppe G_r . Es gilt also $A^+ = G_t \oplus G_r$. Da offenbar

$$\text{Rang}(A/pA)^+ = \text{Rang}(G_r/pG_r) \geq \text{Rang } G_r$$

gilt, und der Ω -Ring A/pA nach Hilfssatz 3.4 endlich ist, hat G_r einen endlichen Rang. Ein berühmter Satz von A. G. KUROSCHE bestimmt explizit alle Abelschen p -Gruppen mit endlichem Rang. (Vgl. noch das Buch [3].) Nach diesem Satz und wegen der Reduziertheit von G_r ist G_r endlich. Daher gibt es eine Zahl $k (\in \mathcal{I}, \neq 0)$ mit $kG_r = 0$.

Es sei jetzt $B = G_r + G_rA + AG_r + AG_rA$, d. h. das durch G_r in A erzeugte Ideal. Dann gilt $B^+ = G_r \oplus (G_t \cap B)$. Da A/B ein Ω -Ring und die Abelsche Gruppe $G_t/(G_t \cap B) \cong (A/B)^+$ teilbar ist, ergibt sich nach Hilfssatz 2.2 gewiss $B = A$ und $G_t \subseteq B$. Wegen $kG_r = 0$ erhält man $kB = 0$ und $kA = 0$, woraus $G_t = 0$ und $|A| < \aleph_0$ folgt.

Hilfssatz 4.2. *Ist A ein Ω -Ring, dessen additive Gruppe A^+ eine p -Gruppe mit der Bedingung $pA^+ \neq 0$ ist, so ist A entweder einem Ring $\mathcal{I}/(p^k)$, oder einem Ring $p(\mathcal{I}/(p^{k+1}))$ isomorph ($k \geq 2$).*

Beweis. A ist nach Hilfssatz 4.1 endlich. Ferner lässt sich A wegen $pA \neq 0$ und Hilfssatz 2.3 durch ein Element erzeugen, d. h. $A = \{a\}$ und $|A| < \aleph_0$. Dann existiert ein $b \in A$ mit $pA = bA$, und ein $b \in A$ mit $pa = bc$. Da $b, c \in \{a\}$ ist, erhält man $pa = a \cdot a_1$ mit $a_1 \in \{a\}$. Wegen $p^k a = a \cdot a_1^k$ ist $a\{a_1\}^+ = \{pa\}^+$ eine zyklische Gruppe. Da $|A| < \aleph_0$ ist, ergibt sich $\text{Rang } A^+ = \text{Rang } (A/pA)^+$, und da A/pA ein Ω -Ring ist, ist nach Hilfssatz 3.2 $\text{Rang } A^+ \leq 2$.

Jetzt wird die Unmöglichkeit von $\text{Rang } A^+ = 2$ bewiesen. Nach dem Hilfssatz 3.2 erhält man entweder $a^3 \in pA$ bzw. $a^2 \in pA$, oder $a^2 - a \in pA$. Da $pA^+ = \{pa\}^+$ zyklisch ist, ergibt sich $pa^2 = pa \cdot a = kpa$ ($k \in \mathcal{I}$), denn $\{pa\}$ ist ein Ideal in $\{a\}$. Wegen der Voraussetzung $\text{Rang } A^+ = 2$ darf angenommen werden, dass $a^3 \in pA$, denn in den übrigbleibenden zwei Fällen $a^2 \in pA$ bzw. $a^2 - a \in pA$ ist A^+ zyklisch. Daher besteht $a^3 = lpa$ ($l \in \mathcal{I}$), und man erhält aus $k^2pa = kpa^2 = pa^3 = lp^2a$ wegen $p^2 \mid O(a)$ gewiss $k = ps$ ($s \in \mathcal{I}$). Jedes Element von A besitzt die Gestalt $n_1a + n_2a^2$ mit $n_i \in \mathcal{I}$, und $0 \leq n_2 \leq p-1$. Diese Darstellung der Ringelemente ist eindeutig. Man kann für

den Unterring $S = \{pa, a^2\}$ aus der Bedingung $\text{Rang } A^+ = 2$ leicht $S \neq A$ beweisen, also gilt $S = s \cdot A$ ($s \in A$). Daher gibt es Zahlen $m_1, m_2, k_1, k_2 \in \mathcal{I}$ mit

$$pa = (m_1a + m_2a^2) \cdot (k_1a + k_2a^2),$$

wobei $0 \leq m_2, k_2 \leq p-1$. Nach Ausmultiplizieren ergibt sich wegen $\text{Rang } A^+ = 2$ gewiss $p|m_1 \cdot k_1$. Deshalb gewinnen wir wegen $pa^2 = sp^2a$ und

$$pa = m_1k_1a^2 + (m_1k_2 + m_2k_1)lpa + m_2k_2lsp^2a$$

gewiss $(p, (m_1k_2 + m_2k_1)l) = 1$, folglich $(p, l) = 1$.

Im Fall $p^3|O(a)$ erhält man

$$lp^2a = pa^3 = sp^2a \cdot a = sppa^2 = s^2p^3a,$$

also auch $p|l$, was der Bedingung $(p, l) = 1$ widerspricht. Deshalb ist $p^3|O(a)$ unmöglich, und hiernach ist $O(a) = p^2$. Dann ergibt sich $pa^2 = sp^2a = 0$ und $a^4 = lpa^2 = 0$. Hiernach ist $\{a^2\}^+$ zyklisch, und es gilt $|\{a^2\}| = p$. Wegen $S = \{pa, a^2\} = (m_1a + m_2a^2) \cdot A \subseteq \{a^2\}$ erhält man auch

$$\{pa\} = \{a^2\},$$

also $a^2 = da$ ($d \in \mathcal{I}$), woraus $\text{Rang } A^+ = 1$ folgt. Dieser Widerspruch beweist, dass A^+ zyklisch ist.

Das Element a lässt sich so wählen, dass $a^2 = da$, und für $O(a) = p^k$ auch $d|p^k$ gilt. Im Falle $d = p^k$ ist $pA \neq 0$ kein streng zyklisches Rechtsideal von A , und somit kann wegen der Definition der Ω -Ringe $d \neq p^k$, $d \neq 0$ vorausgesetzt werden. Ist $pA = bA$ ($b \in A$), so ergibt sich $pa = bc$ ($c \in A$), folglich $b = ra$ und $c = ta$ ($r, t \in \mathcal{I}$). Deshalb gilt $pa = ra \cdot ta = rtda$, woraus wegen $d|O(a)$ auch $d|p$ folgt. Also ist entweder $d = 1$, oder $d = p$. Im Falle $d = 1$ ergibt sich $A \cong \mathcal{I}(p^k)$ und im Falle $d = p$ folgt $A \cong p(\mathcal{I}(p^{k+1}))$ für $k \geq 2$. Somit ist Hilfssatz 4.2 bewiesen.

Hilfssatz 4.3. Jeder endliche Ω -Ring, dessen additive Gruppe A^+ keine p -Gruppe ist, ist mit einem Faktoring $\mathcal{I}(m)$ isomorph ($m \in \mathcal{I}$).

Beweis. Es lässt sich A nach Hilfssatz 2.3 durch ein Element erzeugen, denn A^+ ist keine p -Gruppe. Es werde $A = \{a\}$ gesetzt. Es sei $A' = \sum_p \oplus A_p$ die direkte Zerlegung von A in p -Komponenten A_p . Für jedes p mit $A_p \neq 0$ und für $C_p = \sum_{p' \neq p} A_{p'}$ (p' durchläuft die von p verschiedenen Primzahlen) ergibt sich $A = A_p \oplus C_p$. Es sei jetzt q eine Primzahl mit $A_q \neq 0$ und $q \neq p$. Da A^+ keine p -Gruppe ist, existiert ein solches q zu jedem p mit $p|O(a)$. Dann besteht $qA = A_p \oplus qC_p$; $qA \neq A$ und somit $qA = bA$ ($b \in A$). Also ist $qb = bc$ ($c \in A$). Da für jedes $k \geq 1$ offenbar $bc^k = q^kb$ gilt, ist $b\{c\}^+$ eine zyklische Gruppe. Dann ist aber wegen $b\{c\} = \{bc\} = \{qb\}$ auch $\{qb\}^+$ zyklisch. Wegen $q^2A = qbA \subseteq \{qb\}$ ist q^2A^+ zyklisch, und wegen $q^2A = A_p \oplus q^2C_p$ ist auch A_p zyklisch. Dann ist auch A^+ zyklisch, denn man hat p beliebig gewählt. Hieraus folgt offenbar auch $A \cong \mathcal{I}(m)$, denn sonst wäre A kein Ω -Ring. (A soll nämlich Einselement haben.) Somit haben wir Hilfssatz 4.3 bewiesen.

Hilfssatz 4.4. Jede p -Komponente A_p eines Ω -Ringes A , dessen additive Gruppe eine periodische Gruppe, aber keine p -Gruppe ist, ist einem Ringe $\mathcal{I}(p^k)$ isomorph.

Beweis. Jede p -Komponente A_p ist ein endomorphes Bild von A , und somit ist jedes A_p ein Ω -Ring. Jedes A_p ist nach Hilfssatz 4.1 endlich. Daher

liegt jeder endlich erzeugbare (echte oder nichtechte) Unterring S von A schon in einem endlichen direkten Summand von A . Ist A endlich, so folgt Hilfssatz 4.4 aus Hilfssatz 4.3. Ist aber A unendlich, so ist $A_p \oplus A_q$ für jede p -Komponente A_p und jede q -Komponente A_q endlich, und ist ebenfalls ein Ω -Ring. Daher folgt nach Hilfssatz 4.3 gewiss $A_p \cong \mathcal{I}/(p^k)$, womit Hilfssatz 4.4 bewiesen ist.

§ 5. Der nichtperiodische Fall und der Beweis des Satzes

Wir brauchen noch zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 5.1. *Ein von Null verschiedener Ω -Ring A , dessen additive Gruppe torsionsfrei ist, ist mit dem Ring \mathcal{I} isomorph.*

Beweis. Es existiert nach Hilfssatz 2.2 ein $n(\in \mathcal{I}, \neq 0)$ mit $nA \neq A$. Es sei ferner $a \neq 0$ ein beliebiges Element von A . Offenbar ist dann $\{na\}$ ein echter Unterring, folglich $\{na\} = bA \subseteq \{b\}$. Wegen $na \cdot a \in \{na\}$ erhält man

$$(*) \quad na^2 = k_1(na) + \dots + k_s(na)^s \quad (k_i \in \mathcal{I}).$$

Wir werden zeigen, dass die additive Gruppe $\{a\}^+$ von $\{a\}$ zyklisch ist.

Zunächst bemerken wir, dass für jede Untergruppe U von A^+ und für jede natürliche Zahl $k \neq 0$ die Abbildung $u \rightarrow ku$ ein Isomorphismus von U^+ auf kU^+ ist. Diese Abbildung ist nämlich ein Homomorphismus, dessen Kern wegen der Torsionsfreiheit von U gleich 0 ist.

Ist nun in der Gleichung (*) jedes k_s gleich Null, so erhält man $na^2 = 0$, $(na)^2 = 0$, also ist dann $\{na\}^+$ zyklisch. Wir dürfen annehmen, dass nicht jedes k_s Null ist. Ist in (*) der Koeffizient $k_1 \neq 0$, so ergibt sich $k_1 na = na$. a_1 mit $a_1 \in \{a\}$. Ist aber $k_1 = 0$, so erhält man aus (*) offenbar $na^2 = n^2 a^2 a_2$ mit $a_2 \in \{a\}$. In beiden Fällen gilt also

$$k_0 na^2 = a^2 \cdot a_0 \quad (a_0 \in \{a\}, \quad k_0 \in \mathcal{I}).$$

Hiernach ist $a^2 \cdot a_0^m = (k_0 n)_0^m a^2$, und $(k_0 na^2)^+$ ist zyklisch. Wegen $k_0 n \{a^2\} = \{k_0 na^2\}$ und wegen des im vorigen erwähnten gruppentheoretischen Isomorphismus ist dann auch $\{a^2\}^+$ zyklisch. Da der Unterring $\{a^2\}$ ein Rechtsideal von A ist, gilt $a^3 = da^2$ ($d \in \mathcal{I}$).

Wegen $n\{a\} = bA \subseteq \{b\}$ und wegen $b^3 = fb^2$ ($f \in \mathcal{I}$) ergibt sich $na = b$. $x = kb + lb^2$. Ist hierbei $k = 0$, so erhält man $na = lb^2$ ($k, l \in \mathcal{I}$), und $\{na\}$ ist dann wegen $b^3 = fb^2$ zyklisch, woraus nach der Isomorphie $\{a\}^+ \cong \{na\}^+ = \{na\}^+$ folgt, dass auch $\{a\}$ zyklisch ist. Ist aber $k \neq 0$, so gewinnen wir $kb = b$. ($x - lb$), folglich $kb = b$. b_1 ($b_1 \in A$). Dann gilt $b \cdot \{b_1\} = \{bb_1\} = \mathcal{I} \cdot k \cdot b$, und hiernach ist $\{a\}^+$ wegen $\{a\}^+ \cong \{na\}^+ \subseteq \{b\}^+ \cong \{kb\}^+$ zyklisch.

Es seien nun x und y beliebige Elemente von A mit $x \neq 0$, $y \neq 0$. Wegen $nA \neq A$ ist $\{nx, ny\} \neq A$, also ergibt sich $\{nx, ny\} = cA$ ($c \in A$). Folglich gilt wegen $\{nx, ny\} \subseteq \{c\}$ auch $n^2(xy - yx) = 0$ und somit wegen der Torsionsfreiheit von A^+ auch $xy - yx = 0$. Also ist A kommutativ. Da $\{c\}^+$ nach den Bewiesenen zyklisch ist, erhält man $c^2 = gc$ ($g \in \mathcal{I}$), und somit hat A^+ den Rang 1, denn man hat x und y beliebig gewählt. Es sei $z \neq 0$ ein festes Element von A mit $z^2 = mz$. Dann ergibt sich $k_x \cdot x = l_x \cdot z \neq 0$

und $k_y \cdot y = l_y \cdot z \neq 0$ mit $k_x, k_y, l_x, l_y \in \mathcal{I}$. Offenbar ist die Abbildung

$$x \rightarrow m \cdot \frac{l_x}{k_x} \quad (x \in A)$$

ein Isomorphismus von A auf einen Unterring U des rationalen Zahlkörpers K_0 .

Ist nun $\frac{l}{k} \in U$ für $l, k \in \mathcal{I}$, $(l, k) = 1$, so enthält der Unterring $\left\{ \frac{l}{k} \right\}$

alle Potenzen von $\frac{l}{k}$, und somit ist dann $\left\{ \frac{l}{k} \right\}^+$ nicht zyklisch. Also gilt

im Fall $\frac{l}{k} \in U$; $l, k \in \mathcal{I}$ gewiss $k \mid l$, folglich $U \subseteq \mathcal{I}$. Es sei $A = \{a\}$ mit

$a^2 = da$. Im Falle $d = 0$ ist A kein Ω -Ring, denn A^+ ist torsionsfrei. Also ergibt sich $d \neq 0$. Es sei p eine beliebige Primzahl. Da $pA \neq A$ ist, erhält man $pA = b_1A$, folglich $pa = b_1$. $b_2 (b_i \in A)$ und $b_i = t_i a$, woraus sich auch $pa = t_1 \cdot t_2 da$ und somit $p = t_1 t_2 d$, $d \mid p$ ergibt. Gilt nun $p_1 \neq p_2$ für zwei Primzahlen, gewinnen wir $(p_1, p_2) = 1$ und $d = 1$, also $A \cong \mathcal{I}$. Somit haben wir Hilfssatz 5.1 bewiesen.

Hilfssatz 5.2. Die additive Gruppe A^+ eines Ω -Ringes ist keine gemischte Gruppe.

Beweis. Es sei A ein Ω -Ring mit gemischter additiver Gruppe, und P sein maximales periodisches Ideal. Da A/P ein torsionsfreier Ω -Ring ist, ergibt sich nach Hilfssatz 5.1 $A/P \cong \mathcal{I}$. Da ferner $(A/P)^+$ eine freie Abelsche Gruppe ist, gilt $A^+ = P \oplus \mathcal{I}u$ mit $u \in A$. Wegen $A/P \cong \mathcal{I}$ erhält man auch $u^2 - u \in P$, folglich $lu^2 = lu \neq 0$ mit $l \in \mathcal{I}$, $O(u) = 0$. Zuerst nehmen wir $A = \{u\}$ an. Ein leichtes Rechnen liefert $P = \{u^2 - u\}$. Also ergibt sich für jede Primzahl p mit $(p, l) = 1$ auch $pP = P$. Da $pA \neq A$ ist, und im Fall $A = \{u\}$ auch $pA = \{pu\}$ gilt, gewinnen wir $pu = u_1 \cdot u_2 = u \cdot u_3$ ($u_i \in \{u\}$). Hiernach ist $u \cdot \{u_3\}^+ = \mathcal{I} \cdot pu$ zyklisch, ferner $\mathcal{I}pu \cong \{u\}^+$, was der Bedingung $\{pu\} = P \oplus \mathcal{I}pu$ widerspricht, denn die letztere Gruppe ist ebenfalls gemischt. Also gilt gewiss $\{u\} \neq A$.

Weiterhin ergibt sich $A^+ = P \oplus \mathcal{I} \cdot u^{2^k}$ und $u^{2^{k+1}} - u^{2^k} \in P$ für jedes $k = 1, 2, 3, \dots$ und freilich auch $\{u^{2^k}\} \neq A$. Man betrachte die Unterringkette

$$(**) \quad \{u\} \supseteq \{u^2\} \supseteq \{u^4\} \supseteq \dots \supseteq \{u^{2^k}\} \supseteq \dots$$

Da der Untergruppenverband von A^+ modular ist und $P \oplus \mathcal{I} \cdot u^{2^k} = P \oplus \mathcal{I}u$ für jedes $k = 1, 2, 3, \dots$ gilt, erhält man die Kette

$$(***) \quad \{u^2 - u\} \supseteq \{u^4 - u^2\} \supseteq \dots \supseteq \{u^{2^{k+1}} - u^{2^k}\} \supseteq \dots$$

derart, dass in (**) ein \supset statt \supseteq genau dann gültig ist, wenn an der entsprechenden Stelle von (***) ebenfalls \supset erfüllt ist. Man kann nämlich $P \cap \{u^t\} = \{u^{2^t} - u^t\}$ leicht einsehen. Ist also (**) eine unendliche echt absteigende Hauptrechtsidealkette, so ist (***) ebenfalls eine solche Kette und umgekehrt.

Es sei jetzt $w = u^{2^{k+1}} - u^{2^k}$. Dann gilt $lw = 0$. Es sei $p \mid l$. Im Ring $\{w\}/\{pw\}$ ist jeder Unterring ein Ideal, und deshalb ist $w^3 \in \{w^2, pw\}$ (vgl. Hilfssatz 2.1). Daher ist $\{w\}/\{pw\}$ endlich. Ferner gilt wegen $l\{w\} = 0$ und $\text{Rang } \{w\}^+ = \text{Rang } (\{w\}/\{pw\})^+ < \aleph_0$ auch $|\{w\}| < \aleph_0$. Hiernach muss

sowohl (***), als auch (**) nach endlich vielen Schritten abbrechen. Es gibt also einen Index k mit

$$\{u^{2^k}\} = \{u^{2^{k+1}}\},$$

woraus auch

$$u^{2^k} = g(u^{2^{k+1}}) = u^{2^k} \cdot u_1$$

mit $g(x) \in x$. $\mathcal{A}[x]$ und $u_1 \in \{u\}$ folgt. Daher ist $\{u^{2^k}\}^+$ eine zyklische Gruppe, denn es gilt $\{u^{2^k}\} = u^{2^k} \{u_1\} = \mathcal{A} \cdot u^{2^k}$.

Es sei $z = u^{2^k}$. Da $A = P \oplus \{z\}$, und da A kommutativ ist, ist $\{z\}$ ein Ideal von A , und somit — als ein endomorphes Bild — ist $\{z\}$ ebenfalls ein Ω -Ring. Deshalb gilt $\{z\} \cong \mathcal{A}$. Ferner ist P^+ nach den Hilfssätzen 4.1 bzw. 4.4 die direkte Summe von zyklischen Gruppen. Es sei P_p die p -Komponente von P . Dann ergibt sich

$$\text{Rang}(A/pA)^+ = 1 + \text{Rang } P_p^+ \quad (P_p \neq 0).$$

Da A/pA ein Ω -Ring ist, gewinnen wir nach Vorigem $\text{Rang}(A/pA)^+ \leq 2$ (vgl. Hilfssätze 2.3, 3.2 und 3.4) und somit $\text{Rang } P_p^+ \leq 1$. Also ist jede von Null verschiedene p -Komponente von A^+ zyklisch.

Es sei jetzt q eine Primzahl mit $qP_p = P_p$. Dann ist $P_p \oplus q\{z\}$ ein endlich erzeugter echter Unterring im endomorphen Bild $B_p = P_p \oplus \{z\}$. Daher ergibt sich auch $P_p \oplus q\{z\} = b \cdot B_p$ ($b \in B_p$), folglich $qB_p = bB_p$; $qb = b \cdot b_1$ ($b, b_1 \in B_p$). Da $\{qb\}^+$ zyklisch ist und $P_p \oplus q^2 \cdot \{z\} = q^2 B_p = qbB_p \subseteq \{qb\}$ gilt, ergibt sich ein Widerspruch, denn $P_p + q^2 \cdot \{z\}$ ist gemischt. Also kann A^+ selbst keine gemischte Gruppe sein. Somit ist Hilfssatz 5.2 bewiesen.

Beweis des Satzes. Es sei A ein beliebiger Ω -Ring, und A^+ seine additive Gruppe.

A^+ ist nach Hilfssatz 5.2 keine gemischte Gruppe.

Ist A^+ torsionsfrei, so gilt nach Hilfssatz 5.1 gewiss $A \cong \mathcal{A}$, und so gewinnen wir den im Satz bei 1) erwähnten Ring.

Ist A^+ periodisch, aber keine p -Gruppe, so erhält man nach Hilfssatz 4.4 einen im Satz bei 6) vorkommenden Ring.

Ist A^+ eine p -Gruppe, aber keine elementare p -Gruppe, so gewinnen wir nach Hilfssatz 4.2 die im Satz bei 5) erwähnten Ringe.

Ist aber A^+ eine elementare p -Gruppe, so erhält man nach den Hilfssätzen 3.4, 2.3, 3.2 die im Satz bei 2), 3) und 4) erwähnten Ringe.

Es ist andererseits entweder trivial, oder durch ein leichtes Rechnen einzusehen, dass die so gewonnen und im Satz erwähnten Ringe tatsächlich Ω -Ringe sind.

Somit haben wir den Satz bewiesen.

Aus dem Satz ergibt sich die nicht-triviale und interessante

Folgerung. Lässt sich jeder endlich erzeugbare echte Unterring S eines Ringes A in einer Gestalt $S = a \cdot A$ ($a \in A$) darstellen, und besitzt A keinen endlichen nichttrivialen Unterring, so ist A dem Ring \mathcal{A} der ganzen rationalen Zahlen isomorph.

(Eingegangen: am 24. August, 1962; in veränderter Form: 1. November, 1963.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BAER, R.: "Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe". *Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften* **2** (1933) 12—17.
- [2] DEDEKIND, R.: "Über Gruppen deren sämtliche Teiler Normalteiler sind". *Mathematische Annalen* **48** (1897) 548—561.
- [3] FUCHS, L. *Abelian Groups*. Budapest, 1958.
- [4] JACOBSON, N.: *Structure of Rings*. Providence, 1956.
- [5] JONES, A.—SCHÄFFER, J. J.: „Concerning the structure of certain rings". *Bol. Fac. Ingen. Agriment. Montevideo* **6** (1957—58).
- [6] KERTÉSZ, A.—SZELE, T.: „On abelian groups every finitely generated subgroup of which is an endomorphic image". *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **15** (1953) 70—76.
- [7] RÉDEI, L.: "Die Vollidealringe". *Monatshefte für Mathematik* **56** (1952) 89—96.
- [8] RÉDEI, L.: "Vollidealringe im weiteren Sinn, I". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **3** (1952) 243—268.
- [9] RÉDEI, L.: *Algebra I*. Leipzig, 1959.
- [10] ШПЕРЛИНГ, М.: "О кольцах, каждое подкольцо которых является идеалом". *Математ. сборник* **17** (1945) 371—384.
- [11] SZÁSZ, F.: "Les anneaux ne contenant que des sous-anneaux propres cycliques". *Czechoslovak Mathematical Journal* **7** (82) (1957) 21—25.
- [12] САС, Ф.: "О кольцах, каждое подкольцо, которых является прямым слагаемым". *Математ. сбор.* **40** (1956) 269—272.
- [13] SZÁSZ, F.: "Ringe, deren echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind". *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei*. **5** (1960) A 287—292.
- [14] SZÁSZ, F.: "Die Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe Hauptrechtsideale sind". *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **13** (1962) 115—132.
- [15] SZÁSZ, F.: "Die Halbgruppen, deren endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale sind". *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* (im Erscheinen).
- [16] SZÁSZ, F.: "Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, I." *Publicationes Mathematicae Debrecen* **7** (1960) 54—63; II. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **12** (1961) 417—439; III. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **14** (1963) 447—461.
- [17] ФРЕЙДМАН, П. А.: "О кольцах разрешимого типа". Диссертация кандидата физ.—Математ. Наук, Свердловск (1960).
- [18] ФРЕЙДМАН, П. А.: "Кольца с идеализаторным условием, II". *Учёные Записки Урал. Гос. Универ. Свердловск* **2** (1959) 35—48.

О КОЛЬЦАХ, КОНЕЧНО ОБРАЗОВАННЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ПОДКОЛЬЦА КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ СТРОГО ЦИКЛИЧЕСКИМИ ПРАВЫМИ ИДЕАЛАМИ

F. SZÁSZ

Резюме

Правый идеал R кольца A называем строго циклическим, если существует такой элемент $a \in A$, что $R = a \cdot A$. Кольцо A называем Ω -кольцом, если каждое конечно образованное собственное подкольцо кольца A является строго циклическим правым идеалом. Цель работы — определение всех Ω -колец. Справедлива следующая

Теорема. Ω -кольцами, до изоморфизма будут следующие кольца:

- 1) Кольцо \mathbb{Z} целых рациональных чисел;

- 2) Гомоморфные образы кольца $\{a\}$, где $ra = a^3 = 0$;
- 3) Конечные простые поля;
- 4) Кольца $\{a, b\}$, где $ra = rb = a^2 = b^2 - b = ab - a = ba = 0$;
- 5) Кольцо $\mathcal{A}/(p^k)$ и кольцо $p(\mathcal{A}/(p^l))$, где $k \geq 2$ и $l \geq 3$;
- 6) Кольца, аддитивная группа которых является периодической группой но не p -группой, и каждая p -компонента которых изоморфна какомунибудь из факторных колец $\mathcal{A}/(p^k)$ ($k \geq 1$).

ON RANDOM MATRICES

by

P. ERDŐS and A. RÉNYI

Introduction

In the present paper we deal with certain random 0 — 1 matrices. Let $\mathcal{M}(n, N)$ denote the set of all n by n square matrices among the elements of which there are exactly N elements ($n \leq N \leq n^2$) equal to 1, all the other elements are equal to 0. The set $\mathcal{M}(n, N)$ contains clearly $\binom{n^2}{N}$ such matrices; we consider a matrix M chosen at random from the set $\mathcal{M}(n, N)$, so that each element of $\mathcal{M}(n, N)$ has the same probability $\binom{n^2}{N}^{-1}$ to be chosen. We ask now how large N has to be, for a given large value of n , in order that the permanent of the random matrix M should be different from zero with probability $\geq \alpha$ where $0 < \alpha < 1$. By other words if $M = (\varepsilon_{jk})$ we want to evaluate asymptotically the probability $P(n, N)$ of the event that there exists at least one permutation j_1, j_2, \dots, j_n of the numbers $1, 2, \dots, n$ such that the product $\varepsilon_{1j_1} \cdot \varepsilon_{2j_2} \dots \varepsilon_{nj_n}$ should be equal to 1. A second way to formulate the problem is as follows: we shall say that two elements of a matrix are in independent position if they are not in the same row and not in the same column. Now our question is to determine the probability that the random matrix M should contain n elements which are all equal to 1 and are pairwise in independent position. A third way to state the problem is: what is the probability of the event that the permanent of the random 0 — 1 matrix M should be positive?

We prove in § 1 (Theorem 1) that if

$$(1) \quad N(n) = n \log n + cn + o(n)$$

where c is an arbitrary real constant, then

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(n, N(n)) = e^{-2e^{-c}}.$$

This implies that if

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_1(n) - n \log n}{n} = +\infty,$$

then

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(n, N_1(n)) = 1,$$

while if

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_2(n) - n \log n}{n} = -\infty,$$

then

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(n, N_2(n)) = 0.$$

This result can be interpreted also in the following way, in terms of graph theory. Let $\Gamma_{n,N}$ be a bichromatic random graph containing n red and n blue vertices, and N edges which are chosen at random among the n^2 possible edges connecting two vertices having different colour (so that each of the $\binom{n^2}{N}$ possible choices has the same probability). Then $P(n, N)$ is equal

to the probability that the random graph $\Gamma_{n,N}$ should contain a factor of degree 1, i.e. $\Gamma_{n,N}$ should have a subgraph which contains all vertices of $\Gamma_{n,N}$ and n disjoint edges, i.e. n edges which have no common endpoint.

Clearly if the permanent of a matrix M consisting of zeros and ones is positive, then the matrix M does not contain a row or column all elements of which are equal to 0 (called in what follows for the sake of brevity a 0-row resp. 0-column), but conversely, if M does not contain a 0-row, nor a 0-column, it is not sure that its permanent is different from 0. However, from our result it follows that this is "almost" sure. As a matter of fact, Theorem 1 can be interpreted as follows: if $P(n, N)$ denotes the probability that $\text{perm}(M) > 0$ and $Q(n, N)$ the probability that M does not contain a 0-row or a 0-column, then if $N = N(n)$ is chosen so that for $n \rightarrow \infty$ we should have $Q(n, N(n)) \rightarrow 1$, then we have also $P(n, N(n)) \rightarrow 1$.

One can state this result somewhat vaguely also in the following way: if the permanent of a random matrix with elements 0 and 1 is equal to 0, then under the conditions of Theorem 1 this in most cases is due to the presence of a 0-row or a 0-column.

In § 2 we deal with a somewhat simpler variant of the problem, when the elements ε_{ij} ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$) of the matrix M are independent random variables each taking on the values 0 and 1 with probability $1 - p$ and p respectively. The results obtained are analogous to those of § 1. In § 3 we add some remarks and mention some unsolved problems.

Besides elementary combinatorial and probabilistic arguments similar to that used by us in our previous work on random graphs (see [1], [2], [3], [4], [5]) our main tool in proving our results is the well-known theorem of D. KÖNIG (see [6]), which is nowadays well known in the theory of linear programming, according to which if M is an n by n matrix, every element of which is either 0 or 1, then the minimal number of lines (i.e. rows or columns) which contain all the 1-s, is equal to the maximal number of 1-s in independent position. As a matter of fact, for our purposes we need only the special case of this theorem, proved already by G. FROBENIUS [7], concerning the case when the maximal number of ones in independent position is equal to n .

§ 1. Random square matrices with a prescribed number of zeros and ones

Let $P(n, N)$ denote the probability of the event that the random matrix M ($M \in \mathcal{M}(n, N)$) has a positive permanent. According to the theorem of FROBENIUS-KÖNIG (see [6] and [7]) $1 - P(n, N)$ is equal to the probability that there exists a number k such that there can be found k rows and $n - k - 1$

columns of M which contain all the ones ($0 \leq k \leq n-1$). If we denote by $Q_k(n, N)$ the probability that there can be found k rows and $n-k-1$ columns or k columns and $n-k-1$ rows which contain all the ones, and k is the least number with this property, then clearly

$$(1.1) \quad 0 \leq 1 - P(n, N) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} Q_k(n, N).$$

Now we shall prove that if

$$(1.2) \quad N(n) = n \log n + cn + o(n)$$

where c is a real constant, then

$$(1.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} Q_k(n, N(n)) = 0,$$

further that

$$(1.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_0(n, N(n)) = 1 - e^{-2e^c}.$$

Clearly (1.1), (1.3) and (1.4) imply that

$$(1.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(n, N(n)) = e^{-2e^c},$$

which is the result we want to prove. Thus it remains only to prove (1.3) and (1.4). Let us consider first (1.4). Clearly $1 - Q_0(n, N(n))$ is equal to the probability of the event that the random matrix M does not contain a 0-row or a 0-column. Thus we have

$$(1.6) \quad 1 - Q_0(n, N(n)) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i S_i$$

where $S_0 = 1$ and

$$(1.7) \quad S_i = \sum_{h=0}^i \binom{n}{h} \binom{n}{i-h} \frac{\binom{(n-h)(n-i+h)}{N(n)}}{\binom{n^2}{N(n)}} \quad (i = 1, 2, \dots, 2n),$$

further for each $l \geq 0$

$$(1.8) \quad \sum_{i=0}^{2l+1} (-1)^i S_i \leq 1 - Q_0(n, N(n)) \leq \sum_{i=0}^{2l} (-1)^i S_i.$$

As clearly for each fixed value of i and for $n \rightarrow \infty$, if $N(n)$ is defined by (1.2) we have

$$(1.9) \quad S_i = \frac{2^i e^{-ci}}{i!} (1 + o(1)),$$

it follows that

$$(1.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - Q_0(n, N(n))) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{2^i e^{-ci}}{i!} = e^{-2e^{-c}}.$$

Thus (1.4) is proved. Now let us prove (1.3).

Let us suppose that M is a matrix such that all the ones of M are contained in k columns and $n - k - 1$ rows ($k \geq 1$), and k is the least number with this property. Then the matrix M can be partitioned into four matrices A, B, C, D as shown by Fig. 1, so that D consists only of zeros. Then clearly each column of C contains at least two ones, because if a column of C would contain not more than a single 1, then by leaving out this column and adding the row in which this 1 is contained, we would get a system of $k - 1$ columns and $n - k$ rows which contain all the ones, in contradiction to our supposition of the minimum property of k .

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\hspace{1cm}}^k & \overbrace{\hspace{1cm}}^{n-k} \end{array} \\ \begin{array}{c} n-k-1 \\ \\ k+1 \end{array} \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline C & D \\ \hline \end{array} \right. \end{array}$$

Fig. 1.

Thus it follows that

$$(1.11) \quad Q_k(n, N) \leq 2 \binom{n}{k} \binom{n}{k+1} \binom{k+1}{2}^k \frac{\binom{n(n-k-1) + k(k-1)}{N-2k}}{\binom{n^2}{N}}$$

and thus, that

$$(1.12) \quad Q_k(n, N(n)) \leq \left(\frac{A \log^2 n}{\sqrt{n}} \right)^k \quad \text{for} \quad k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$$

where A is a positive constant depending only on c . Thus we obtain

$$(1.13) \quad \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} Q_k(n, N(n)) \leq \frac{A \log^2 n}{\sqrt{n} - A \log^2 n}.$$

From (1.13) we obtain (1.3) and this completes the proof of (1.5).

Thus we obtained the following

Theorem 1. Let $\mathcal{M}(n, N)$ denote the set of all n by n square matrices, among the n^2 elements of which N are equal to 1 and the other $n^2 - N$ to 0. Let M be selected at random from the set $\mathcal{M}(n, N)$ so that each of the $\binom{n^2}{N}$ elements of the set $\mathcal{M}(n, N)$ has the same probability $\left(\frac{n^2}{N} \right)^{-1}$ to be selected. Let $P(n, N)$ denote

the probability of the event that the permanent of the random matrix M is positive. Then if

$$N(n) = n \log n + cn + o(n)$$

where c is any real constant, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, N(n)) = e^{-2e^{-c}}.$$

§ 2. Random matrices with independent elements

In this § we prove the following theorem which is a variant of Theorem 1.

Theorem 2. Let $M_n(p)$ be a random n by n matrix whose elements ε_{ij} ($1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq n$) are independent random variables such that

$$(2.1) \quad \mathbf{P}(\varepsilon_{ij} = 1) = p \quad \text{and} \quad \mathbf{P}(\varepsilon_{ij} = 0) = 1 - p.$$

Let $P_n(p)$ denote the probability of the event that the permanent of the random matrix $M_n(p)$ is positive. Then we have for

$$(2.2) \quad p_n = \frac{\log n + c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(2.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(p_n) = e^{-2e^{-c}}.$$

Proof of Theorem 2. The proof follows step by step the proof of Theorem 1. We have

$$(2.4) \quad 0 \leq 1 - P_n(p) \leq \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} Q_{k,n}(p)$$

where $Q_{k,n}(p)$ denotes the probability that there can be found k rows and $n - k - 1$ columns, or k columns and $n - k - 1$ rows of $M_n(p)$ which contain all the 1-s, and k is the least number with this property. In this case we have

$$(2.5) \quad 1 - Q_{0,n}(p) = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i S_i^*$$

where $S_0^* = 1$ and

$$(2.6) \quad S_i^* = \sum_{h=0}^i \binom{n}{h} \binom{n}{i-h} (1-p)^{in-h(i-h)}.$$

Thus we have for each fixed value of i if (2.2) holds

$$(2.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_i^* = \frac{2^i e^{-ic}}{i!}$$

and therefore

$$(2.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - Q_{0,n}(p_n)) = e^{-2e^{-c}}.$$

On the other hand we have now for $k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$

$$(2.9) \quad Q_{k,n}(p) \leq 2 \binom{n}{k} \binom{n}{k+1} \left(\frac{k+1}{2} \right)^k p^{2k} (1-p)^{(k+1)(n-k)}$$

and thus

$$(2.10) \quad Q_{k,n}(p_n) \leq \left(\frac{B \log^2 n}{\sqrt{n}} \right)^k \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,$$

where the constant B depends on c only.

Thus

$$(2.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n Q_{k,n}(p_n) = 0$$

and Theorem 2 follows.

§ 3. Some further remarks

The results of §§ 1 and 2 could be generalized for rectangular matrices of size m by n where $m < n$. In this case the question is: what is the probability that a random matrix of size m by n consisting of zeros and ones should contain m elements in independent position, which are all equal to 1?

Another possible generalization of our results would be to determine the probability distribution of the maximal number of ones in independent position in a random square matrix.

One may ask what can be said about the distribution of the *value* of the permanent of a random square matrix, under conditions of Theorems 1 and 2? It is easy to compute in both cases the mean value of the permanent $\text{perm}(M)$; we have evidently under conditions of Theorem 1

$$\mathbf{E}(\text{perm}(M)) = n! \frac{\binom{n^2 - n}{N(n) - n}}{\binom{n^2}{N(n)}}$$

and under conditions of Theorem 2

$$\mathbf{E}(\text{perm}(M_n(p_n))) = n! p_n^n.$$

It is easy to see, that these expressions are of the form $e^{n \log \log n + O(n)}$ and thus tend rather rapidly to $+\infty$. However one can not draw any conclusion from this fact, because as is easily seen, the variance of the permanent is still much larger than the square of the mean value. An interesting related problem is of course to evaluate under the conditions of Theorem 1 and 2 the probability of the determinant of the random matrix being different from 0.

Another problem arises in connection with the graph-theoretical interpretation of the questions discussed in the present paper: To compute the probability that a random graph having n vertices and N edges should contain a factor of the first degree? We hope to return to these problems in another paper.

(Received November 11, 1963)

REFERENCES

- [1] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: "On random graphs, I." *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **6** (1959) 290—297.
- [2] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: "On the evolution of random graphs." *Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. Sci.* **5** (1960) 17—61.
- [3] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: "On the evolution of random graphs." *International Stat. Inst.*, 32. Session, Tokyo, 1960, 119. 1—5.
- [4] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: "On the strength of connectedness of a random graph." *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **12** (1961) 261—267.
- [5] ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: "Asymmetric graphs." *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (in print).
- [6] KÖNIG, D.: "Graphok és matrixok." *Matematikai és Fizikai Lapok* **33** (1931) 116—119.
- [7] FROBENIUS, G.: "Über zerlegbare Determinanten." *Sitzungsberichte der Berliner Akademie* 1917, S. 274—277.

О СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦАХ

P. ERDŐS и A. RÉNYI

Резюме

Пусть $\mathcal{M}(n, N)$ обозначает множество всех матриц порядка $(n \times n)$, все элементы которых равны 0, за исключением N элементов, равных 1. Выберем случайным образом из множества $\mathcal{M}(n, N)$ матрицу M так, чтобы каждый из $\binom{n^2}{N}$ элементов множества мог быть выбран с одинаковой вероятностью. Главным результатом статьи является следующая

Теорема. Если $P(n, N)$ обозначает вероятность того, что перманент случайным образом выбранной матрицы M является положительным, и если

$$N(n) = n \log n + cn + o(n),$$

где c — любое действительное число, тогда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n, N(n)) = e^{-2e^{-c}}.$$

ÜBER DAS ASYMPTOTISCHE VERHALTEN DER RAND- UND ZENTRALGLIEDER EINER VARIATIONSREIHE I

von
HANS-JOACHIM ROBBERT¹

Wir betrachten n unabhängige Zufallsgrößen x_1, \dots, x_n mit der Verteilungsfunktion $\mathbf{P}\{x_i < x\} = F(x)$. Bei einem Experiment an diesen x_i mögen die Werte X_i ($i = 1, \dots, n$) eingetreten sein. Dann ist die Ranggröße $\xi_k = R_k(X_1, \dots, X_n)$ als der k -te Wert unter den X_i definiert, wenn diese der Größe nach angeordnet sind. Die so definierten Ranggrößen, die infolge der Beziehung $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n$ voneinander abhängig sind, bilden eine sog. Variationsreihe. Unter den genannten Voraussetzungen hat die Theorie des Grenzverhaltens für $n \rightarrow \infty$ der Ranggrößen in vieler Hinsicht abschließende Resultate erzielt. Kaum behandelt wurden jedoch bisher die Beziehungen zwischen Rand- und Zentralgliedern einer Variationsreihe, die wir hier untersuchen wollen.

Wir beweisen einen Satz über die Unabhängigkeit im Limes von Ranggrößen. Was die Randglieder einer Variationsreihe betrifft, d. h. Ranggrößen ξ_h und ξ_k mit $h = \text{const}$ und $n - k = \text{const}$, so wurde ihre Unabhängigkeit im Limes (unter gewissen Voraussetzungen) von E. J. GUMBEL [2] festgestellt. Einen exakten Beweis dieser Tatsache und eine Verallgemeinerung lieferte T. HOMMA [3]. In einem sehr starken Sinne bewies J. GEFFROY [1] die Unabhängigkeit im Limes von Randgliedern. Den Fall zweier Zentralglieder $\left(\frac{h}{n} \rightarrow \lambda_1, \frac{k}{n} \rightarrow \lambda_2, 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1, \text{ d.h. } \lim \frac{h}{k} > 0\right)$ behandelte N. W. SMIRNOFF [6]. Er zeigte, daß Unabhängigkeit im Limes nicht auftritt, wenn der Vektor (ξ_h, ξ_k) im Limes einer zweidimensionalen Normalverteilung unterworfen ist. Wir zeigen nun, daß Rand- und Zentralglieder stets im Limes unabhängig voneinander sind. In Bezug auf Formulierung und Beweis von Satz 1 verdanke ich Herrn Professor A. RÉNYI wertvolle Hinweise.

Satz 1. *Die Rangnummern h und k mögen derart von n abhängen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h}{k} = 0$. Dann sind die Ranggrößen ξ_h und ξ_k im Limes unabhängig, d. h. für*

$$\sigma_n = \sup_{\substack{-\infty < u < \infty \\ -\infty < v < \infty}} |\mathbf{P}(\xi_h < u, \xi_k < v) - \mathbf{P}(\xi_h < u) \mathbf{P}(\xi_k < v)|$$

gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$. In derselben Weise sind auch ξ_{n+1-h} und ξ_{n+1-k} im Limes voneinander unabhängig.

¹ Berlin.

Beweis. Die letzte Behauptung läßt sich auf die erste zurückführen, indem man die Zufallsgrößen $\bar{x}_i = -x_i$ heranzieht, die auf die Variationsreihe $\bar{\xi}_i = -\xi_{n+1-i}$ ($i = 1, \dots, n$) führen.

Wir definieren neue unabhängige Zufallsgrößen durch die Transformation

$$y_i = -\log(1 - F(x_i)) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Sie geben Anlaß zu der Variationsreihe

$$\eta_i = -\log(1 - F(\xi_i)) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Mit \mathfrak{M} bezeichnen wir die Menge der Zahlen y , für die mindestens eine Zahl \hat{y} existiert, so daß $y = -\log(1 - F(\hat{y}))$. Für $y \in \mathfrak{M}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{y_i < y\} &= G(y) = \mathbf{P}\{-\log(1 - F(x_i)) < -\log(1 - F(\hat{y}))\} = \\ &= \mathbf{P}\{x_i < \hat{y}\} = F(\hat{y}) = 1 - e^{-y}. \end{aligned}$$

Alle Zahlen $y \notin \mathfrak{M}$ liegen in Konstanzintervallen von $G(y)$. Wenn $F(x)$ stetig ist, haben somit die Zufallsgrößen y_i eine exponentielle Verteilungsfunktion. Im anderen Falle bildet der Wertevorrat von $G(y)$ nur eine echte Teilmenge des Intervalls $[0, 1]$. Nun ist

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sup_{u, v} |\mathbf{P}\{\eta_h < -\log(1 - F(u)), \eta_k < -\log(1 - F(v))\} - \\ &\quad - \mathbf{P}\{\eta_h < -\log(1 - F(u))\} \mathbf{P}\{\eta_k < -\log(1 - F(v))\}| = \\ &= \sup_{x, y \in \mathfrak{M}} |\mathbf{P}\{\eta_h < x, \eta_k < y\} - \mathbf{P}\{\eta_h < x\} \mathbf{P}\{\eta_k < y\}|. \end{aligned}$$

Die Funktion, deren Supremum hier gebildet wird, läßt sich aber in der Form $Q_{hk}(G(x); G(y))$ darstellen. Die Verteilungsfunktion von η_k unter der Bedingung $\eta_h = u$ ist nämlich gleich der Verteilungsfunktion der Ranggröße mit der Nummer $k - h$ in einer Stichprobe vom Umfang $n - h$ mit der Grundverteilung

$$\frac{G(y) - G(u)}{1 - G(u)} \quad (y \geq u)$$

(vgl. [5], § 2). Daher gilt für $x \leq y$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_h < x, \eta_k < y\} &= \int_0^x \mathbf{P}\{\eta_k < y | \eta_h = u\} d\mathbf{P}\{\eta_h < u\} = \\ &= \binom{n}{h} \binom{n-h}{k-h} \int_0^{G(x)} \left\{ \int_0^{\frac{G(y)-w}{1-w}} (1-s)^{n-k} ds^{k-h} \right\} d \int_0^w (1-t)^{n-h} dt^h \end{aligned}$$

und für $x > y$

$$\mathbf{P}(\eta_h < x, \eta_k < y) = \mathbf{P}\{\eta_k < y\} = \binom{n}{k} \int_0^{G(y)} (1-t)^{n-k} dt^k.$$

Führen wir unabhängige Zufallsgrößen z_i mit $\mathbf{P}(z_i < z) = 1 - e^{-z}$ ($z \geq 0$, $i = 1, \dots, n$) ein, die die Variationsreihe ζ_1, \dots, ζ_n liefern, setzen wir ferner

$$\mathbf{P}\{\zeta_h < x, \zeta_k < y\} - \mathbf{P}\{\zeta_h < x\} \mathbf{P}\{\zeta_k < y\} = R_{hk}(x, y),$$

so gilt die Abschätzung

$$\sigma_n \leq \sup_{x,y} |R(1 - e^{-x}, 1 - e^{-y})| = \sup_{x,y} |R_{hk}(x, y)|.$$

Damit ist unser allgemeines Problem auf ein viel einfacheres zurückgeführt, das wir mit Hilfe des folgenden Lemmas behandeln werden.

Lemma 1. Wenn $h \rightarrow \infty$, $\frac{h}{k} \rightarrow 0$, $n - k \rightarrow \infty$, so ist gilt gleichmäßig bezüglich x und y

$$R_{hk}(x, y) = \mathbf{P}\{\zeta_h < x, \zeta_k < y\} - \mathbf{P}\{\zeta_h < x\} \mathbf{P}\{\zeta_k < y\} \rightarrow 0.$$

Beweis. Da die Differenz $\zeta_k - \zeta_h$ unabhängig von ζ_h ist, (s. z. B. [4]), gilt

$$\begin{aligned} R_{hk}(x, y) &= \int_0^x [\mathbf{P}\{\zeta_k < y | \zeta_h = u\} - \mathbf{P}\{\zeta_k < y\}] d\mathbf{P}\{\zeta_h < u\} = \\ (1) \quad &= \int_0^x [\mathbf{P}\{\zeta_k - \zeta_h < y - u\} - \mathbf{P}\{\zeta_k < y\}] d\mathbf{P}\{\zeta_h < u\}. \end{aligned}$$

Man erkennt leicht, daß $R_{hk}(x, y) \geq 0$ für alle x und y .

A. RÉNYI [4] hat eine Methode eingeführt, die es gestattet, Grenzwertsätze für Ranggrößen in einer sehr eleganten Weise zu gewinnen. Wir sind jetzt in der Lage, sie anzuwenden. Es gilt die Darstellung

$$(2) \quad \zeta_k = \frac{\delta_1}{n} + \frac{\delta_2}{n-1} + \dots + \frac{\delta_k}{n+1-k},$$

wo die Zufallsgrößen $\delta_1, \dots, \delta_k$ unabhängig sind und die Verteilungsfunktion $\mathbf{P}\{\delta_j < y\} = 1 - e^{-y}$ ($y \geq 0$) haben, so daß für ihre mathematischen Erwartungen und Dispersionen

$$\mathbf{M} \delta_j = \mathbf{D}^2 \delta_j = 1 \quad (j = 1, \dots, k)$$

gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} M_k &= \mathbf{M} \zeta_k = \sum_{i=n+1-k}^n \frac{1}{i} = M_{kh} + M_h \\ (3) \quad S_k^2 &= \mathbf{D}^2 \zeta_k = \sum_{i=n+1-k}^n \frac{1}{i^2} = S_{kh}^2 + S_h^2, \end{aligned}$$

und wegen $\mathbf{M} |\delta_j - 1|^3 = \int_0^\infty |x - 1|^3 e^{-x} dx < \int_0^\infty e^{-x} dx + \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx \leq 5$ gilt ferner

$$T_k^3 = \sum_{i=1}^k \mathbf{M} \left| \frac{\delta_i - 1}{n+1-i} \right|^3 \leq 5 \sum_{i=n+1-k}^n \frac{1}{i^3} < 5 \int_{n-k}^n \frac{dt}{t^3} < \frac{5k}{n(n-k)^2}.$$

Durch derartige Integralabschätzungen (nach unten und oben) der Summen M_h und S_k^2 findet man weiter ($0 < \vartheta < 1$)

$$(4) \quad \begin{aligned} M_h &= (1 + o(1)) \log \frac{n}{n-h} = \frac{h}{n} (1 + o(1)) \\ S_k^2 &= \frac{k}{(n-k)n} \left(1 + \vartheta \frac{n}{(n-k)k} \right) = \frac{k}{(n-k)n} (1 + o(1)) \end{aligned}$$

und somit

$$\frac{T_k^3}{S_k^3} \leq 5 \sqrt{\frac{n}{(n-k)k}} \rightarrow 0.$$

Daher läßt sich auf die Summe (2) der Satz von Ljapunoff anwenden, d. h. es gilt

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\zeta_k - M_k}{S_k} < x \right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Wegen $M_{kh} = \mathbf{M}(\zeta_k - \zeta_h) = \sum_{i=n+1-k}^{n-h} \frac{1}{i}$, $S_{kh}^2 = \mathbf{D}^2(\zeta_k - \zeta_h) = \sum_{i=n+1-k}^{n-h} \frac{1}{i^2}$ braucht man in den obigen Rechnungen nur n und k durch $n-h$, bzw. $k-h$ zu ersetzen, um mit Hilfe von $\frac{h}{k} \rightarrow 0$ die Beziehungen

$$(6) \quad S_{kh}^2 = S_k^2 (1 + o(1))$$

und

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\zeta_k - \zeta_h - M_{kh}}{S_{kh}} < x \right\} = \Phi(x)$$

zu gewinnen. Da die Konvergenz in (5) und (7) gleichmäßig bezüglich x ist, ergibt sich aus (1)

$$(8) \quad \begin{aligned} R_{hk}(x, y) &= \int_0^x \left[\Phi \left(\frac{y-u-M_{kh}}{S_{kh}} \right) - \Phi \left(\frac{y-M_k}{S_k} \right) \right] d\mathbf{P}(\zeta_h < u) + r_n(x, y) = \\ &= J_n(x, y) + r_n(x, y) \end{aligned}$$

und das Restglied r_n konvergiert gleichmäßig in x und y gegen 0.

Bei beliebigem $y \geq 0$ bestimmen wir die Zahl $\hat{x}(y)$ durch die Gleichung

$$\frac{y - \hat{x} - M_{kh}}{S_{kh}} = \frac{y - M_k}{S_k}, \quad \text{oder} \quad \hat{x} = \frac{y - M_k}{S_k} (S_k - S_{kh}) + M_h.$$

Nach (3) gilt $S_k - S_{kh} > 0$. Falls $\frac{y - M_k}{S_k} \rightarrow -\infty$ und dabei $\hat{x} < 0$, folgt

wegen $\frac{y - M_{kh}}{S_{kh}} < \frac{y - M_k}{S_k}$ aus (8) die Behauptung des Lemmas. Wenn

$\frac{y - M_k}{S_k} > -C^2$, ist für genügend große n $\hat{x} > 0$, denn mit (4) und (6) folgt $\frac{S_k - S_{kh}}{M_h} = \frac{S_h^2}{M_h(S_k + S_{kh})} < k^{-\frac{1}{2}}$. Für $\hat{x} > 0$ aber ist bei festem y $\sup_x J_n(x, y) = J_n(\hat{x}, y)$. Wenn $\frac{y - M_k}{S_k} \rightarrow \infty$, folgt nun aus (8) unmittelbar die Behauptung.

Es bleibt noch übrig, den Fall $\frac{y - M_k}{S_k} < C^2$, $\hat{x} > 0$ zu betrachten. Bei beliebigem $\eta > 0$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 (9) \quad J_n(\hat{x}, y) &= \int_0^{\hat{x} - \eta S_{kh}} \dots + \int_{\hat{x} - \eta S_{kh}}^{\hat{x}} \dots \leq \mathbf{P}\{\zeta_h < \hat{x} - \eta S_{kh}\} + \\
 &+ \left[\Phi\left(\frac{y - M_k}{S_k} + \eta\right) - \Phi\left(\frac{y - M_k}{S_k}\right) \right].
 \end{aligned}$$

Das zweite Glied kann mit η gleichmäßig beliebig klein gemacht werden; das erste aber ist kleiner als $\mathbf{P}\left\{\frac{\zeta_h - M_h}{S_h} < C \frac{S_k - S_{kh}}{S_h} - \eta \frac{S_{kh}}{S_h}\right\}$ und verschwindet nach dem Satz von Ljapunoff für $n \rightarrow \infty$. Die Gleichung (5) gilt nämlich auch mit h an Stelle von k , und ebenso können wir in (4) k durch h ersetzen. Daher folgt mit Hilfe von (6) für genügend große n

$$\frac{S_k - S_{kh}}{S_h} = \frac{S_k^2 - S_{kh}^2}{S_h(S_k + S_{kh})} = \frac{S_h}{2S_k} (1 + o(1)) < \sqrt{\frac{h}{k}} \rightarrow 0$$

und

$$\frac{S_{kh}}{S_h} = \frac{S_k}{S_h} (1 + o(1)) \rightarrow \infty.$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Jetzt müssen wir uns noch von den Voraussetzungen $h \rightarrow \infty$, $n - k \rightarrow \infty$ befreien. Wir beginnen mit der letzteren, betrachten also die Funktion $R_{hl}(x, y)$ für $h \rightarrow \infty$, $\frac{h}{l} \rightarrow 0$, $n - l \rightarrow \infty$. Dann existiert eine Zahlen-

folge $k(n)$, so daß $\frac{h}{k} \rightarrow 0$, $n - k \rightarrow \infty$, $k \leq l$. Da die Ranggrößen ζ_1, \dots, ζ_n eine Markoffsche Kette bilden, sind ζ_h und ζ_l unter der Bedingung $\zeta_k = u$ unabhängig, und es gilt

$$R_{hl}(x, y) = \int_0^y \mathbf{P}\{\zeta_l < x | \zeta_k = u\} [\mathbf{P}\{\zeta_h < x | \zeta_k = u\} - \mathbf{P}\{\zeta_h < x\}] d\mathbf{P}\{\zeta_k < u\}.$$

Natürlich brauchen wir nur Werte von y zu betrachten, für die der Integrand im Intervall $(0, y)$ positiv ist. Für solche Werte aber gilt

$$R_{hl}(x, y) \leq \int_0^y [\mathbf{P}\{\zeta_h < x \mid \zeta_k = u\} - \mathbf{P}\{\zeta_h < x\}] d\mathbf{P}\{\zeta_k < u\} = R_{hk}(x, y).$$

Auf Grund des Lemmas 1 ist damit der betrachtete Fall erledigt. Mit Hilfe dieses Resultats läßt sich aber in der gleichen Weise auch der Fall $h \leftrightarrow \infty$ behandeln. Damit ist Satz 1 bewiesen.

(Eingegangen: 28. August 1960; in umgearbeiteter Form: 1. April 1962.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] GEFFROY, J.: Publ. Inst. Stat. Paris 1958 und 1959.
- [2] GUMBEL, E. J.: Ann. Math. Stat. 1946.
- [3] HOMMA, T.: Reports of statistical application research 1, Tokio, 1951.
- [4] RÉNYI, A.: Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1953.
- [5] ROßBERG, H. J.: Math. Nachrichten 1960.
- [6] SMIRNOFF, N. W.: Bull. de l'Université d'État à Moscou, Ser. Inter., Section B, Math. et Méc. 1, 1937.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ЦЕНТРАЛЬНОГО И КРАЙНЕГО ЧЛЕНОВ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

Н. J. ROßBERG

Резюме

Используя метод А. РЭНИИ автор доказывает, что упорядоченные статистики ξ_h и ξ_k являются асимптотически независимыми, если $n \rightarrow \infty$, $\frac{h}{k} \rightarrow 0$.

ON THE INDEPENDENCE IN THE LIMIT OF EXTREME AND CENTRAL ORDER STATISTICS

by

ALAJOS KREM

I. Introduction

Let $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ be independent random variables with the same continuous distribution function $F(x) = \mathbf{P}(\xi_i < x)$. Let us arrange them according to their size and introduce the notation

$$\xi_k^* = R_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (1 \leq k \leq n)$$

where the function $R_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ of n variables represents the k -th of the x_1, x_2, \dots, x_n arranged in order of magnitude ($k = 1, 2, \dots, n$). The random variables defined in this way are not independent, as the relation

$$\xi_1^* \leq \xi_2^* \leq \dots \leq \xi_n^*$$

holds.

We shall investigate the independence in limit of the variables ξ_k^* as $n \rightarrow \infty$. It is known that for constant h and k ξ_h^* and ξ_k^* are asymptotically independent [1]. Furthermore it is known that the asymptotic independence does not hold for the central members; more precisely if $\frac{h}{n} \rightarrow \lambda_1, \frac{k}{n} \rightarrow \lambda_2, 0 < \lambda_1 < \lambda_2$, and if the limiting distribution of the vector (ξ_h^*, ξ_k^*) is normal, then ξ_h^* and ξ_k^* are not asymptotically independent [5].

A. RÉNYI has informed me that H. J. ROBBERT has proved the asymptotic independence of ξ_h^* and ξ_k^* under the condition $\frac{h^2}{k} \rightarrow 0$ and suggested to me to prove the same under more general conditions. According to his advices, I have proved in my B. Sc. paper in April 1961 among others the theorem of this paper, namely that ξ_h^* and ξ_k^* are asymptotically independent, if $\frac{h}{k} \rightarrow 0$. In the mean time H. J. ROBBERT has independently proved the same result see [4]. The proof given below uses the method of A. RÉNYI. The essence of the method is the following: Let us construct the variables

$$\eta_k = F(\xi_k) \quad \text{and} \quad \zeta_k = -\log \eta_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

it follows that

$$\eta_k^* = F(\xi_k^*) \quad \text{and} \quad \zeta_k^* = -\log \eta_{n-k+1}^* \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

The variables ζ_k have the exponential distribution function $1 - e^{-x}$ ($x \geq 0$), and

$$(1.1) \quad \zeta_k^* = \frac{\delta_1}{n} + \frac{\delta_2}{n-1} + \dots + \frac{\delta_k}{n-k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n)^1$$

where δ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) are independent random variables of exponential distribution function with parameter 1. Thus the variables $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \dots, \zeta_n^*$ form an additive Markov chain. Making use of (1.1), it can be proved that the variables $\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_n^*$ form a Markov chain too.

II. Lemmas

Lemma 1. Let be $\xi_n' = \xi_n^{(1)} + \xi_n^{(2)}$ where $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(|\xi_n^{(2)}| > \varepsilon) = 0$ for arbitrary $\varepsilon < 0$, furthermore let η_n' be independent from $\xi_n^{(1)}$. If $\xi_n^{(1)}$ has a distribution function $F_n(x)$ and η_n' has a distribution function $G_n(y)$, furthermore the limiting distributions $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(y) = G(y)$ exist, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\xi_n' < x, \eta_n' < y) = F(x) \cdot G(y)$$

that is ξ_n' and η_n' are asymptotically independent. ξ_n' has also a limiting distribution function $F(x)$.

The proof of this lemma is given e.g. in [3].

Lemma 2. Put

$$\bar{\zeta}_k = \frac{\zeta_k^* - \mathbf{M}(\zeta_k^*)}{\mathbf{D}(\zeta_k^*)}$$

where $\mathbf{M}(\xi)$ denotes the expected value of ξ and $\mathbf{D}^2(\xi)$ the variance of ξ . If $k \rightarrow \infty$, $n - k \rightarrow \infty$ then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bar{\zeta}_k < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Proof. Let us apply the central limit theorem under Ljapunov's conditions. Let $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}$ be completely independent random variables for any value of n ($n = 1, 2, \dots; k_n \geq 1$ integer). $\mathbf{M}(\xi_{nk}) = M_{nk}$, $\mathbf{D}(\xi_{nk}) = D_{nk}$ and $H_{nk} = \sqrt[3]{\mathbf{M}(|\xi_{nk} - M_{nk}|^3)}$ ($k = 1, \dots, k_n$ and put

$$S_n = \sqrt{\sum_{k=1}^{k_n} D_{nk}^2} \quad \text{and} \quad K_n = \sqrt[3]{\sum_{k=1}^{k_n} H_{nk}^3},$$

further

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}$$

¹ For the proof of (1.1) see A. RÉNYI [2].

and

$$\zeta'_n = \frac{\zeta_n - \mathbf{M}(\zeta_n)}{\mathbf{D}(\zeta_n)} = \frac{\zeta_n - \sum_{k=1}^{k_n} M_{nk}}{S_n}$$

and let us denote by $F_n(x)$ the distribution function of the variable ζ'_n . Assuming that the Ljapunov's condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_n}{S_n} = 0$$

holds, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Now $\frac{\delta_j}{n-j+1}$ takes the role of ξ_{nj} , and $\mathbf{M}(\delta_j) = \mathbf{D}^2(\delta_j) = 1$ ($1 \leq j \leq k(n)$), therefore

$$\mathbf{M}(\zeta_k^*) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1},$$

$$S_n^2 = \mathbf{D}^2(\zeta_k^*) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \dots + \frac{1}{(n-k+1)^2}$$

and

$$K_n^3 = \sum_{j=1}^k \mathbf{M} \left(\left| \frac{\delta_j - 1}{n-j+1} \right|^3 \right) \leq 3 \cdot \sum_{j=1}^k \frac{1}{(n-j+1)^3}.$$

It is easy to see that

$$(2.1) \quad S_n^2 > \frac{k}{(n+1)(n-k+1)},$$

on the other hand

$$(2.2) \quad K_n^3 < \frac{3}{n-k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{(n-j+1)^2} < \frac{3}{n-k} \cdot \frac{k}{n(n-k)} = \frac{3k}{n(n-k)^2}.$$

From (2.1) and (2.2) we obtain

$$\frac{K_n^6}{S_n^6} < \frac{9k^2(n+1)^3(n-k+1)^3}{n^2(n-k)^4 k^3} \sim 9 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) \rightarrow 0$$

as $n \rightarrow \infty$, because $k \rightarrow \infty$ and $n-k \rightarrow \infty$.

Since the condition of Ljapunov holds, by the central limit theorem the lemma follows.

Lemma 3. If k is constant, the limiting distributions of $\bar{\zeta}_k$ and $\bar{\zeta}_{n-k+1}$ exist, namely

$$(2.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(n \zeta_k^* < x) = \int_0^x \frac{t^{k-1} e^{-t}}{(k-1)!} dt$$

and

$$(2.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\zeta_{n-k+1}^* - \log n < x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-uk - e^{-u}}}{(k-1)!} du.$$

Proof. Applying the above method, we have (see e.g. A. RÉNYI [2])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(n \zeta_k^* < x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(n(1 - \eta_{n-k+1}^*) < n) = \int_0^x \frac{t^{k-1} e^{-t}}{(k-1)!} dt$$

and because of the symmetry of the uniform distribution

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(n \eta_k^* < x) = \int_0^x \frac{t^{k-1} e^{-t}}{(k-1)!} dt.$$

On the other hand

$$\mathbf{P}(n \eta_k^* < x) = \mathbf{P}\left(\zeta_{n-k+1}^* > \log \frac{n}{x}\right) = \mathbf{P}(\zeta_{n-k+1}^* - \log n > -\log x),$$

therefore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\zeta_{n-k+1}^* - \log n > -\log x) = \int_0^x \frac{t^{k-1} e^{-t}}{(k-1)!} dt$$

and from this we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\zeta_{n-k+1}^* - \log n < x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-uk - e^{-u}}}{(k-1)!} du.$$

III. Proof of the asymptotic independence

Theorem. If $\frac{h}{k} \rightarrow 0$ the following relation is valid

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bar{\zeta}_h < x, \bar{\zeta}_k < y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bar{\zeta}_h < x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bar{\zeta}_k < y).$$

Proof. Let us start from the identity

$$(3.1) \quad \bar{\zeta}_k = \frac{\mathbf{D}(\zeta_h^*)}{\mathbf{D}(\zeta_k^*)} \cdot \bar{\zeta}_h + \frac{\zeta_k^* - \zeta_h^* - \mathbf{M}(\zeta_k^* - \zeta_h^*)}{\mathbf{D}(\zeta_k^*)}.$$

We apply Lemma 1 for the sum (3.1). In this case:

$$(3.2) \quad \begin{cases} \xi_n^{(1)} = \frac{\zeta_k^* - \zeta_h^* - \mathbf{M}(\zeta_k^* - \zeta_h^*)}{\mathbf{D}(\zeta_k^*)} & \xi_n^{(2)} = \frac{\mathbf{D}(\zeta_h^*)}{\mathbf{D}(\zeta_k^*)} \cdot \bar{\zeta}_h \\ \eta'_n = \bar{\zeta}_h & \xi'_n = \bar{\zeta}_k. \end{cases}$$

We must show that the following three assertions are true:

1. $\bar{\zeta}_k$ and $\bar{\zeta}_h$ have limiting distributions,
2. the second member on the right side in (3.1) is independent from $\bar{\zeta}_h$,
3. the first member on the right side in (3.1) converges stochastically to 0.

The first assertion follows from Lemmas 2 and 3. The second assertion follows from formula (1.1). In order to prove the third assertion, it is sufficient to show that

$$\frac{\mathbf{D}(\zeta_h^*)}{\mathbf{D}(\zeta_k^*)} \rightarrow 0.$$

Let us now consider (1.1):

$$\zeta_h^* = \frac{\delta_1}{n} + \frac{\delta_2}{n-1} + \dots + \frac{\delta_n}{n-h+1} \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

where $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ are independent random variables of exponential distribution with expected value 1 and covariance 1; therefore we have

$$\mathbf{D}^2(\zeta_h^*) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \dots + \frac{1}{(n-h+1)^2} < \frac{h}{n(n-h)}$$

and

$$\mathbf{D}^2(\zeta_k^*) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2} + \dots + \frac{1}{(n-k+1)^2} > \frac{k}{(n+1)(n-k+1)}.$$

From these follows that

$$\frac{\mathbf{D}^2(\zeta_h^*)}{\mathbf{D}^2(\zeta_k^*)} < \frac{h(n+1)(n-k+1)}{n(n-h)k} < \frac{h(n+1)}{nk} \rightarrow 0,$$

therefore

$$\frac{\mathbf{D}(\zeta_h^*)}{\mathbf{D}(\zeta_k^*)} \rightarrow 0.$$

So the theorem follows from Lemma 1. The assertion of the theorem is valid also if the variables ξ_k have an arbitrary distribution. The proof follows easily from our theorem by applying a transformation on the variables ξ_k .

I wish to take this opportunity to thank Prof. A. RÉNYI for his valuable advices and for reading the manuscript.

(Received November 1, 1961)

REFERENCES

- [1] GEFFROY, J.: "Contribution à la théorie des valeurs extrêmes." *Publ. Inst. Paris* **8** (1959) 3.
- [2] RÉNYI, A.: "On the theory of order statistics". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **4** (1953) 191—231.
- [3] RÉNYI, A.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954. p. 589.
- [4] ROßBERG, H. J.: "Über das asymptotische Verhalten der Rand- und Zentralglieder einer Variationsreihe". *A MTA Mat. Kut. Int. Közleményei* **8** (1963) 461—466.
- [5] SMIRNOV, N. V.: "Sur la dépendence des membres d'une série de variations". *Bull. Univ. État. Moscou, Sér. In., Sect. A. Math. et Mécan.* **1** Fasc. 4 (1937) 319.

О ПРЕДЕЛЬНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ ЗНАЧЕНИЙ КРАЙНИХ И СРЕДНИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

A. KREM

Резюме

Пусть случайные величины ξ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) независимы и одинаково распределены и пусть $F(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$ их общая функция распределения. Упорядочим ξ_i согласно их величине, ξ_k^* ($k = 1, 2, \dots, n$) означает k -тую по порядку.

Автор в своей работе показывает, что если для индексов $h = h(n)$ и $k = k(n)$ выполняется условие $\frac{h}{k} \rightarrow 0$, тогда ξ_k^* и ξ_h^* будут асимптотически независимы. В теореме используется следующая формула, предложенная А. РЭНИ [2]:

$$(1.1) \quad \zeta_k^* = \frac{\delta_1}{n} + \frac{\delta_2}{n-1} + \dots + \frac{\delta_k}{n-k+1},$$

где $\zeta_k^* = -\log F(\xi_{n-k+1}^*)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ независимые, экспоненциально распределённые случайные величины с математическим ожиданием, равным 1.

THE ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF A SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

by

I. BIHARI

Introduction

A great number of works deal with the stability and asymptotic behaviour of the solutions of the nonlinear differential equation (system)

$$(1) \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{A}\bar{x} + \bar{f}(t, \bar{x}), \quad \bar{f}(t, 0) = 0$$

where $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $x_i = x_i(t)$, $\bar{f}(t, \bar{x}) = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ and $\bar{A} = (a_{ik})$, $a_{ik} = \text{const}$, $i, k = 1, 2, \dots, n$. Their statements bring into connection the behaviour of the solutions of (1) and those of the linear approximate equation

$$(2) \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{A}\bar{y}.$$

First POINCARÉ and LIAPUNOV obtained results of this type. They assumed the real parts of the characteristic roots of \bar{A} to be different, \bar{x} and $\bar{f}(t, \bar{x})$ analytic, the series of the last function beginning with at least second power. PERRON [1] assuming the continuity of $\bar{f}(t, \bar{x})$ only, and the property¹ $\|\bar{f}(t, \bar{x})\| = o(\|\bar{x}\|)$ ($\bar{x} \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$), weakened these hypotheses and restated the theorems of the above authors. As long as these results involved relations on a logarithmic scale, COTTON [2] found certain proper asymptotic connections, which hold between \bar{x} and \bar{y} . He assured the „smallness” of the perturbation $\bar{f}(t, \bar{x}) = \bar{B}\bar{x}$ by the condition $\int_0^\infty \|\bar{B}\| dt < \infty$.

WINTNER ([3]—[4]) treated the contrary-case, where the characteristic roots of \bar{A} have all equal (vanishing) real parts (equal roots permitted too), however he assumed that (2) possesses bounded (pure sinusoid) solutions only, i.e. the corresponding elementary divisors of \bar{A} are linear. LEVINSON [5] did not assume the roots to be imaginary, but the boundedness of *every* solution of (2) and showed — having been restricted to linear $\bar{f}(t, \bar{x}) = \bar{B}\bar{x}$ — that every solution $\bar{x}(t)$ of (1) determines a solution $\bar{y}(t)$ of (2) containing pure sinusoid terms only, with the property $\bar{x}(t) - \bar{y}(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$. A special case of this theorem is involved in [4], and in certain papers of CESARI [6] and BELLMAN [7] previously appeared. The last two works pertain to homogeneous linear equations of n -th order. LEVINSON's theorem has been generalized by

¹ Throughout this paper $\|\bar{x}\| = \sum_i |x_i|$, $\|\bar{A}\| = \sum_{i,k} |a_{ik}|$

H. WEYL [8], namely in two respects. First he did not assume $\bar{f}(t, \bar{x})$ to be linear, instead, he imposed on $\bar{f}(t, \bar{x})$ the requirement to have a "linear majorant" in the sense

$$\|\bar{f}(t, \bar{x})\| \leq g(t) \|\bar{x}\|, \quad \int_0^\infty g(t) dt < \infty.$$

On the other hand, he showed the converse of the theorem too, that there belongs to every solution $\bar{y}(t)$ of (2) a solution $\bar{x}(t)$ of (1) with $\bar{y} - \bar{x} \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$, provided that a *linear* condition of the type

$$(3) \quad \|\bar{f}(t, \bar{x}) - \bar{f}(t, \bar{x}^*)\| \leq g(t) \|\bar{x} - \bar{x}^*\|, \quad \int_0^\infty g(t) dt < \infty$$

is satisfied ($t \geq 0$, \bar{x}, \bar{x}^* arbitrary). This means, that there exists a one-to-one correspondence between the solutions of (1) and (2).

The author stipulated in [9] instead of the linear majorization (3) the nonlinear condition

$$(4) \quad \|\bar{f}(t, \bar{x})\| \leq g(t) \omega(\|\bar{x}\|), \quad \int_0^\infty g(t) dt < \infty$$

($t \geq 0$, \bar{x} arbitrary and $\omega(u)$ continuous, monotone increasing etc.) and concluded from the boundedness of the solutions of (2) to that of the solutions of (1) and to the stability of the solution $\bar{x} \equiv 0$.

The present paper gives the generalization of the LEVINSON—WEYL theorem under the condition (4) and

$$(5) \quad \|\bar{f}(t, \bar{x}) - \bar{f}(t, \bar{x}^*)\| \leq g(t) \omega(\|\bar{x} - \bar{x}^*\|), \quad \int_0^\infty g(t) dt < \infty$$

(t, \bar{x}, \bar{x}^* arbitrary)

In addition, it involves the extension of a result of WINTNER [10] concerning the convergence of successive approximations and of another [12] related to a result of the author [11].

1. Let us begin with the mentioned remark as to the successive approximations.

If $\bar{f}(t, \bar{x})$ is continuous in a certain domain of the space (t, \bar{x}) , then there is a solution of (1) passing through every point of the domain and existing on an interval which includes the point. However, without any further conditions this solution cannot be obtained by successive approximation, i.e. the correspondent (usual) successive approximations do not converge. For an equation of the form

$$(6) \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{g}(t, \bar{x})$$

a Lipschitz condition assures the convergence and the uniqueness. This suggests, that perhaps the mere uniqueness of the solution is sufficient for the convergence, but some known examples refute this. Nevertheless, if the sufficient assumptions of the well-known uniqueness theorems are stipulated for $\bar{g}(t, \bar{x})$ then the successive approximations relative to (6) are to be convergent at least in a sufficiently short interval (s. [10], [13] p. 53, [14], [15]). The same will be shown here concerning (1), provided that $\bar{f}(t, \bar{x})$ satisfies an analogous condition which is not the most general one (it is more resp. less

general than that of [10] resp. [13]), on the other hand the convergence will be established on the whole $t \geq 0$ axis.

There will be used the familiar formula

$$(7) \quad \bar{x}(t) = \bar{y}(t) + \int_0^t \bar{Y}(t-\tau) \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau, \quad \bar{y}(t) = \bar{Y}(t) \bar{a}$$

connecting the solutions $\bar{x}(t)$ and $\bar{y}(t)$ of (1) and (2) resp., where $\bar{Y}(t)$ denotes the solution of

$$(8) \quad \frac{d\bar{Y}}{dt} = \bar{A}\bar{Y}, \quad \bar{Y}(0) = \bar{I} \quad (\text{identity})$$

(\bar{a} is an arbitrary vector).

Theorem 1. *Let the following conditions be satisfied:*

1. *every solution of (2) is bounded for $t \geq 0$, i.e. the real parts of the characteristic roots of \bar{A} are non-positive and the elementary divisors belonging to the roots with zero real parts are linear (e.g. these roots are simple),*

2. *$\bar{f}(t, \bar{x})$ is defined for $t \geq 0$ and arbitrary \bar{x} and satisfies (5), where $\omega(u)$ is positive, continuous, non-decreasing for $u \geq 0$, $\int_1^\infty \frac{du}{\omega(u)} = \infty$, $\int_0^1 \frac{du}{\omega(u)} = \infty$ (of course $\omega(0) = 0$), $\int_0^\infty g(t) dt < \infty$ and $g(t)$ is bounded.*

Then the successive approximations

$$(9) \quad \begin{aligned} \bar{x}_0(t) &= \bar{y}(t), & \bar{y}(t) &= \bar{Y}(t) \bar{a} \\ \bar{x}_{n+1}(t) &= \bar{y}(t) + \int_0^t \bar{Y}(t-\tau) \bar{f}(\tau, \bar{x}_n(\tau)) d\tau, & (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

converge uniformly on $t \geq 0$ to the unique solution of (1) with $\bar{x}(0) = \bar{a}$. (The starting point $\bar{x}_0(t)$ is here not as commonly a constant.)

Proof. First we show that the sequence $\{\bar{x}_n(t)\}$ is equicontinuous for $t \geq 0$. Namely, if $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ are arbitrary values, then by (9)

$$\bar{x}_{n+1}(t_1) - \bar{x}_{n+1}(t_2) = \bar{y}(t_1) - \bar{y}(t_2) + \bar{Y}(t_1) \int_0^{t_1} \bar{Y}(-\tau) \bar{f}_n d\tau - \bar{Y}(t_2) \int_0^{t_2} \bar{Y}(-\tau) \bar{f}_n d\tau,$$

where $\bar{f}_n = \bar{f}(\tau, \bar{x}_n(\tau))$. Making use of the fact that the sequence $\{\bar{x}_n(t)\}$ is uniformly bounded (see below where this bound is given explicitly) say $\|\bar{x}_n(t)\| \leq M$, $t \geq 0$ we have (e.g. for $t_2 \leq t_1$)

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_{n+1}(t_1) - \bar{x}_{n+1}(t_2)\| &\leq \|\bar{a}\| \|\bar{Y}(t_1) - \bar{Y}(t_2)\| + \\ &+ \|\bar{Y}(t_1) - \bar{Y}(t_2)\| \omega(M) \int_0^{t_1} \|\bar{Y}(-\tau)\| g(\tau) d\tau + \|\bar{Y}(t_2)\| \omega(M) \int_{t_2}^{t_1} \|\bar{Y}(-\tau)\| g(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Here the right member is independent of n and may be arbitrary small by choosing $t_1 - t_2$ small enough, which means exactly the mentioned equicontinuity.

In the second place the same sequence is uniformly bounded for $t \geq 0$. According to cond. 1 $\|\bar{Y}(t)\| < c$ for some c .

We assert that

$$(10) \quad r_n(t) = \|\bar{x}_n(t)\| \leq \Omega^{-1}(\Omega(\alpha) + c \int_0^t g(\tau) d\tau) = K(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

where $\alpha = c \|\bar{a}\|$, $\Omega(u) = \int_{u_0}^u \frac{dz}{\omega(z)}$ ($u_0 > 0$). As $\int_1^\infty g(t) < \infty$ and $\int_1^\infty \frac{du}{\omega(u)} = \infty$,

(10) assures the boundedness in question. Actually, we state somewhat more. From (9) we have

$$r_{n+1} \leq \alpha + c \int_0^t \omega(r_n) g(\tau) d\tau \quad (= V_n(t))$$

and a stronger assertion than (10) will be proved, namely that

$$(11) \quad V_n(t) \leq K(t), \quad t \geq 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

In fact, suppose $V_{n-1}(t) \leq K(t)$, $t \geq 0$ and prove $V_n(t) \leq K(t)$, $t \geq 0$. But $V_n(0) = K(0)$, and if the last inequality failed to hold for all $t \geq 0$, there would exist a first place $t_0 \geq 0$, where

$$(12) \quad V_n(t_0) = K(t_0) \quad \text{and} \quad V_n(t) > K(t), \quad t_0 < t < t_1,$$

where $t_1 - t_0 > 0$ is small enough. Then

$$V_{n-1}(t) < V_n(t) \quad \text{or} \quad \omega(V_{n-1}) \leq \omega(V_n), \quad t_0 < t < t_1,$$

whence being $r_n \leq V_{n-1}$ resp. $\omega(r_n) \leq \omega(V_{n-1})$ and $V_n \geq \alpha > 0$, $V_{n-1} \geq \alpha > 0$ we have

$$\frac{cg(t) \omega(r_n)}{\omega(V_n)} \leq \frac{cg(t) \omega(r_n)}{\omega(V_{n-1})} \leq cg(t), \quad t_0 < t < t_1$$

Hence by integration

$$\Omega(V_n(t)) \leq \Omega(V_n(t_0)) + c \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau.$$

However, by (12)

$$\Omega(V_n(t_0)) = \Omega(K(t_0)) = \Omega(\alpha) + c \int_0^{t_0} g(\tau) d\tau,$$

therefore

$$\Omega(V_n(t)) \leq \Omega(\alpha) + c \int_0^t g(\tau) d\tau = \Omega(K(t)), \quad t_0 < t < t_1$$

or $V_n(t) \leq K(t)$ in contradiction with (12). This proves (11). But $r_n(t) \leq V_{n-1}(t)$, consequently $r_n(t) \leq K(t)$, $t \geq 0$. It remains to ascertain whether $V_0(t) \leq K(t)$ $t \geq 0$ holds. Really we have

$$V_0(t) = \alpha + c \int_0^t \omega(\|\bar{y}\|) g(\tau) d\tau$$

and the relation

$$\Omega(V_0(t)) = \Omega\left(\alpha + c \int_0^t \omega(\|y\|) g(\tau) d\tau\right) \leq \Omega(\alpha) + c \int_0^t g(\tau) d\tau = \Omega(K(t))$$

holds for $t \geq 0$, since it holds for $t = 0$ and the derivative of the right member is not less for $t \geq 0$ than that of the left one. In fact

$$\frac{d}{dt} \left[\Omega \left(\alpha + c \int_0^t \omega(\|y\|) g(\tau) d\tau \right) \right] = \frac{c \omega(\|y\|) g(t)}{\omega(\alpha + c \int_0^t \omega(\|y\|) g(\tau) d\tau)} \leq \frac{c \omega(a) g(t)}{\omega(\alpha + c \int_0^t \omega(\|y\|) g(\tau) d\tau)}$$

and

$$\frac{d}{dt} \Omega(K(t)) = c g(t)$$

and an immediate comparison verifies our assertion.

Thus the sequence (9) turned out to be uniformly bounded and equicontinuous. Therefore — corresponding to Arzela's theorem — it involves a uniformly convergent subsequence on every interval $0 \leq t \leq T$, the continuous limit function of which let be denoted by $x_T(t)$. An easy argumentation shows that T may be taken $T = \infty$ too. Viz., let be $T = n$ ($n = 1, 2, \dots$) and regard the corresponding subsequence for $[0, n_0]$ (n_0 is a fixed integer), then one of its convergent subsequences corresponding to $[0, n_0 + 1]$, etc. Now making use of the well-known diagonal method, we receive a subsequence uniformly converging for $t \geq 0$. Denote this by $\{\bar{x}_{k_n}(t)\}$ ($n = 1, 2, \dots$) and its limit function by $\bar{x}(t)$. We assert $\bar{x}(t)$ to be the (unique) required solution, and the total successive approximation is converging to it. Namely

$$\|f(\tau, \bar{x}(\tau)) - \bar{f}(\tau, \bar{x}_{k_n}(\tau))\| \leq g(\tau) \omega(\|\bar{x} - \bar{x}_{k_n}\|)$$

Denote $\max_{0 \leq \tau < \infty} \|\bar{x} - \bar{x}_{k_n}\|$ by δ_{k_n} , then

$$\left\| \int_0^t \bar{Y}(t - \tau) [\bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) - \bar{f}(\tau, \bar{x}_{k_n}(\tau))] d\tau \right\| \leq c \omega(\delta_{k_n}) \int_0^t g(\tau) d\tau$$

which tends to 0 as $n \rightarrow \infty$. Therefore the sequence $\{\bar{x}_{k_{n+1}}\}$ ($n = 1, 2, \dots$) consisting of the terms subsequent to the terms of the sequence $\{\bar{x}_{k_n}\}$, is also uniformly convergent and its limit $\bar{x}^*(t)$ satisfies (according to (9))

$$\bar{x}^*(t) = \bar{y}(t) + \int_0^t \bar{Y}(t - \tau) \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau$$

Therefore $\bar{x}(t)$ is a solution of (1) for $t \geq 0$ if and only if

$$\bar{x}^*(t) = \bar{x}(t), \quad t \geq 0$$

To this end it suffices to prove that

$$u(t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|\bar{x}_{n+1}(t) - \bar{x}_n(t)\| = 0, \quad t \geq 0.$$

This may be done by a slight modification of Wintner's proof in [10] which can be omitted here (s. there).² In order to demonstrate the convergence of the total sequence (9), it is enough to ascertain that (1) has a unique solution

² Otherwise this proof will be carried out later (in 4) in a more complicated case.

with $\bar{x}(0) = \bar{a}$, as in this case $\{\bar{x}_n(t)\}$ cannot have another cluster element (viz. this would be also a solution).

Suppose (1) has another solution $\bar{x}_1(t)$ for $t \geq 0$ with $\bar{x}_1(0) = \bar{a}$, then by (7) we have for the function $\|\bar{x} - \bar{x}_1\| = r(t)$

$$(13) \quad r(t) \leq c \int_0^t g(\tau) \omega(r(\tau)) d\tau$$

where $r(0) = 0$. Let $t_1 \geq 0$ be the first place, where $r(t_1) = 0$, but $r(t) > 0$ for $t_1 < t < t_2$ with $t_2 - t_1$ small enough. Then by (13)

$$(14) \quad r(t) \leq c \int_{t_1}^t g(\tau) \omega(r(\tau)) d\tau.$$

Let the right member be denoted by $V(t)$, then $V(t) > 0$ ($t > t_1$) and $r(t) \leq V(t)$, whence

$$\omega(r(t)) \leq \omega(V(t)) \quad \text{resp.} \quad \frac{cg(t) \omega(r(t))}{\omega(V)} \leq cg(t).$$

Hence by integration

$$(15) \quad \int_0^{V(t)} \frac{du}{\omega(u)} \leq c \int_{t_1}^t g(\tau) d\tau, \quad t > t_1.$$

According to cond. 2 the integral on the left is divergent, whereas that on the right is convergent, which involves a contradiction.

2. The "asymptotic initial value problem" may be treated in the same way. Here the relation $\bar{x}(\infty) = \bar{a} = \bar{y}(\infty)$ or $\bar{x}(t) - \bar{y}(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$ will be prescribed (the latter when $\bar{y}(\infty)$ does not exist). Then in (7) and (9) the sign \int_0^t must be replaced by $-\int_t^\infty$ and instead of the estimate (10) we get

$$\|x_n(t)\| \leq \Omega^{-1}(\Omega(\alpha) + c' \int_t^\infty g(\tau) d\tau)$$

where $c' = \sup_{t \leq 0} \|\bar{Y}(t)\|$, that is, now the boundedness of the solutions of (2) for $t \leq 0$ must be supposed. The corresponding successive approximations converge then too.

3. Now we turn to the generalization of the result of LEVINSON and WEYL.

Theorem 2. Let the conditions 1 and 2 of Theorem 1 be satisfied and in addition the following one:

Cond. 3:

$$(F_\omega) \quad \begin{cases} \Omega(m_{\varrho_2}) - \Omega(m_{\varrho_1}) = \int_{m_{\varrho_1}}^{m_{\varrho_2}} \frac{du}{\omega(u)} > \varrho_2 - \varrho_1, & c_2 > c_1 \\ \Omega(m_{\varrho_1}) - \Omega(m_{\varrho_2}) = \int_{m_{\varrho_2}}^{m_{\varrho_1}} \frac{du}{\omega(u)} > \varrho_1 - \varrho_2, & c_1 > c_2 \end{cases}$$

where $\varrho_i = c_i q (i = 1, 2)$, $q = \int_0^\infty g(t) dt$, $0 < m \leq \omega(2M)$ (M and $\bar{Y}_1(t), \bar{Y}_2(t)$ will be defined later) and $c_1 = \sup_{t \geq 0} \|\bar{Y}_1(t)\|$, $c_2 = \sup_{t \leq 0} \|\bar{Y}_2(t)\|$. Summarising

$$\int_{m\lambda_2}^{m\lambda_1} \frac{du}{\omega(u)} > \lambda_2 - \lambda_1, \quad \lambda_1 = \min(\varrho_1, \varrho_2), \quad \lambda_2 = \max(\varrho_1, \varrho_2).$$

(This is involved by cond. 2 provided $\lambda_1^* = 0$).

Then every solution $\bar{x}(t)$ of (1) determines a solution $\bar{y}(t)$ of (2) with $\bar{x}(t) - \bar{y}(t) \rightarrow 0$ as $t \rightarrow +\infty$ and the converse statement holds too.

In the case of a linear majorant — say case (W) — $\omega(u) \equiv u$ and condition 3 reads

$$(F_1) \quad \frac{e^{\lambda_1}}{\lambda_1} > \frac{e^{\lambda_2}}{\lambda_2}.$$

Since the function $f(\varrho) = \frac{e^\varrho}{\varrho}$ has a minimum at $\varrho = 1$, condition (F_1) is satisfied if $\lambda_2 < 1$ — the only case observed by WEYL —, but obviously in other cases too (e.g. for $\lambda_2 = 1$ or $\lambda_1 = 0, 1$, $\lambda_2 = 1, 1$).

The first part of the *proof* differs hardly from that of WEYL.

In a suitable coordinate system (carrying out a non-degenerate transformation, if necessary) $\bar{Y}(t)$ consists of blocks (elementary divisors) of the form

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda t} t_0 & 0 & \dots & 0 \\ e^{\lambda t} t_1 & e^{\lambda t} t_0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda t} t_{m-1} & e^{\lambda t} t_{m-2} & \dots & e^{\lambda t} t_0 \end{bmatrix}, \quad t_i = \frac{t^i}{i!}$$

where λ means a characteristic root of \bar{A} . If $\operatorname{Re} \lambda = 0$, $m = 1$ (s. cond. 1). Unifying every elementary divisor corresponding to $\operatorname{Re} \lambda < 0$ in a block \bar{Z}_1 and those corresponding to $\operatorname{Re} \lambda = 0$ in another block \bar{Z}_2 we obtain a decomposition of $\bar{Y}(t)$ as follows

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_1 & 0 \\ 0 & \bar{Z}_2 \end{bmatrix}$$

in which $\bar{Z}_1(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) and $\bar{Z}_2(t)$ are bounded for every t (also for $t < 0$). Let the corresponding decomposition of the unit-matrix be

$$\bar{I} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

where \bar{I}_1 and \bar{I}_2 are $n \times n$ matrices. Then $\bar{Y}(t)$ dissociates in the form

$$\bar{Y} = \bar{Y}\bar{I}_1 + \bar{Y}\bar{I}_2 = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2$$

Obviously, $\bar{Y}_1(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$ and $\bar{Y}_2(t)$ is bounded (for $t < 0$ too). Say $\|\bar{Y}_2(t)\| \leq c_2$ ($t < 0$).

Regard the solution of (1) and (2) corresponding to $\bar{x}(0) = \bar{y}(0) = \bar{a}$ ($= \text{const}$). Then $\bar{y}(t) = \bar{Y}(t)\bar{a}$. These solutions are connected by the relation (7). Conversely, if (7) holds and $x(t)$ satisfies (1), then $\bar{y}(t)$ fulfils (2) and $\bar{y}(0) = \bar{x}(0)$.

Corresponding to $\bar{Y}(t)$, $\bar{x}(t)$ will be decomposed as follows:

$$\bar{I}_1 \bar{x} + \bar{I}_2 \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2,$$

and similarly $\bar{y}(t)$ dissociates in the vectors $\bar{y}_1(t)$ and $\bar{y}_2(t)$, where $\bar{y}_1(t)$ is a damped oscillation and $\bar{y}_2(t)$ consists of pure sinusoid terms. Carrying out this decomposition in (7) too,

$$(16) \quad \bar{x}(t) = \bar{y}(t) + \int_0^t \bar{Y}_1(t-\tau) \bar{f} d\tau + \int_0^t \bar{Y}_2(t-\tau) \bar{f} d\tau, \quad \bar{f} = \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)).$$

Transform the second integral in the following way

$$\int_0^t \bar{Y}_2(t-\tau) \bar{f} d\tau = \bar{Y}(t) \int_0^\infty \bar{Y}_2(-\tau) \bar{f} d\tau - \int_t^\infty \bar{Y}_2(t-\tau) \bar{f} d\tau$$

$$(\text{viz. } \bar{Y}_2(t-\tau) = \bar{Y}(t-\tau) \bar{I}_2 = \bar{Y}(t) \bar{Y}(-\tau) \bar{I}_2 = \bar{Y}(t) \bar{Y}_2(-\tau)).$$

Here the term $\int_0^\infty \bar{Y}_2(-\tau) \bar{f} d\tau$ is a constant vector \bar{b} , consequently (16) takes on the form

$$(17) \quad \bar{x}(t) = \bar{z}(t) + \int_0^t \bar{Y}_1(t-\tau) \bar{f} d\tau - \int_t^\infty \bar{Y}_2(t-\tau) \bar{f} d\tau, \quad \bar{z}(t) = \bar{Y}(t)(\bar{a} + \bar{b})$$

where $\bar{z}(t)$ is a solution of (2), belonging to the initial condition $\bar{z}(0) = \bar{a} + \bar{b}$ (recall $\bar{a} = \bar{y}(0)$), and $\bar{x}(t)$ is a solution of (1) in the future too independently of the preliminaries, provided $\bar{z}(t)$ satisfies (2) and the second integral in (17) converges. But this converges, $\bar{x}(t)$ being bounded — say $\|\bar{x}(t)\| \leq M$, $t \geq 0$ — and

$$\|\bar{Y}_2(t-\tau) \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau))\| \leq c_2 g(\tau) \omega(\|\bar{x}\|) \leq c_2 g(\tau) \omega(M), \quad \int_0^\infty g(t) dt < \infty$$

Conversely, if $\bar{x}(t)$ is a solution of (1), then

$$(17') \quad \bar{z}(t) = \bar{x}(t) - \int_0^t \bar{Y}_1(t-\tau) \bar{f} d\tau + \int_t^\infty \bar{Y}_2(t-\tau) \bar{f} d\tau, \quad \bar{f} = \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau))$$

is one of (2). Thus by (17') to all solutions of (1) there corresponds a unique solution of (2).

(17') gives after a multiplication by \bar{I}_1 and \bar{I}_2 , resp.

$$(18_1) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{z}_1(t) &= \bar{x}_1(t) - \int_0^t \bar{Y}_1(t-\tau) \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \end{aligned} \right.$$

$$(18_2) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{z}_2(t) &= \bar{x}_2(t) + \int_t^\infty \bar{Y}_2(t-\tau) \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau \end{aligned} \right.$$

$$(\text{viz. } \bar{I}_1 \bar{Y}_1 = \bar{Y}_1, \bar{I}_1 \bar{Y}_2 = 0, \bar{I}_2 \bar{Y}_1 = 0, \bar{I}_2 \bar{Y}_2 = \bar{Y}_2).$$

Now the relation $\bar{x}_2(t) - \bar{z}_2(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$ follows from the convergence of the integral in (18₂). In order to prove that $\bar{x}_1(t) - \bar{z}_1(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$, it is necessary to show that the integral in (18₁) tends to 0 as $t \rightarrow +\infty$, since $\bar{z}_1(t)$ behaves similarly.

Really, according to the definition of $\bar{Y}_1(t)$ the relation $\|\bar{Y}_1(t)\| \leq c_1 e^{-kt} (k > 0)$ holds, consequently

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\bar{Y}_1(t-\tau) \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau))\| d\tau &= \int_0^{\frac{t}{2}} + \int_{\frac{t}{2}}^t \leq c_1 e^{-k\frac{t}{2}} \omega(M) \int_0^{\frac{t}{2}} g(\tau) d\tau + \\ &+ c_1 \omega(M) \int_{\frac{t}{2}}^t g(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Here both terms tend to zero as $t \rightarrow +\infty$. The first because of the exponential factor, the second in virtue of the convergence of $\int_0^\infty g(t) dt$. According to (18), $\bar{z}_1(0) = \bar{x}_1(0), \bar{z}_2(t) - x_2(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$.

4. In order to prove the converse assertion, we apply successive approximation to solve the integral-equation (17') for a given $\bar{z}(t)$. Namely, let it be defined by

$$(19) \quad \begin{cases} \bar{x}_0(t) = \bar{z}(t) \\ \bar{x}_{n+1}(t) = \bar{z}(t) + \int_0^t \bar{Y}_1(t-\tau) \bar{f}(\tau, \bar{x}_n(\tau)) d\tau - \int_t^\infty \bar{Y}_2(t-\tau) \bar{f}(\tau, \bar{x}_n(\tau)) d\tau \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Hence $\|\bar{x}_0(t)\| \leq c_1 \|\bar{c}\| = \gamma$ and let us suppose that e.g. $c_2 > c_1$ and

$$(20) \quad r_n(t) = \|\bar{x}_n(t)\| \leq K(t) = \Omega^{-1}(\Omega(\gamma + a) + (c_2 - c_1) \int_t^\infty g(\tau) d\tau), \quad t \geq 0$$

then we prove $r_{n+1}(t) \leq K(t), t \geq 0$. Here a is defined — if possible — by

$$(20') \quad \varrho_2 - \varrho_1 = \Omega\left(\gamma + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} a\right) - \Omega(\gamma + a) = \int_{\gamma+a}^{\gamma+\frac{\varrho_2}{\varrho_1}a} \frac{du}{\omega(u)}.$$

In the case (W) $a = \gamma \varrho_1 \frac{e^{\varrho_1} - e^{\varrho_2}}{\varrho_1 e^{\varrho_2} - \varrho_2 e^{\varrho_1}}$.

We have from (20)

$$\Omega(K(t)) = \Omega(\gamma + a) + (c_2 - c_1) \int_t^\infty g(\tau) d\tau$$

³ This is a restriction concerning $\omega(u), \gamma, \varrho_1, \varrho_2$. It is unchanged for $c_1 > c_2$.

whence

$$(21) \quad K'(t) = -(c_2 - c_1) g(t) \omega(K(t)).$$

Hence by (19), (20) and (21)

$$\begin{aligned} r_{n+1}(t) &\leq \gamma + c_1 \int_0^t g(\tau) \omega(r_n(\tau)) d\tau + c_2 \int_t^\infty g(\tau) \omega(r_n(\tau)) d\tau \leq \\ &\leq \gamma + c_1 \int_0^t g(\tau) \omega(K(\tau)) d\tau + c_2 \int_t^\infty g(\tau) \omega(K(\tau)) d\tau = \\ &= \gamma - \frac{c_1}{c_2 - c_1} \int_0^t K'(\tau) d\tau - \frac{c_2}{c_2 - c_1} \int_t^\infty K'(\tau) d\tau = \gamma + K(t) + \frac{c_1 K(0) - c_2 K(\infty)}{c_2 - c_1}. \end{aligned}$$

Here it holds $K(\infty) = \gamma + a$ and by (20')

$$K(0) = \Omega^{-1}(\Omega(\gamma + a) + \varrho_2 - \varrho_1) = \gamma + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} a$$

Therefore

$$r_{r+n}(t) \leq K(t), \quad t \geq 0.$$

But

$$r_0(t) = \|\bar{z}(t)\| \leq \gamma < K(t).$$

thus (20) is proven by induction, i.e.

$$r_n(t) \leq K(t) \leq K(0) = \gamma + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} a = M, \quad t \geq 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

e.g. in the case (W)

$$(22) \quad M = \gamma e^{\varrho_2} \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 e^{\varrho_2} - \varrho_2 e^{\varrho_1}}.$$

Therefore the sequence $\{\bar{x}_n(t)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) is uniformly bounded. It is also equicontinuous, what can be easily shown along the lines of 1.

Corresponding to Arzela's theorem these two properties imply the existence of a for $t \geq 0$ uniformly convergent subsequence $\{\bar{x}_{n_k}(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots$) of the previous one (as in 1.; see the proof there), the continuous limit function $\bar{x}(t)$ of which and that of the also uniformly convergent subsequence $\{\bar{x}_{n_k+1}(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots$) — denoting its limit by $\bar{x}^*(t)$ — satisfy together

$$\bar{x}^*(t) = \bar{z}(t) + \int_0^t \bar{Y}_1(t - \tau) \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau - \int_t^\infty \bar{Y}_2(t - \tau) \bar{f}(\tau, \bar{x}(\tau)) d\tau$$

⁴ If $c_1 > c_2$, $M = K(\infty) = \gamma + a$ and in case (W) this reads as $M = \gamma e^{\varrho_1} \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 e^{\varrho_2} - \varrho_2 e^{\varrho_1}}$.

The solution $\bar{x}(t)$ of (17) is stable relative to (17) at least in the case (W). This is obvious by (22).

Therefore $\bar{x}(t)$ is a solution of (17) if and only if

$$\bar{x}^*(t) = \bar{x}(t), \quad t \geq 0$$

In order to see this it is enough to prove that

$$r(t) = \limsup_{n \rightarrow \infty} r_n(t) = 0, \quad r_n(t) = \|\bar{x}_n(t) - \bar{x}_{n-1}(t)\|$$

furthermore that (17) has a unique solution (see 1.). Then the total successive approximation (19) converges too.

Now (19) gives

$$r_{n+1}(t) \leq c_1 \int_0^t g(\tau) \omega(r_n(\tau)) d\tau + c_2 \int_t^\infty g(\tau) \omega(r_n(\tau)) d\tau, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

whence by a lemma of Fatou (cf. [10] p. 17)

$$r(t) \leq c_1 \int_0^t g(\tau) \limsup_{n \rightarrow \infty} \omega(r_n(\tau)) d\tau + c_2 \int_t^\infty g(\tau) \limsup_{n \rightarrow \infty} \omega(r_n(\tau)) d\tau$$

but $\limsup_{n \rightarrow \infty} \omega(r_n(t)) \leq \omega(r(t))$. Viz., for $n > N$ with a certain integer $N > 0$, $r_n(t) < r(t) + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) uniformly in t (i.e. for $t \geq 0$; see [13] p. 55),⁵ consequently $\omega(r_n(t)) \leq \omega(r(t) + \varepsilon)$ or $\limsup_{n \rightarrow \infty} \omega(r_n(t)) \leq \omega(r(t) + \varepsilon)$ what involves our assertion, since $\varepsilon > 0$ is arbitrary. Hence $r(t)$ satisfies

$$(23) \quad r(t) \leq c_1 \int_0^t g(\tau) \omega(r(\tau)) d\tau + c_2 \int_t^\infty g(\tau) \omega(r(\tau)) d\tau \quad (=V(t)), t \geq 0.$$

If (17) had two solutions — say $\bar{x}(t)$ and $\bar{x}^0(t)$ —, then $\varrho(t) = \|\bar{x}(t) - \bar{x}^0(t)\|$ also satisfies (23) with $\varrho(t)$ instead of $r(t)$. Therefore the proof of the identical vanishing of $r(t)$ and $\varrho(t)$ takes place simultaneously.

If e. g. $r(t) \neq 0$, $t \geq 0$, then in (23) $V(t) > 0$, $t \geq 0$, i.e. $\omega(r(t)) \leq \omega(V(t))$ or

$$\frac{(c_2 - c_1) \omega(r(t)) g(t)}{\omega(V(t))} \leq (c_2 - c_1) g(t) \quad (c_2 > c_1)$$

and by the substitution $u = V(t)$, $du = -(c_2 - c_1) g(t) \omega(r(t)) dt$

$$\int_{V(\infty)}^{V(0)} \frac{du}{\omega(u)} \leq (c_2 - c_1) \int_0^\infty g(t) dt = (c_2 - c_1) q = \varrho_2 - \varrho_1.$$

Here we have

$$\left\{ \begin{array}{l} V(0) = c_2 \int_0^\infty g(\tau) \omega(r(\tau)) d\tau = c_2 m q \\ V(\infty) = c_1 \int_0^\infty g(\tau) \omega(r(\tau)) d\tau = c_1 m q \end{array} \right\} \quad 0 < m \leq \omega(2M)$$

⁵ First this holds for a finite interval $(0, T)$, but also for $t > T$ provided T is sufficiently large, since $r(t) \rightarrow 0$, $r_n(t) \rightarrow 0$ uniformly in n as $t \rightarrow \infty$.

thus $\int_{e_1 m}^{e_2 m} \frac{du}{\omega(u)} \leq e_2 - e_1$ in contradiction to the condition 3. The case $c_1 > c_2$ may be treated in the same way.

For $c_1 \neq c_2$ $\omega(u)$ can be chosen as follows (suppose e.g. $c_2 > c_1$)

$$\omega(u) = u \log \frac{1}{u} = -u \log u \quad \left(0 < u \leq \frac{1}{e}\right)$$

and in a suitable manner for $u > \frac{1}{e}$.⁶ The condition 3 reads now

$$- \int_{e_1 m}^{e_2 m} \frac{du}{u \log u} = \log \frac{\log(e_1 m)}{\log(e_2 m)} > e_2 - e_1$$

provided that $e_2 m \leq \frac{1}{e}$ or

$$(24) \quad e^{e_1} \log(e_1 m) < e^{e_2} \log(e_2 m), \quad \text{or} \quad (e_1 m)^{e^{e_1}} < (e_2 m)^{e^{e_2}}.$$

The function $f(\varrho) = e^\varrho \log(\varrho m)$ has a maximum at $\varrho = \varrho_0$ provided $m \leq \frac{1}{e}$

resp. $2M \leq \frac{1}{e}$ where ϱ_0 is the solution of the equation $\varrho \log(\varrho m) + 1 = 0$, i.e.

(24) is fulfilled for $e_2 \leq \varrho_0$, but in other cases as well. Condition $e_2 m \leq \frac{1}{e}$

is surely satisfied, when $e_2 \omega(2M) \leq \frac{1}{e}$ and $2M \leq \frac{1}{e}$, i.e.

$$-e_2(2M) \log(2M) \leq \frac{1}{e} \quad \text{or} \quad (2M)^{2M} \geq e^{-\frac{1}{e_2 e}}$$

This holds e.g. for $e_2 \leq 1$, since the minimum of $h(x) = x^x$ is $e^{-\frac{1}{e}}$. Equation (20') requires

$$- \int_{\gamma+a}^{\gamma+\frac{e_2}{e_1}a} \frac{du}{u \log u} = e_2 - e_1, \quad \text{resp.} \quad e^{e_1} \log\left(\gamma + \frac{e_1}{e_1}a\right) = e^{e_2} \log\left(\gamma + \frac{e_2}{e_1}a\right)$$

$$\left(\text{provided } M = \gamma + \frac{e_2}{e_1}a \leq \frac{1}{2e}\right).$$

For certain γ, e_1, e_2, a this may be satisfied. Then all requirements are satisfied if e_2 is small enough. However the assumption $M \leq \frac{1}{2e}$ is not necessary. Per-

⁶ E.g. $\omega(u) = \frac{2}{e} + u \log u$ suits for $u > \frac{1}{e}$.

haps in the opposite case the function $f(\varrho) = e^\varrho \log(\varrho m)$ has no maximum — viz. if $m > \frac{1}{e}$ — and then ϱ_2 can be arbitrary large.

The functions $\omega(u) = u \log \frac{1}{u} \log \log \frac{1}{u}, \dots$ and $u \left(\log \frac{1}{u} \right)^k, \dots$ ($0 < k < 1$) can also be applied here.

The case $c_1 = c_2 = c$ may be settled in a straightforward way or by the limit process $\varrho_2 \rightarrow \varrho_1 = \varrho$ carried out in cond. 3 and (20'). Obtaining

$$(25) \quad \begin{cases} \omega(\varrho m) < m, & 0 < m \leq \omega(2M) \\ M = \varrho \omega(M) + \gamma, & M = \gamma + a. \end{cases}$$

In the case (W) this leads to

$$\varrho < 1, \quad M = \frac{\gamma}{1 - \varrho}.$$

In the present case for an actual nonlinear $\omega(u)$ it seems to be impossible to obtain a reasonable result.

Remark. Theorem 1 may be easily extended to a variable matrix $\bar{A}(t)$ too provided that it is periodic or

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \text{tr}(\bar{A}) dt > -\infty$$

holds. Theorem 2 seems also to be capable to an extension for a periodic $\bar{A}(t)$.

5. As an application let us regard the equation (see [11])

$$(26) \quad u'' + u + \varrho(t) h(u, u') = 0, \quad h(0, v) = 0$$

for the scalar function $u = u(t)$ with the following conditions to be satisfied.

1. $\varrho(t)$ is continuous for $t \geq 0$ and $\int_0^\infty |\varrho(t)| dt < \infty$,
2. $|h(u, v) - h(u^*, v^*)| \leq \omega(|u - u^*| + |v - v^*|)$ where $\omega(z)$ is as before.

Then corresponding to every solution of (26) there exist two constants $\alpha_\infty \neq 0$ and δ_∞ such that

$$u(t) - \alpha_\infty \sin(t + \delta_\infty) \rightarrow 0, \quad u'(t) - \alpha_\infty \cos(t + \delta_\infty) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty$$

holds and the converse assertion is valid as well.

This statement is closely related to the result of [11] (where the converse statement fails), and is a generalization of [12], p. 388. In particular, the estimate given in [11] may be obtained also here. In the present case as $\bar{Y}_1 = 0$, cond. 3 of 3 is superfluous. Strange enough, neither of the conditions $h(\lambda u, \lambda v) = \lambda h(u, v)$, $\text{sg } h(u, v) = \text{sg } u$ (for arbitrary λ, u, v) of [11] is here necessary.

(Received January 14, 1963.)

REFERENCES

- [1] PERRON, O.: „Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungen". *Mathem. Zeitschr.* **29** (1929) 129—160.
- [2] COTTON, E.: „Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles". *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. Ser. 3. **28** (1911) 473—521.
- [3] WINTNER, A.: „Small perturbations". *American Journal of Mathematics* **67** (1945) 417—430.
- [4] WINTNER, A.: „Asymptotic equilibria". *American Journal of Mathematics*. **68** (1946) 125—132.
- [5] LEVINSON, N.: „The asymptotic behaviour of a system of linear differential equations". *American Journal of Mathematics* **68** (1946) 1—6.
- [6] CESARI, L.: „Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari". *Ann. Scuola norm. super. Pisa* **8** (1939) 131—148.
- [7] BELLMAN, R.: „The stability of solutions of a differential equation". *Duke Mathem. Journal* **10** (1943) 643—648.
- [8] WEYL, H.: „Comment on the preceding paper". *Amer. Journal of Mathematics* **68** (1946) 7—12.
- [9] BIHARI, I.: „Researches on the boundedness and stability of the solutions of non-linear differential equations". *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957) 261—278.
- [10] WINTNER, A.: „On the convergence of successive approximations". *American Journal of Mathematics* **68** (1946) 13—19.
- [11] BIHARI, I.: „Asymptotic behaviour of the solutions of certain second order ordinary differential equations perturbed by an half-linear term". *Publications Mathem. Inst. Hung. Acad. Sci.* **6** (1961) 291—293.
- [12] WINTNER, A.: „The adiabatic linear oscillator". *American Journal of Mathematics* **68** (1946) 385—396.
- [13] CODDINGTON—LEVINSON: *Theory of ordinary differential equations*, New York, 1955.
- [14] CODDINGTON—LEVINSON: „Uniqueness and convergence of successive approximations". *J. Indian Math. Soc.* **16** (1952) 75—81.
- [15] VISWANATHAM, B.: „The general uniqueness theorem and successive approximations". *J. Indian Math. Soc.* **16** (1952) 69—74.

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

I. BIHARI

Резюме

LEVINSON [5] и WEYL [8] показали, что если все решения уравнения (2) ограничены, тогда каждому решению $\bar{x}(t)$ уравнения (1) приподлежит одно решение $\bar{y}(t)$ уравнения (2) такое, что

$$\bar{x}(t) - \bar{y}(t) \rightarrow 0, \quad \text{если } t \rightarrow \infty,$$

и что обратное утверждение также имеет силу. Результат LEVINSONA относится только к линейным системам, результат WEYLA имеет силу и для нелинейных систем, однако только в том случае, если функция $f(t, \bar{x})$ в (1) имеет «линейный мажорант». В настоящей статье автор распространяет эту теорему на нелинейные системы при условии (4), соотв. (5), далее он дает обобщение одного результата WINTNERA [10], относящегося к сходимости последовательных приближений. Он показывает сходимость последовательных приближений (9), относящихся к уравнению (1) при условии (5). Наконец, в качестве приложения он дает обобщение одной теоремы WINTNER из [12], которое очень схоже с одним результатом автора из [11].

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Vidosa László

A kézirat nyomdába érkezett: 1963. XII. 6. — Példányszám: 800 — Terjedelem: 20,6 (A/5) ív

64.58123 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ: RÉNYI ALFRÉD

SZERKESZTŐBIZOTTSÁG: FREUD GÉZA, GALLAI TIBOR, GRÄTZER GYÖRGY, HEPPES ALADÁR,
MAKAI ENDRE, MEDGYESSY PÁL

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, CSISZÁR IMRE

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEИ az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdaírv terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEИnek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft. *Belföldön* előfizethető a Posta Központi Hírlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú egyszámlára való áttutalással rendelhetik meg a folyóiratot. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ
ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

РЕДКОЛЛЕГИЯ: GÉZA FREUD, TIBOR GALLAI, GYÖRGY GRÄTZER, ALADÁR HEPPES,
ENDRE MAKAI, PÁL MEDGYESSY

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, IMRE CSISZÁR

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, БУДАПЕСТ V., РЕАЛТАНОДА U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия A и B. Серия A выходит на иностранных языках, Серия B — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии A и одного выпуска серии B. Статьи снабжены с резюме на языках отличающих от языка статьи. Работы, предназначенные для опубликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Культура, Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS
OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
EDITOR IN CHIEF: ALFRÉD RÉNYI

EDITORIAL BOARD: GÉZA FREUD, TIBOR GALLAI, GYÖRGY GRÄTZER, ALADÁR HEPPES,
ENDRE MAKAI, PÁL MEDGYESSY

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, IMRE CSISZÁR

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 7.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultúra from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

INDEX

СОДЕРЖАНИЕ

SZEGŐ, G.: On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials	255
BIHARI, I.: An oscillation theorem concerning the half-linear differential equation of second order	275
CSÁKI, E.—VINCZE, I.: On some distributions connected with the arcsine law	281
HAJÓS, G.: Über eine Extremaleigenschaft der affin-regulären Polygone	293
FEJES TÓTH, L.: Über eine Extremaleigenschaft der affin-regulären Vielecke	299
PERGEL, J.: On a "Big Deviations" Problem	303
FRIVALDSZKY, S.: Теория обобщенных функций Соболева в случае общих (не звездо- образных) областей	309
ALEXITS, G.—KRÁLIK, D.: Über den Annäherungsgrad der Approximation im starken Sinne von stetigen Funktionen	317
ALEXITS, G.: Sur les bornes de la théorie de l'approximation des fonctions continues par polynômes	329
SZÜSZ, P.: Über einen Satz der Kettenbruchlehre	341
SALLAY, M.: Über einen linearen mehrdimensionalen Approximationsprocess	347
PÓSA, L.: On the circuits of finite graphs	355
HEPPES, A.: Filling of a domain by discs	363
GALLAI, T.: Kritische Graphen II.	373
GRÄTZER, G.: On the Jordan-Hölder theorem for universal algebras	397
ERDŐS, P.—GINZBURG, A.: On a combinatorial problem in latin squares	407
CSÁSZÁR, Á.: Sur un critère d'approximation uniforme	413
SZILÁRD, K.: Über die topologische Natur einiger allgemeiner Sätze der Theorie der elliptischen Funktionen	417
MEDGYESSY, P.: On the interconnection between the representation theorems of characteristic functions of unimodal distribution functions and of convex characteristic functions	425
PALÁSTI, I.: On the connectedness of bichromatic random graphs	431
SZÁSZ, F.: Über Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind	443
ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On random matrices	455
ROßBERG, H. J.: Über das asymptotische Verhalten der Rand- und Zentral- glieder einer Variationsreihe	463
KREM, A.: On the independence in the limit of extreme and central order statistics	469
BIHARI, I.: The asymptotic behaviour of a system of nonlinear differential equations	475

✓
307.801

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

VIII. ÉVFOLYAM, B. SZOROZAT, 4. FÜZET

1963

*

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ
ТОМ VIII, СЕРИЯ В, ВЫПУСК 4.

1963

*

PUBLICATIONS

OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
VOLUME VIII, SERIES B, FASC. 4.

1963



1964

TARTALOMJEGYZÉK

CZIPSZER JÁNOS 1930—1963 (Császár Ákos)	491
BÉKÉSSY A.—JÁNOSSY L.: Mágneses dipólus forgó mozgása időben lassan változó mágneses térben	499
ZIERMANN M.: A Szmirnov-tétel alkalmazása egy raktározási problémára	509
FRIVALDSZKY S.: Szakaszos desztilláció átfutási összidejének optimalizálása	519
FÉNYES T.—KÖRMENDY L.—ZUKÁL E.: Pácolt húsok fény okozta elhalványodási folyamatának matematikai vizsgálata I.	529
BOD P.: Lineáris programozás több, egyidejűleg adott célfüggvény szerint	541
ADLER Gy.: Gömbalakú öntvény lehűlési folyamatának vizsgálata	557
FÉNYES T.—MEITZEN N.—TÓTH K.: Egy szabadságfokú lengő rendszer rezonancia vizsgálata fűrészfogalakú periodikus gerjesztőerők esetén	599
BÉKÉSSY A.—BIHARI I.—MEGYERI J.: Kötélpálya ívek meghatározása az ív geometriai adataiból	617
TARNAY Gy.—TÓTH K.: A nempermanens szabadfelszínű vízmozgás karakterisztikus egyenleteinek nomogramjai	631
NÉMETH G.: Polinom approximációk az $F_a(x) = \int_0^x e^{-y^a} dy$ függvény számításához	641
BIHARI I.: Hullámos lemez deformációja adott terhelés mellett II.	645
Könyvismertetések	661
A Matematikai Kutató Intézet szemináriumai 1963-ban elhangzott előadások ...	665
Az Intézet munkatársainak a korábbi dolgozatjegyzékekben még fel nem tüntetett, másutt megjelent vagy sajtó alatt levő magyar nyelvű tudományos munkáinak jegyzéke	679

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

**MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI**

VIII. ÉVFOLYAM

1963

★

**ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА**

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ VIII,

1963

★

**PUBLICATIONS
OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE**

**OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES**

VOLUME VIII,

1963



1964

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK

KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ: RÉNYI ALFRÉD

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG: FREUD GÉZA, GALLAI TIBOR, GRÄTZER GYÖRGY, HEPPES ALADÁR,
MAKAI ENDRE, MEDGYESSY PÁL

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, CSISZÁR IMRE

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEИ az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azoktól különböző nyelvű kivonatok csatlakoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két gépelt példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEИnek előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft. Belföldön előfizethető a Posta Központi Hirlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú számlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. A folyóirat egyes füzetel 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

РЕДКОЛЛЕГИЯ: GÉZA FREUD, TIBOR GALLAI, GYÖRGY GRÄTZER, ALADÁR HEPPES,
ENDRE MAKAI, PÁL MEDGYESSY

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, IMRE CSISZÁR

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия A и B. Серия A выходит на иностранных языках, Серия B — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии A и одного выпуска серии B. Статьи снабжены с резюме на языках отличающихся от языка статьи. Работы, предназначенные для опубликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Кальтура, Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR IN CHIEF: ALFRÉD RÉNYI

EDITORIAL BOARD: GÉZA FREUD, TIBOR GALLAI, GYÖRGY GRÄTZER, ALADÁR HEPPES,
ENDRE MAKAI, PÁL MEDGYESSY

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, IMRE CSISZÁR

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 7.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kultura from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Hungary).

TARTALOMJEGYZÉK

INDEX

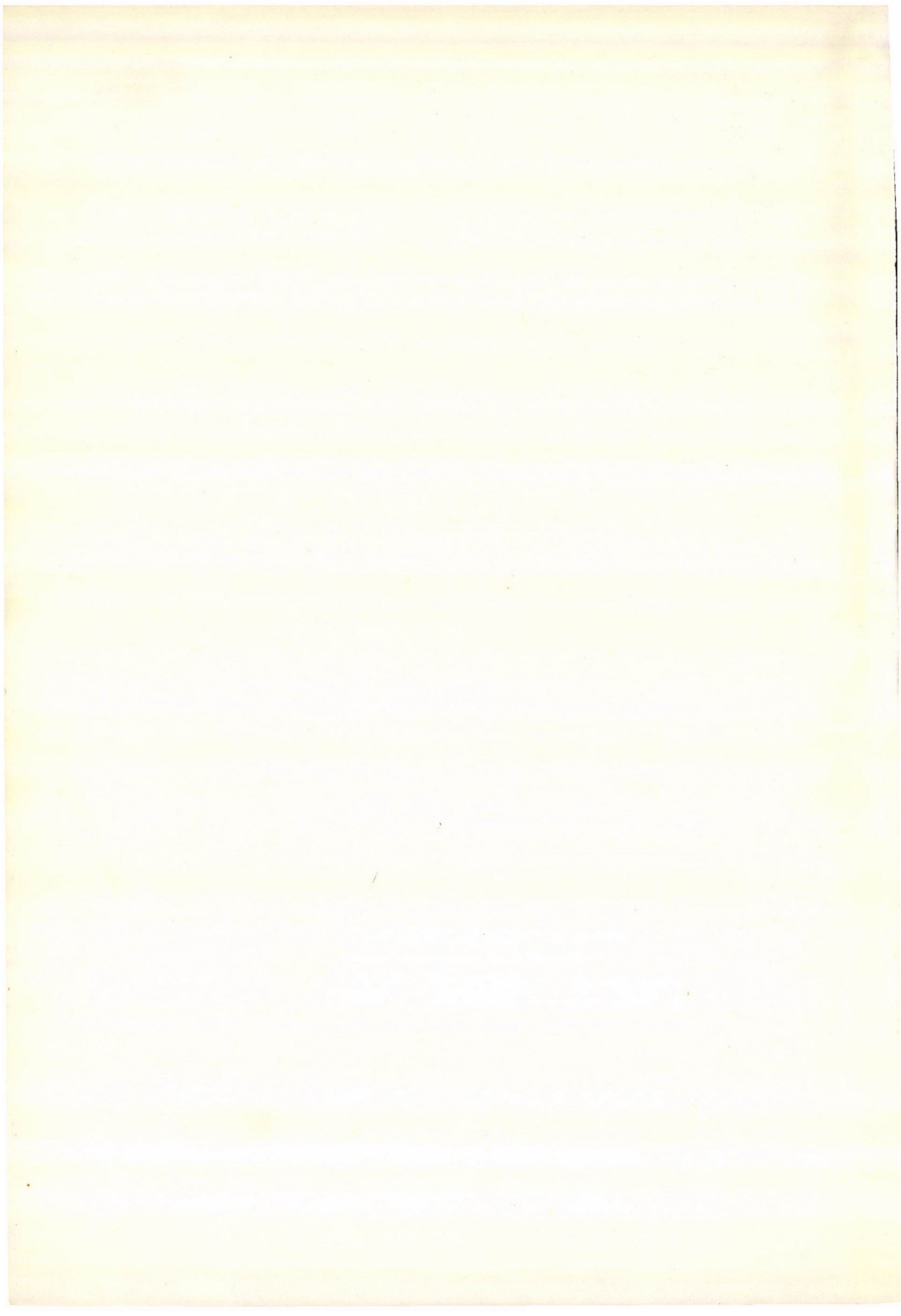
СОДЕРЖАНИЕ

ADLER GY.: Gömbalakú öntvény lehűlési folyamatának vizsgálata (Исследование процессов охлаждения шаровидных отливок) (<i>Étude du processus de refroidissement d'un moulage de forme sphérique</i>)	557
ALEXITS, G.—KRÁLIK, D.: Über den Annäherungsgrad der Approximation im starken Sinne von stetigen Funktionen (О порядке аппроксимации сильного суммирования непрерывных функций)	317
ALEXITS, G.: Sur les bornes de la théorie de l'approximation des fonctions continues par polynômes (Об оценках аппроксимаций непрерывных функций полиномами)	329
ALFÁR, L.: Sur une forme symétrique des équations de Beltrami (О симметрическом виде уравнений Beltrami)	141
BÁRTFAI, P.: Irrfahrtsprobleme mit einer spiegelnden Wand (О задачах блуждания с отражающей стеной)	125
BÉKÉSSY, A.: On classical occupancy Problems I (О классических задачах заполнения ящиков I)	59
BÉKÉSSY A.—JÁNOSSY L.: Mágneses dipólus forgó mozgása időben lassan változó mágneses térben (Вращательное движение свободного магнитного диполя в магнитном поле, медленно изменяющемся по времени) (<i>Rotational motion of a free magnetic dipole in a magnetic field slowly varying in time</i>)	499
BÉKÉSSY A.—BINARI I.—MEGYERI J.: Kötélpálya ívek meghatározása az ív geometriai adataiból (Определение кривых подвесной дороги из геометрических элементов дуг) (<i>Some methods for finding the parameters of a given catenary by measuring ordinates</i>)	619
BINARI, I.: An oscillation theorem concerning the half-linear differential equation of second order (Осцилляционная теорема, касающаяся полулинейного дифференциального уравнения второго порядка)	275
BINARI, I.: The asymptotic behaviour of a system of nonlinear differential equations (Асимптотическое поведение решений нелинейных дифференциальных уравнений)	475
BINARI I.: Hullámos lemez deformációja adott terhelés mellett II (Деформация волнистой пластинки при заданной нагрузке II) (<i>Deformation of corrugated plates II</i>)	645
BOD P.: Lineáris programozás több egyidejűleg adott célfüggvény szerint (Линейное программирование в случае нескольких одновременно заданных целевых функций) (<i>Über lineare Optimierung gemäß simultan gegebenen Zielfunktionen</i>)	541
BOGNÁR J.: О некоторых соотношениях между свойствами неотрицательности операторов в пространствах с индефинитной метрикой (<i>Some connections between non-negativity properties of operators in spaces with indefinite metric</i>)	201
CSÁKI, P.—FISCHER, J.: On the general notion of maximal correlation (Об общем понятии максимальной корреляции)	27
CSÁKI, E.—VINCZE, I.: On some distributions connected with the arcsine law (Некоторые распределения связанные с арксинусом)	281
CSÁSZÁR, A.: Sur un critère d'approximation uniforme (Об одном критерии, связанном с равномерной аппроксимацией)	413
CSISZÁR, I.: Eine informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizität von Markoffschen Ketten (Одно теоретико-инфор-	

мационное неравенство и его применение к доказательству эргодичности цепей Маркова)	85
CZIPSZER JÁNOS (1930—1963) (Császár Á.)	491
DAVENPORT, H.—ERDŐS, P.: A theorem on uniform distribution (Теорема о равномерном распределении)	3
ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On two problems of information theory (О двух проблемах теории информации)	229
ERDŐS, P.—GINZBURG, A.: On a combinatorial problem in latin squares (Об одной комбинаторной проблеме латинских квадратов)	407
ERDŐS, P.—RÉNYI, A.: On random matrices (О случайных матрицах)	455
FEJES TÓTH, L.: On the isoperimetric property of the regular hyperbolic tetrahedra (Об изопериметрических свойствах регулярного гиперболического тетраэдра)	53
FEJES TÓTH, L.: Über eine Extremaleigenschaft der affin-regulären Vielecke (Об одном экстремальном свойстве аффинно-правильных многоугольников)	299
FÉNYES, T.: Über restriktive lineare partielle Differential-Differenzgleichungen mit konstanten Koeffizienten (О restriktивных линейных уравнениях в конечных разностях и в частных производных с постоянными коэффициентами)	13
FÉNYES T.—KÖRMENDY L.—ZUKÁL E.: Pácolt húskok fény okozta elhalványodási folyamatainak matematikai vizsgálata I. (Математическое исследование процесса обесцвечивания маринованного мяса под влиянием светового излучения I) (Die Untersuchung des durch Licht verursachten Verblässungsvorganges bei Pökelfleisch I)	529
FÉNYES T.—MEITZEN N.—TÓTH K.: Egy szabadságfokú lengő rendszer rezonancia vizsgálata fűrészfogalakú periodikus gerjesztőerők esetén (Исследование резонанса колебательной системы с одной степенью свободы в случае периодических возбуждающих сил, имеющих пилообразный вид) (Über die Resonanzuntersuchung eines linearen Schwingers bei einer periodischen sägezahnförmigen Erregungsfunktion)	601
FRIVALDSZKY, S.: Теория обобщенных функций Соболева в случае общих (не звездобразных) областей (Über die Sobolewsche Distributionstheorie im Falle allgemeiner (nicht sternförmiger) Gebiete)	309
FRIVALDSZKY S.: Szakaszos desztilláció átfutási összidejének optimalizálása (Оптимализация общего времени продолжительности фракционной дистилляции) (Über die Optimierung der Durchlaufzeit der stufenweisen Destillation)	519
GALLAI, T.: Neuer Beweis eines Tutte'schen Satzes (Новое доказательство одной теоремы Тутте)	135
GALLAI, T.: Kritische Graphen I (Критические графы I)	165
GALLAI, T.: Kritische Graphen II (Критические графы II)	373
GRÄTZER, G.: Free algebras over first order axiom systems (Свободные алгебры над системами аксиом первого порядка)	193
GRÄTZER, G.: On the Jordan—Hölder theorem for universal algebras (О теореме Jordan—Hölder универсальных алгебр)	397
HAJÓS G.: Über eine Extremaleigenschaft der affin-regulären Polygone (Об одном экстремальном свойстве аффинно-правильных многоугольников)	293
HEPPES, A.: Filling of a domain by discs (Заполнение области плоскими фигурами)	363
KREM, A.: On the independence in the limit of extreme and central order statistics (О предельной независимости значений крайних и средних элементов порядковых статистик)	469
LEINDLER L.: О безусловной сходимости тригонометрических рядов I (Über unbedingte Konvergenz der trigonometrischen Reihen I)	151
MAKAI E.: On the fundamental frequencies of two and three dimensional membranes (Основной тон двух- и трехмерных мембран)	109
MAKAI, E.—TURÁN, P.: Hermite expansion and distribution of zeros of polynomials (Разложение в ряд по многочленам Эрмита и распределение нулей многочленов)	157
MEDGYESSY, P.: On the interconnection between the representation theorems of characteristic functions of unimodal distribution functions and of convex characteristic functions (О связи между теоремами представления характеристической функции одновершинного закона распределения и выпуклой характеристической функции)	425
NÉMETH G.: Polinom approximációk az $F_{\alpha}(x) = \int_0^x e^{-y^{\alpha}} dy$ függvény számításához	

(Приближение функции $F_a(x) = \int_0^x e^{-y^a} dy$ многочленами) (*Polynomialapproximation der Funktion $F_a(x) = \int_0^x e^{-y^a} dy$*) 641

- PALÁSTI, I.: On the connectedness of bichromatic random graphs (*О связности двухцветных случайных графов*) 431
- PERGEL, J.: On a „Big Deviations” problem (*Об одной проблеме „больших отклонений”*) 303
- PÉTER, R.: Über die Rekursivität der Begriffe der mathematischen Grammatiken (*О рекурсивности понятий математических грамматик*) 213
- PÓSA, L.: On the circuits of finite graphs (*Об окружностях конечных графов*) .. 355
- RÉVÉSZ, P.: On sequences of quasi-equivalent events I (*О квазиэквивалентных последовательностях событий I*) 73
- ROBERG, H. J.: Über das asymptotische Verhalten der Rand- und Zentralglieder einer Variationsreihe (*Об асимптотическом поведении центрального и крайнего членов порядковых статистик*) 463
- SALLAY, M.: Über einen linearen mehrdimensionalen Approximationsprocess (*Об одном методе многомерной линейной аппроксимации*) 347
- SZÁSZ, F.: Über Ringe, deren endlich erzeugbare echte Unterringe streng zyklische Rechtsideale sind (*О кольцах, конечно образованные собственные подкольца которых являются строго циклическими правыми идеалами*) 443
- SZEGŐ, G.: On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials (*О биортогональных системах тригонометрических многочленов*) 255
- SZILÁRD, K.: Über die topologische Natur einiger allgemeiner Sätze der Theorie der elliptischen Funktionen (*О топологической природе некоторых общих теорем теории эллиптических функций*) 417
- SZÜSZ, P.: Über einen Satz der Kettenbruchlehre (*Об одной теореме теории цепных дробей*) 341
- TARNAY Gy.—TÓTH K.: A nempermanens szabadfelszínű vízmozgás karakterisztikus egyenleteinek nomogramjai (*Номограммы характеристических уравнений движения воды с непостоянной свободной поверхностью*) (*Nomographische Lösung der charakteristischen Gleichungen von nichtpermanenter Wasserbewegung mit freier Oberfläche*) 631
- ZIERMANN M.: A Szmirnov-tétel alkalmazása egy raktározási problémára (*Применение теоремы Н. В. Смирнова к задаче о складах*) (*Anwendung des Szmirnow'schen Satzes auf einen Lagerhaltungsproblem*) 509
- Bibliography. List of recent papers and books written by members of the Institute, published or in print elsewhere in foreign languages (*Библиография. Список новых работ членов Института, опубликованных в других местах в иностранных языках*) 245
- Könyvismertetések (*Обзор книг*) (*Book reviews*) 661
- A Matematikai Kutató Intézet szemináriumaiban 1963-ban elhangzott előadások (*Доклады, произнесенные в семинарах Института в 1963 г.*) (*Lectures delivered in the seminars of the Institute in 1963*) 665
- Az Intézet munkatársainak a korábbi dolgozatjegyzékekben még fel nem tüntetett, másutt megjelent vagy sajtó alatt levő magyar nyelvű tudományos munkáinak jegyzéke (*Список работ сотрудников Института на венгерском языке, опубликованных в других изданиях или находящихся в печати и еще не отмеченных в предыдущих списках литературы*) (*List of papers in Hungarian of the members of the Institute published or in print elsewhere and not yet marked in the previous lists of papers*) 679



A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

**MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI**

VIII. ÉVFOLYAM, B. SOROZAT, 4. FÜZET

1963

★

**ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА**

**АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ
ТОМ VIII, СЕРИЯ В, ВЫПУСК 4.**

1963

★

**PUBLICATIONS
OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
VOLUME VIII, SERIES B, FASC. 4.**

1963



1964

**MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA**

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADEMIA
MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

FŐSZERKESZTŐ: RÉNYI ALFRÉD

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG: FREUD GÉZA, GALLAI TIBOR, GRÄTZER GYÖRGY, HEPPES ALADÁR,
MAKAI ENDRE, MEDGYESSY PÁL

TECHNIKAI SZERKESZTŐK: BOGNÁR KATALIN, CSISZÁR IMRE

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEIT az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb matematikai, valamint a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden kötete két sorozatban jelenik meg (A. és B. sorozat). Az A. sorozat idegen nyelvű, a B. sorozat magyar nyelvű. Évente egy kötet jelenik meg kb. 30 nyomdai terjedelemben, amely az A. sorozat 3 és a B. sorozat 1 füzetéből áll. A dolgozatokhoz azokról különböző nyelvű kivonatok csatolkoznak. Közlésre szánt dolgozatokat kérjük két példányban kivonattal ellátva a szerkesztő címére küldeni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEINEK előfizetési ára kötetenként belföldi címre 50,— Ft. Belföldön előfizethető a Posta Központi Hírlapirodánál (Budapest V., József nádor tér 1.) vagy bármely Postahivatalnál. Egyéni előfizetők a 61257. számú, közületek a 61066. számú csekkbefizetési lap felhasználásával, vagy az MNB 8. számú számlára való átutalással rendelhetik meg a folyóiratot. A folyóirat egyes füzetei 15,— Ft-os árban az Akadémiai Könyvesboltban kaphatók (Budapest V., Váci u. 22.). Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük az Intézet Könyvtárához fordulni (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15.).

ТРУДЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

РЕДКОЛЛЕГИЯ: GÉZA FREUD, TIBOR GALLAI, GYÖRGY GRÄTZER, ALADÁR HEPPES,
ENDRE MAKAI, PÁL MEDGYESSY

ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ: KATALIN BOGNÁR, IMRE CSISZÁR

АДРЕС: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15., ВЕНГРИЯ

В ТРУДАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи, содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие математические работы, а также статьи, связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала состоит из двух серий: серия А и В. Серия А выходит на иностранных языках, Серия В — на венгерском языке. В каждом году выходит один том, который содержит приблизительно 30 печатных листов, и состоит из 3 выпусков серии А и одного выпуска серии В. Статьи снабжены с резюме на языках отличающихся от языка статьи. Работы, предназначенные для опубликования в журнале, вместе с их резюме следует направлять по адресу редакции (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) в двух напечатанных на машинке экземплярах.

Цена подписки на ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА в Венгрии 50 форинтов, на заграничный адрес 70 форинтов (\$ 7 — за каждый том). Заграничные заказы принимает Күлтура, Budapest, 62, POB 149). По поводу отношения обмена просим обращаться к Библиотеке Института Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15., Венгрия).

PUBLICATIONS

OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE

OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

EDITOR IN CHIEF: ALFRÉD RÉNYI

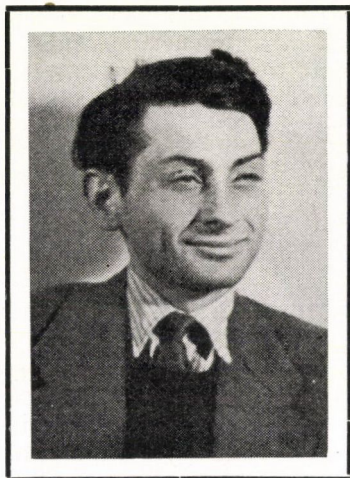
EDITORIAL BOARD: GÉZA FREUD, TIBOR GALLAI, GYÖRGY GRÄTZER, ALADÁR HEPPES,
ENDRE MAKAI, PÁL MEDGYESSY

TECHNICAL EDITORS: KATALIN BOGNÁR, IMRE CSISZÁR

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE, BUDAPEST V., REÁLTANODA U. 13/15, HUNGARY

The PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of scientific work of the Institute and other mathematical papers on the practical applications of mathematics. Each volume of the journal is published in two series (series A and B). Series A is published in foreign languages series B in Hungarian. In every year one volume appears, consisting of about 30 printed lists and containing 3 fasciculi of series A and one fasciculus of series B. The papers are provided with abstracts in languages different from that of the corresponding paper. Papers intended for publication in the journal should be sent to the editor (Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15.) in 2 typewritten copies, with an abstract.

The price of a volume of the PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE is 50,— Ft to an address in Hungary and 70,— Ft (\$ 7.— the volume) to abroad. Subscriptions can be made at the Kүлтура from abroad (Budapest, 62, POB 149). For establishing exchange relations please write to the Library of the Mathematical Institute (Budapest V., Reáltanoda u. 13/15., Hungary).



CZIPSZER JÁNOS

1930—1963

Súlyos veszteség érte a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutatóintézetét egyik legtehetségesebb fiatal kutatójának, CZIPSZER JÁNOSnak 1963. június 15-én tragikus körülmények között történt elhúnytával.

CZIPSZER JÁNOS 1930. november 16-án Budapesten született. Édesatyját már korán elveszítette és édesanyját is elhurcolták a fasiszták 1944-ben, s a deportálásban ő is meghalt. Az így árván maradt ifjút rokonai nevelték fel; rendkívül sokoldalú intellektuális érdeklődésű, kultúrált, de zárkózott természetű, visszahúzódo fiatalemberré fejlődött. 1949-től 1953-ig a Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetemen az alkalmazott matematika szakot végezte el. Kitűnő eredménnyel letett államvizsgája után Intézetünkben nyert alkalmazást és itt dolgozott egészen korai, váratlan és valamennyi munkatársát mélyen megdöbbentő maga-kereste haláláig.

Első sikereit a matematika területén még tanuló korában aratta: az 1948. évi KÜRSCHÁK JÓZSEF versenyen első díjat, majd az 1949. évi versenyen — elsőéves egyetemi hallgató korában — dícséretet nyert. Negyedéves hallgató korában az 1952. évi SCHWEITZER MIKLÓS emlékversenyen II. díjjal jutalmazták dolgozatát, amelyben a versenybizottság értékelése szerint megoldásai „éles matematikai elemzőképességről és ötletességről tanúskodnak.”

1959-ben addigi munkássága alapján a Bolyai János Matematikai Társulat a GRÜNWARD GÉZA emlékdíj I. fokozatával tüntette ki. Munkáinak ebből az alkalomból történt méltatása szerint „dolgozatai a valós függvénytan és a halmazelméleti topológia eredményeinek és módszereinek beható ismeretéről, eredeti, ötletes gondolkodásmódról, az elegancia iránt érzékről és erős kritikai szellemről tanúskodnak”. Mélységes fájdalommal kell megállapítanunk, hogy a sors nem engedte valóra válni az értékelés befejező mondatának jóslatát: „CZIPSZER JÁNOS az analízis hazai fiatal kutatóinak egyik legtehetségesebb, eredményekben gazdag pálya előtt álló tagja”.

CZIPSZER JÁNOS nyomtatásban megjelent dolgozatai a valós függvénytan, a konstruktív függvénytan, a differenciálegyenletek elmélete, a gráfelmélet és a halmazelméleti topológia területét érintik. Az [1] dolgozat K. SAJDUKOV és RÉNYI ALFRED eredményeit jelentősen továbbfejlesztve és általánosítva azt a kérdést vizsgálja, hogy a

$$\begin{aligned} &\{\cos(k + \tau)x\}, \quad \{1, \cos(k + \tau)x\}, \quad \{\sin(k + \tau)x\}, \\ &\{\cos(k + \tau)x, \sin(k + \tau)x\}, \quad \{1, \cos(k + \tau)x, \sin(k + \tau)x\} \\ &(k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

trigonometrikus függvényrendszerek a τ paraméter mely értéke mellett teljesek az

$$L^p(0, \pi), \quad L^p(0, 2\pi), \quad C(0, \pi), \quad C(0, 2\pi)$$

függvényterekben, továbbá milyen τ mellett minimálisan teljesek abban az értelemben, hogy bármelyik függvényt elhagyva belőlük megszűnik a teljesség.

A [2] dolgozat H. TIETZE ama nevezetes tételével kapcsolatos, amely szerint egy metrikus tér zárt részhalmazán értelmezett folytonos valós függvény kiterjeszthető az egész térre a folytonosság megőrzésével. S. BANACH (és az ő lengyel nyelvű közleményét nem ismerve GEHÉR LÁSZLÓ) hasonló tételt bizonyított be a Lipschitz-féle feltételnek eleget tevő függvényekre; ebben a részhalmaz zártóságára nincs is szükség. A főeredmény a lokális Lipschitz-feltételnek eleget tevő függvényekre vonatkozó analóg tétel, amelyben ismét zárt részhalmazt kell alapul venni.

A [3] és [5] dolgozat a parciális differenciálegyenletek elméletében alkalmazva sikeresen a valós függvénytan módszereit. D. WIDDER megadta az $u_{xx} = u_t$ hővezetési egyenlet

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < c$$

sávban nem-negatív megoldásainak egy integrálalakját, amelyben egy monoton növekvő függvény szerinti Stieltjes-integrál szerepel. CZIPSZER JÁNOS megadja annak szükséges és elegendő feltételét, hogy a hővezetési egyenlet valamely megoldása hasonló alakú, de korlátos változású függvény szerint Stieltjes-integrállal legyen előállítható és az ilyen megoldásokra átviszi a nem-negatív megoldásokra érvényes unicitási tételeket, valamint a megoldásnak a kezdeti feltételektől való függésére vonatkozó eredményeket.

A [4] dolgozat egy elektrodinamikai problémát old meg egy G. és F. HABERLANDTÓL származó módszernek a továbbfejlesztésével; matematikai tartalma egy differenciálegyenlet megoldásainak finom eszközökkel történő diszkussziójából áll.

A [6] dolgozat azt a kérdést vizsgálja, hogy ha egy $f(x)$ k -szor folytonosan differenciálható, 2π szerint periodikus függvényt trigonometrikus polinomokkal egyenletesen approximálunk, mit lehet mondani $f^{(k)}(x)$ és az approximáló polinom k -adik deriváltjának eltéréséről, az eltérést egyrészt a $C(0, 2\pi)$, másrészt az $L^p(0, 2\pi)$ térben tekintve. Foglalkozik az eredmények lokalizációjának és további megjavításuk lehetetlenségének kérdésével is.

A [7] dolgozat tárgya F. FRANKL egy tételének új bizonyítása. Ez azt mondja ki, hogy minden összefüggő, több pontból álló, elágazási pontot nem

tartalmazó, ésmegszámlálható mindenütt sűrű halmazzal rendelkező Hausdorff-tér vagy egy intervallummal, vagy a körvonallal homeomorf. Az új bizonyítás gerincét az egyik segédételnek CZIPSZER JÁNOSTÓL eredő igen elegáns bizonyítása alkotja; ez lehetővé teszi a tétel általánosítását és az általánosított tétel érdekes alkalmazásait is.

A [8] dolgozat megold egy ALEXITS GYÖRGY által már évtizedekkel ezelőtt felvetett és többek által vizsgált problémát. Felhasználva H. BLUMBERG ama tételét, hogy egy zárt intervallumban értelmezett valós függvény folytonos az intervallumnak valamely mindenütt sűrű részhalmazán, először is megmutatja, hogy hasonló érvényes egy minden pontjában második kategóriájú szeparábilis metrikus térnek tetszőleges metrikus térbe való leképezéseire, majd pedig ennek segítségével bebizonyítja, hogy az ilyen leképezések tetszőleges konvergens sorozatához megadható olyan mindenütt sűrű részhalmaz, amelynek minden pontjában, az illető részhalmazra szorítkozva, lokálisan egyenletesen konvergens a sorozat.

A [9] dolgozat E. HILLE, G. KLEIN és S. IZUMI tételeit élesítve megmutatja, hogy ha az $f(x)$ függvény az $L^p(-\infty, +\infty)$ függvényosztályhoz tartozik és E a számegyenesnek véges h mértékű részhalmaza, akkor

$$\int_E |f(x)|^p dx \leq c_p \|f\|_p^{p-1} \omega_p(f, h),$$

ahol c_p csakis p -től függő állandó, $\|f\|_p$ az $L^p(-\infty, +\infty)$ térbeli normát jelöli, és

$$\omega_p(f, h) = \sup \{ \|f(x+t) - f(x)\|_p : 0 < t \leq h \}.$$

Hasonló tételt bizonyít be az $L^p(0, 2\pi)$ tér esetére is. Az élesebb tételek bizonyítása emellett jóval egyszerűbb is az eredeti bizonyításoknál.

A [10] dolgozat a konvex, zárt, korlátos síkbeli halmazok belső paralleltartományaival kapcsolatban bevezetett és az izoperimetrikus egyenlőtlenség élesítésében nagy szerepet játszó, RÉNYI ALFRÉD által a halmaz karakterisztikus függvényének nevezett kifejezéssel foglalkozik és megadja annak szükséges és elegendő feltételét, hogy egy függvény valamely halmaznak az előbbi értelemben vett karakterisztikus függvénye lehessen.

A [11] dolgozatban olyan gráfok szerepelnek, amelyeknek csúcsai a természetes számok; $g(n)$ -nel jelölve az $1, \dots, n$ csúcsok közötti élek számát, azt a kérdést vizsgálják a szerzők, hogy milyen gyorsan kell a $g(n)$ függvénynek nőnie ahhoz, hogy biztosan lehessen állítani bizonyos előírt típusú részgráfoknak a létezését.

A [12] dolgozat egy tetszőleges E halmazon megadott és bizonyos tulajdonságokkal rendelkező S függvényrendszert tekint és olyan feltételeket keres, amelyek biztosítják, hogy egy adott függvényt S -beli függvényekkel tetszőleges pontossággal egyenletesen lehessen approximálni. A dolgozat főeredménye egy ilyen jellegű általános tétel bizonyítása, amelyből könnyen kiadódna W. MAAK, H. BAUER és G. NÖBELING régebbi eredményei, továbbá egyéb érdekes, részben topológiai alkalmazások.

Korántsem volna teljes az a kép, amelyet CZIPSZER JÁNOS fényes tehetségének a matematikai kutatás terén elért eredményeiről alkotunk, ha csupán az ő neve alatt megjelent dolgozatokra szorítkoznánk. Igen jelentős volt és számos munkatársának nyújtott igen hathatós segítséget az a tevékenysége is,

amelyet más matematikusok munkáinak lektoraként végzett. Ebben a nagy energiát felemésztő, sokszor hálátlan munkakörben mindig áldozatkészen vett részt és páratlan odaadással élte bele magát másoknak gondolatvilágába. Fáradhatatlan alaposággal készített bírálatai nemcsak a kisebb elírások aprólékos kiigazítására terjedtek ki, hanem szinte mindig tudott valami tartalmilag is értékeset nyújtani egy-egy tétel általánosabb kimondása, egy-egy bizonyítás egyszerűsítése, egy-egy állítás további élesítésének lehetetlenségét kimutató ellenpéldák keresése révén. Ilyen jellegű mintaszerű munkájából is ki kell emelni RIESZ FRIGYES összegyűjtött munkáinak kiadásában való közreműködését, és egészen külön kell szólni arról a tevékenységéről, amelyet e sorok írójának a topológia alapjairól írott könyvével kapcsolatban fejtett ki.

Mint az említett monográfia egyik lektora, rendkívül gyorsan elsajátította a könyvben tárgyalt szintopogén struktúrák elméletét és kiválóan beledolgozta magát az ennek tárgyalására bevezetett újszerű apparátusba; már lektori véleményével együtt számos kisebb-nagyobb javításra vonatkozó javaslaton kívül közölt néhány új eredményt is, amelyek az elméletet néhány ponton igen jelentősen továbbfejlesztették. Ezeknek egy részét már a könyv első, francia nyelvű kiadásába bele lehetett venni. Ugyanakkor azonban önállóan is felvetett további problémákat, amelyeknek megoldására azután egészen új fogalmakat vezetett be és ezeknek a segítségével igen mélyen fekvő, szép eredményekhez jutott. Ezeknek publikálására nem akart vállalkozni, viszont erre vonatkozó feljegyzéseit rendelkezésemre bocsátva lehetővé tette, hogy a könyv angol és német nyelvű kiadásában vizsgálatainak eredménye nagy részben napvilágot lásson; ezekben a kiadásokban három fejezet csaknem teljesen CZIPSZER JÁNOS eredményeit tartalmazza. Ezek arra vonatkoznak, hogy hogyan lehet egy szintopogén teret bizonyos igen egyszerűen felépített „standard” szintopogén terekbe izomorfán beágyazni (olyasféléképpen, mint ahogyan a teljesen reguláris topologikus tereket kockákba lehet beágyazni homeomorfán). Egyes eredményei azonban nem kerültek be a könyvbe s ma sincsenek még publikálva.

CZIPSZER JÁNOS túlzásba hajtott szerénysége folytán nem törekedett semmiféle tudományos cím vagy fokozat megszerzésére, pedig értékes tudományos eredményei alapján ez már régebben indokolt lett volna. Meg kell emlékeznünk arról is, hogy CZIPSZER JÁNOS öt éven át volt az Intézet könyvtárosa; ezt a munkáját példás lelkiismeretességgel, alaposággal és kiváló szervezőképességgel végezte; gondos és szakértő munkája eredményeképpen a könyvtár rendkívül sokat fejlődött.

Ha magába zárkózott egyénisége kevesek számára tette is lehetővé, hogy magukat barátainak mondhassák, mint csendes, szerény, előzékeny munkatársat mindnyájan őszintén szerettük. Fiatal életének tragikus megszakadása mindnyájunkat mélységesen megrendített. Emlékét kegyelettel megőrizzük.

CSÁSZÁR ÁKOS

CZIPSZER JÁNOS MUNKÁI

- [1] „Bizonyos trigonometrikus rendszerek teljességéről.” *MTA III. Oszt. Közl.* **5** (1955), 392—410 (RÉNYI ALFRÉDDel közösen).
- [2] „Extension of functions satisfying a Lipschitz condition.” *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **6** (1955), 213—220 (GEHER LÁSZLÓval közösen).
- [3] „Hővezetés végtelen rúdban I.” *MTA Alk. Mat. Int. Közl.* **3** (1955), 395—408.

- [4] „Örvényáramveszteségek egyenáramú előtelítés esetén.” *MTA Alk. Mat. Int. Közl.* **3** (1955), 443—453 (TUSCHÁK RÓBERTTEL közösen).
- [5] „Hővezetés végtelen rúdban II.” *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **1** (1956), 185—192.
- [6] „Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successives par un polynôme trigonométrique et ses dérivées successives.” *Acta Math.* **99** (1958), 33—51 (FREUD GÉZÁVAL közösen).
- [7] „Sur les courbes irramifiées.” *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958), 315—332 (CSÁSZÁR ÁKOSSAL közösen).
- [8] „Sur une propriété générale des suites convergentes de fonctions.” *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959), 305—315.
- [9] „Sur le module de continuité intégrale.” *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **6** (1961), 393—398.
- [10] „Über die Parallelbereiche nach innen von Eibereichen.” *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **7** (1962), 197—202.
- [11] „Some extremal problems on infinite graphs.” *MTA Mat. Kut. Int. Közl.* **7** (1962), 441—457 (ERDŐS PÁLAL és HAJNAL ANDRÁSSAL közösen).
- [12] „Sur des critères généraux d'approximation uniforme.” *Annales Univ. Sci. Budapest., Sectio Math.* **6** (1963) (CSÁSZÁR ÁKOSSAL közösen).

JÁNOS CZIPSZER

1930—1963

Математический Институт Академии Наук Венгрии понес тяжелую утрату: 15 июня 1963 года трагически погиб JÁNOS CZIPSZER один из его талантливых работников. J. CZIPSZER родился 16 ноября 1930 года в Будапеште. Своего отца он потерял ещё в детские годы, его мать будучи заключенной в концлагерь в 1944 году стала жертвой фашизма. Сироту воспитывали родственники. 1949—1953 гг. J. CZIPSZER учился на факультете естественных наук Будапештского Университета на кафедре математики. После окончания учебы он начал работать в нашем институте, где оставался вплоть до последнего времени.

Первых математических успехов J. CZIPSZER добился ещё во время учебы. В 1948 году на конкурсе имени J. KÜRSCHÁK он получил первую премию, на этом же конкурсе 1949 года он был отмечен грамотой, на конкурсе в память M. SCHWEITZER в 1952 году занял второе место. Его работа была отмечена жюри как «отражающая развитые аналитические способности и богатство мыслей».

В 1959 году Математическим Обществом имени János Bolyai он был награжден премией первой степени в память G. GRÜNWARD. В оценке его работ отмечается, что «его статьи показывают глубокое знание достижений и методов теории действительных функций и топологической теории множеств, оригинальность и богатство мыслей, чувство изящности и критический дух». С глубокой печалью надо отметить, что судьба не дала возможности осуществиться одному из высказываний о том, что J. CZIPSZER, «одного из талантливейших молодых исследователей, у нас в стране ждет блестящая научная карьера в области математического анализа».

Научные работы J. CZIPSZER относятся к теории действительных функций, к конструктивной теории функций, к вопросам общей топологии, к теории дифференциальных уравнений и теории графов. Его идеи, всегда отличающиеся своей ясностью, глубиной, изящностью и оригинальностью,

часто содержали решение таких проблем, над которыми безуспешно работали другие математики. J. CZIPSZER проводил ценную работу по редактированию рукописей своих сотрудников; его замечания никогда не организовались исправлением несущественных ошибок, а непосредственно касались вопросов обобщения теорем, упрощения доказательств, построения контрпримеров, иллюстрирующих невозможность дальнейшего обобщения. Среди таких значительных работ надо отметить его участие в издании трудов F. RIESZ и особенно работу по редактированию рукописи монографии об основах общей топологии, написанной автором этих строк; кроме большого числа более или менее важных исправлений J. CZIPSZER добавил целый ряд значительных результатов по вопросам, рассматриваемым в этой работе, среди них одни можно найти во французском издании, остальные дали материал для трех новых глав немецкого и английского изданий.

Работники нашего института искренне любили этого скромного, спокойного, отзывчивого и всегда готового помочь человека. Трагический конец молодой жизни глубоко тронул нас. Он навсегда останется в наших сердцах.

Á. CSÁSZÁR

JÁNOS CZIPSZER

1930—1963

L'Institut de Mathématique de l'Académie des Sciences de Hongrie vient de subir une grave perte: le 15 juin 1963 décéda dans des circonstances tragiques un de ses collaborateurs de grand talent, J. CZIPSZER.

Il naquit à Budapest le 16 novembre 1930. Il perdit son père dans son enfance et sa mère, déportée en 1944 par les allemands, devint victime du fascisme. L'orphelin fut élevé par la parenté. De 1949 à 1953, il fit ses études de mathématiques à la Faculté des Sciences de l'Université de Budapest. Après avoir terminé ses études, il trouva un emploi dans notre Institut où il travaillait jusqu'à sa mort prématurée cherchée par soi-même.

Ses premiers succès en mathématique datent du temps de ses études. Il gagna le premier prix au concours de mathématique J. KÜRSCHÁK de l'année 1948, puis obtint une récompense au même concours de l'année 1949. Il remporta le second prix au concours commémoratif M. SCHWEITZER de l'année 1952; d'après l'opinion du comité organisateur du concours, son travail „témoigne d'une faculté analytique aiguë et d'une richesse en idées”.

En 1959, la Société Mathématique János Bolyai lui attribua le premier degré du prix commémoratif G. GRÜNWARD. L'appréciation de ses travaux déclare que „ses articles montrent une connaissance pénétrante des résultats et des méthodes de la théorie des fonctions réelles et de la topologie ensembliste, un raisonnement originel et plein d'idées, un sens pour l'élégance et un esprit critique”. C'est avec une profonde tristesse que nous devons constater que le sort mauvais ne permit pas que la prédiction de la dernière phrase de cette appréciation s'accomplisse: „J. CZIPSZER est un des plus doués des jeunes chercheurs de l'analyse mathématique dans notre pays, une carrière scientifique riche en succès l'attend.”

Les travaux scientifiques de J. CZIPSZER concernent des questions de la théorie des fonctions réelles, de la théorie constructive des fonctions, de la théorie des équations différentielles, de la théorie des graphes et de la topologie générale. Ils se distinguent par la clarté, la profondeur, l'élégance et l'originalité des idées et contiennent souvent la solution de problèmes que d'autres mathématiciens tentaient en vain de résoudre. En dehors de cela, il accomplissaient un travail de grande valeur en critiquant les manuscrits de ses collègues; les remarques faites par lui en qualité de lecteur ne se bornaient jamais à la correction d'erreurs inessentielles mais touchaient toujours les questions relatives au contenu comme la généralisation des théorèmes, la simplification des démonstrations, la construction de contre-exemples montrant qu'une généralisation ultérieure n'est plus possible. Parmi ses travaux excellents de ce genre, il faut citer sa collaboration dans l'édition des oeuvres complètes de F. RIÉSZ et particulièrement son activité comme lecteur du manuscrit de la monographie sur les fondements de la topologie générale de l'auteur de ces lignes; en dehors d'un grand nombre de corrections plus ou moins essentielles, il enrichit la théorie traitée dans l'ouvrage en question d'une série de résultats profonds et importants dont quelques-uns trouvèrent place dans l'édition française et les autres fournissaient la matière de trois chapitres nouveaux des éditions anglaises et allemandes.

Tous les travailleurs de notre Institut aimaient sincèrement ce collègue silencieux, modeste, prévenant et toujours prêt à aider. L'interruption tragique de sa jeune vie nous affecta profondément. Nous gardons de lui un pieux souvenir.

Á. CSÁSZÁR

MÁGNESES DIPÓLUS FORGÓ MOZGÁSA IDŐBEN LASSAN VÁLTOZÓ MÁGNESES TÉRBEN

BÉKÉSSY ANDRÁS és JÁNOSSY LAJOS¹

1. Legyen egy atom mágneses momentuma

$$(1) \quad \mathbf{M} = \mu_B \cdot \mathbf{s},$$

ahol μ_B a Bohr-féle magneton és \mathbf{s} a mágnesezés irányába mutató egységvektor.

\mathbf{H} térerősségű mágneses térben az \mathbf{s} vektor precesszió jellegű mozgást végez, amelyet nem-relativisztikus közelítésben az

$$(2) \quad \dot{\mathbf{s}} = \frac{2}{\hbar} \mu_B (\mathbf{s} \times \mathbf{H})$$

mozgásegyenlet ír le, ha csak a mágneses térnek és az atom mágnesezettségének inhomogén voltát figyelmen kívül hagyjuk; az ezzel járó effektusokat akkor tudnánk figyelembe venni, ha (2) helyett a Pauli-egyenleteknek megfelelő hidrodinamikai egyenleteket választanánk a tárgyalás alapjául.

Ha \mathbf{H} állandó, vagy ha változik is időben, de rögzített irányba mutat, akkor (2) megoldása azonnal felírható; alkalmasan választott koordináta-rendszerben $H_x = H_y = 0$, $H_z = H(t)$, és

$$(3) \quad \begin{aligned} s_x &= \sin \Theta \cdot \cos \psi, \\ s_y &= -\sin \Theta \cdot \sin \psi, \\ s_z &= \cos \Theta, \\ \psi &= \frac{2}{\hbar} \mu_B \cdot \int_{t_0}^t H(t') dt', \end{aligned}$$

ahol t_0 és Θ integrációs állandók. (Csak két tetszőleges integrálási állandó van, mert feltettük, hogy \mathbf{s} egységvektor.) A (3) megoldás mutatja, hogy \mathbf{s} a \mathbf{H} térerősség irányával állandó szöget zár be, — akár változik \mathbf{H} az időben, akár nem —, a precesszió szögsebessége pedig

$$\omega(t) = \dot{\psi} = \frac{2}{\hbar} \mu_B H(t).$$

2. Ha egy atom inhomogén mágneses téren halad át, akkor mágnesezési vektorának precesszióját (2) írja le, ahol \mathbf{H} most az atom környezetében ural-

¹ Központi Fizikai Kutató Intézet

kode mágneses térerősséget jelenti. Miközben az atom a téren áthalad, a reáható erő irány és nagyság szerint is változik. Ha az erő csak nagyság szerint változik, de irány szerint nem, akkor, mint a (3) egyenletrendszer mutatja, a precessziós kúp nyílásszöge változatlan marad. Általában azonban fel kell tételeznünk, hogy a mágneses térerő az atom pályája mentén irányát is változtatja, és elemezni akarjuk a precessziónak a tér irányának változásával járó módosulását is. Meg kell tehát oldani a (2) egyenletet — legalább is közelítőleg — mind nagyság, mind irány szerint változó, az idő függvényeként adott \mathbf{H} érték mellett.

Vezessünk be evégett egy speciális koordinátarendszert a következőképpen. Legyen $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$, legyen tehát \mathbf{h} a mágneses térerősség (pillanatnyi) irányába mutató egységvektor, és legyenek az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ orthogonális rendszert alkotó egységvektorok az alábbi egyenletekkel értelmezve:

$$(4) \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{h}, \quad \mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{h}}/\dot{h}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2,$$

ahol $\dot{h} = |\dot{\mathbf{h}}|$. Az (1) vektoregyenletet bontsuk komponensekre az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ rendszerben, legyen tehát

$$(5) \quad s_k = \mathbf{s} \cdot \mathbf{e}_k, \quad (k = 1, 2, 3)$$

és ekkor (2) szerint az s_k komponensekre a következő egyenleteket kapjuk:

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{s}_1 &= \dot{h} s_2, \\ \dot{s}_2 &= K s_3 - \dot{h} s_1, \\ \dot{s}_3 &= -K s_2, \end{aligned}$$

ahol

$$(7) \quad K = \frac{2}{\hbar} \mu_B H(t) + \frac{\ddot{\mathbf{h}}(\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{h}})}{\dot{h}^2}, \quad H(t) = |\mathbf{H}|,$$

és $\dot{h} = |\dot{\mathbf{h}}|$, mint előbb.

Vezessük be az

$$u = \int_0^t K(t') dt'$$

mennyiséget új változóként és jelöljük vesszővel az u szerinti differenciálást. Az u független változóval a (6) rendszer átmege az

$$(8) \quad \begin{cases} s'_1 = k s_2, \\ s'_2 = s_3 - k s_1 \\ s'_3 = -s_2 \end{cases}$$

rendszerbe, ahol

$$(9) \quad k = \frac{\dot{h}}{K} = \left| \frac{d\mathbf{h}}{du} \right|.$$

Ha a mágneses tér egyáltalán nem változtatja irányát, akkor $\dot{h} = 0$, és (7) szerint $K = \frac{2}{\hbar} \mu_B H(t)$, továbbá (3) szerint u az a szög, amellyel a precessz-

szió folyamán a mágneses dipólus a kezdő időponttól t -ig elfordult. Abban az esetben, ha a tér iránya változik, de ez a változás lassú a precesszióhoz képest, az u mennyiség még jó közelítéssel méri ezt a szöget. A dimenziótlan (szám dimenziójú) k mennyiség tehát (9) szerint a mágneses tér \mathbf{h} irányának elfordulását méri a precessziós szögelforduláshoz képest (közelítőleg), és ezért gyakorlatilag feltételezhető, hogy $k \ll 1$.

3. Ha $k' = 0$, azaz ha a mágneses tér nem fordul el, vagypedig K -val arányos szögsebességgel fordul el, akkor a (7) rendszer megoldása

$$(9a) \quad s_1 = -k a \cos \psi + b,$$

$$(9b) \quad s_2 = a \omega \sin \psi,$$

$$(9c) \quad s_3 = a \cos \psi + k b,$$

ahol

$$(10) \quad \omega = \sqrt{1 + k^2}, \quad \psi = \omega u + \varphi,$$

az a, b, φ mennyiségek pedig integrálási állandók, amelyek között az

$$(11) \quad \omega^2(a^2 + b^2) = 1$$

összefüggés áll fenn, ha \mathbf{s} egységvektor.

Könnyen kiszámítható, hogy a precesszió tengelye az $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ síkban fekszik és az \mathbf{e}_1 iránnyal olyan szöget zár be, amelynek szinusza k/ω , a precessziós kúp nyílásszögének szinusza pedig éppen $a\omega$. Ha $k \ll 1$, akkor (9) és az éppen mondottak szerint a precesszió olyan tengely körül megy végbe, amely kissé elhajlik a mágneses tér \mathbf{e}_1 irányától; a precessziós kúp ugyan *utána fordul* a mágneses tér irányának, *de nyílásszöge állandó marad*.

Plauzibilis ezek után feltételezni, hogy a precesszió jellege akkor sem változik lényegesen, ha k lassan ugyan, de változik, tehát $k' \neq 0$, $k' \ll 1$. Ezt a következőkben ismertetett megfontolások támasztják alá.

4. A (8) rendszer harmadik egyenletének differenciálása útján az $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \text{konst.} = 1$ integrál felhasználásával s_3 -ra az

$$(12) \quad s_3'' + s_3 = k/\sqrt{1 - s_3^2} - (s_3')^2$$

egyenlet adódik, ahol a jobboldalon álló négyzetgyököt s_1 előjelével egyezőnek kell választani. (Hacsak a kezdeti $s_1(0)$ nincs nagyon közel a nulla értékhez, akkor feltételezhető, hogy s_1 hosszú ideig tartja előjelét.)

Mivel $k \ll 1$, a (12) egyenlet kicsiny, nem-lineáris taggal perturbált rezgésegyenletnek tekinthető, és így alkalmazhatjuk rá N. M. KRÜLOV és N. N. BOGOLJUBOV módszerének azt a válfaját, amelyet JU. A. MITROPOLJSZKIJ dolgozott ki és írt le ([1], 107—115. o.).

Legyen

$$k = \varepsilon k(\varepsilon u)$$

alakú, ahol $\varepsilon \ll 1$. A k mennyiség ilyen alakban való felvételével nemcsak azt körtjük ki, hogy $k \ll 1$, hanem azt is, hogy $k' \ll k$. A megoldást

$$s_3 = a(u) \cos \psi(u) + \varepsilon r_1(\varepsilon u, a, \psi) + \varepsilon^2 r_2(\varepsilon u, a, \psi) + \dots$$

alakban keressük, ahol a és ψ az

$$\begin{aligned} a' &= \varepsilon A_1(\varepsilon u, a) + \varepsilon^2 A_2(\varepsilon u, a) + \dots \\ \psi' &= 1 + \varepsilon B_1(\varepsilon u, a) + \varepsilon^2 B_2(\varepsilon u, a) + \dots \end{aligned}$$

egyenletnek tegyenek eleget, és kikötjük, hogy a ψ -ben periodikus r_1, r_2, \dots függvények Fourier-sorában az alapharmonikus nulla amplitúdójú, másszóval, hogy s_3 -ban az alapharmonikus teljes amplitúdója $a(u)$.

A számolás részleteit itt mellőzzük és ismét a már idézett [1] munkára utalunk. Az-eredmény az, hogy

$$A_1 = A_2 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{1}{2} k^2(0),$$

tehát még második közelítésben is (ε^3 nagyságrendű tagoktól eltekintve) $a = a(u_0) = \text{konst.}$, a precesszió kúpszöge nem változik, (12) teljes megoldása pedig ebben a közelítésben azonos a (9c) egyenlettel (ε^3 nagyságrendtől eltekintve).

5. Annak bizonyítására, hogy a precesszió kúpszöge hosszú időn keresztül nem változhat lényegesen, szolgál még az alábbi megfontolás.

A (8) egyenletrendszer hozzuk *normálalakra*, vagyis s_1, s_2, s_3 helyett vezessünk be olyan új változókat, amelyeknek változása (az u szerinti deriváltja) kicsiny. Ilyen mennyiség a (9) egyenletekben szereplő a és φ . Fogjuk fel a (9) egyenleteket transzformációs egyenleteknek, vagyis tegyük fel, hogy a és ψ függnék u -tól. A függést (8) szerint a következő egyenletek fejezik ki:

$$(13) \quad \begin{cases} (a \omega)' = -\frac{k'b}{\omega} \cos \psi, \\ \psi' = \omega + \frac{k'b}{a \omega^2} \sin \psi, \end{cases}$$

$$\omega^2(a^2 + b^2) = 1, \quad \omega = \sqrt{1 + k^2} \quad \text{mint előbb.}$$

Egyszerűsítésül legyen

$$a \omega = \cos \lambda,$$

$$k = \operatorname{tg} \mu,$$

így

$$\omega = \frac{1}{\cos \mu}, \quad b = \frac{1}{\omega} \sin \lambda = \sin \lambda \cos \mu$$

és (13)-ból

$$(14) \quad \begin{cases} \lambda' = \mu' \cos \psi \\ \psi' = \omega + \mu' \operatorname{tg} \lambda \sin \psi. \end{cases}$$

Feltételezve, hogy $\mu' = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} k)'$ kicsiny, a (14) egyenletek mutatják, hogy a λ és a

$$(15) \quad \varphi = \psi - \int_0^u \omega du' = \psi - \Omega(u)$$

változó deriváltja kicsiny:

$$(16) \quad \begin{cases} \lambda' = \mu' \cos \psi \\ \varphi' = \mu' \operatorname{tg} \lambda \sin \psi. \end{cases}$$

Ezek tehát normálegyenletek a fenti értelemben.

(14) szerint $\psi' \sim \omega$ és mivel $\omega \sim 1$, a ψ változó kb. arányos u -val, ennél fogva a (14) első egyenletének integrálásából adódó

$$\lambda(u) - \lambda(0) = \int_0^u \mu'(x) \cos \psi(x) dx$$

egyenlőségből arra következtethetünk, hogy

$$|\lambda(u) - \lambda(0)| \ll |\mu(u) - \mu(0)|,$$

mivel az alatt az idő alatt, amíg μ lényegesen megváltozik, $\cos \psi$ -nek igen sok periódusa lezajlik.

Ez a következtetés természetesen nem állja meg helyét, ha a precesszió periódusa és μ között rezonancia van, ha tehát pl.

$$\mu'(u) \sim \cos \psi(u).$$

6. Tegyük fel most, hogy a precesszió és a mágneses tér változása között olyan jellegű rezonancia van, amelynek következtében az

$$\frac{1}{u} \int_0^u \mu'(u) e^{i\Omega(u)} du$$

integrál (ahol $\Omega(u) = \int_0^u \omega(u) du$, mint előbb) nagy u értékekre nem elhanyagolhatóan kicsiny. Ebben az esetben a (16) normálegyenletek megoldása a

$$(17) \quad \begin{aligned} \bar{\lambda}' &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^u \mu'(u) \cos(\bar{\varphi} + \Omega(u)) du \\ \bar{\varphi} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^u \mu'(u) \operatorname{tg} \bar{\lambda} \sin(\bar{\varphi} + \Omega(u)) du \end{aligned}$$

egyenletek megoldásához áll közel (lásd [1], 327—332. o.) az integrálás u szerint itt állandó $\bar{\varphi}$ és $\bar{\lambda}$ mellett értendő.

A

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \varrho \cos \alpha = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^u \mu'(u) \cos \Omega(u) du \\ \beta_2 &= \varrho \sin \alpha = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^u \mu'(u) \sin \Omega(u) du \end{aligned} \quad (\varrho \geq 0)$$

jelölésekkel (17)-ből

$$(18a) \quad \bar{\lambda}' = \beta_1 \cos \bar{\varphi} - \beta_2 \sin \bar{\varphi} = \varrho \sin(\bar{\varphi} + \alpha),$$

$$(18b) \quad \bar{\varphi} = \operatorname{tg} \bar{\lambda} (\beta_1 \sin \bar{\varphi} + \beta_2 \cos \bar{\varphi}) = \varrho \operatorname{tg} \bar{\lambda} \sin(\bar{\varphi} + \alpha).$$

E rendszernek egy integrálja

$$C = \sin(\bar{\varphi} + \alpha) \cos \bar{\lambda},$$

ennélfogva a (18a) egyenlet felhasználásával

$$\varrho u = \int_{\bar{\lambda}(0)}^{\bar{\lambda}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{\cos^2 x - C^2}},$$

vagyis

$$(19) \quad \sin \bar{\lambda} = \sqrt{1 - C^2} \sin(\varrho u + \beta),$$

ahol a β integrációs állandó;

$$\sin \bar{\lambda}(0) = \sqrt{1 - C^2} \sin \beta.$$

A ϱ mennyiség természetesen igen kicsiny, úgyhogy $\sin \bar{\lambda}$ a $\sin \bar{\lambda}(0)$ kezdőértéktől kiindulva igen lassan ingadozik $-\sqrt{1 - C^2}$ és $\sqrt{1 - C^2}$ között, $\cos \bar{\lambda}$ pedig C és 1 között. Azonban $\cos \bar{\lambda} \sim a\omega$, eredményünk tehát azt jelenti, hogy az $a\omega$ mennyiséggel jellemzett precessziós nyílásszög általában még a mondott típusú rezonancia esetében sem csökken le tartósan nullára, hanem a kezdeti $a(0)$ értékből kiindulva igen lassan ingadozik a nulla és egy a kezdeti feltételektől függő határszög között.

(Beérkezett: 1963. június 26.)

IRODALOM

- [1] Боголюбов, Н. Н.—Митропольский, Ю. А.: *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*. 2е издание, Москва, 1958.

ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ, МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩЕМСЯ ПО ВРЕМЕНИ

A. BÉKÉSSY и L. JÁNOSSY

Резюме

Статья посвящена проблеме вращения свободного магнитного диполя в магнитном поле, медленно изменяющемся по времени.

Пусть \mathbf{s} — единичный вектор в направлении оси диполя, тогда уравнение движения имеет вид:

$$(1) \quad \dot{\mathbf{s}} = \frac{\mu_B}{\hbar} (\mathbf{s}(t) \times \mathbf{H}(t)),$$

где $\mathbf{H}(t)$ означает напряженность магнитного поля, а μ_B — константа. В первом приближении вращающийся диполь можно считать классической моделью атома, движущегося в неомогенном магнитном поле, в этом случае μ_B — магнетон Бора, а \mathbf{H} — средняя величина силы магнитного поля в непосредственной близости к атому.

Если абсолютная величина \mathbf{H} медленно изменяется во времени, а её направление остаётся неизменным, тогда уравнение (1) имеет простое решение. Как известно, при вращении вокруг вектора \mathbf{H} с переменной угловой скоростью диполь описывает прецессионный конус, при этом угол раствора конуса остается постоянным.

Даже тогда, если направление \mathbf{H} изменяется, имеется важный специальный случай в котором решение пишется в явном виде с тем результатом, что ось прецессионного конуса вращается вместе с магнитным полем, но угол раствора конуса остается постоянным —, именно, введем систему координат, определенную следующим образом:

$$(2) \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{h} = \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\dot{\mathbf{h}}}{|\dot{\mathbf{h}}|}; \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2.$$

В системе координат (2) уравнения движения имеют вид:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{ds_1}{du} = k(u) \cdot s_2, \\ \frac{ds_2}{du} = s_3 - k(u) \cdot s_1, \\ \frac{ds_3}{du} = -s_2, \end{cases}$$

где $s_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{s}$ ($j = 1, 2, 3$); $k = \left| \frac{d\mathbf{h}}{du} \right|$ и где

$$u = \int_0^t \left(\mu_B |\mathbf{H}(t')| + \frac{\mathbf{h}(\dot{\mathbf{h}} \times \ddot{\mathbf{h}})}{\dot{\mathbf{h}}} \right) dt',$$

новая независимая переменная. Если $k(u) = \text{const.}$, тогда решение системы (3) имеет следующий вид:

$$(4) \quad \begin{cases} s_1 = -ka \cos \psi + b, \\ s_2 = a \omega \sin \psi, \\ s_3 = a \cos \psi + kb, \end{cases} \quad (\psi = \omega u + \varphi),$$

где $\omega = \sqrt{1 + k^2}$ и a, b, φ постоянные, между которыми имеется соотношение, $\omega^2(a^2 + b^2) = 1$ показывающее, что вращение происходит под постоянным углом наклона вокруг оси, отклоняющейся от направления \mathbf{e}_1 (т.е. от направления \mathbf{H}).

Главный результат работы — установление того, что уравнения (4) *приблизительно* верны и тогда, если $k(u)$ меняется, при условии, что сама функция $k(u)$ и её производная $\frac{dk}{du} = k'$ малы по сравнению с 1, — исключая случай, когда между угловой скоростью прецессии и изменением силы магнитного поля наблюдается сильный резонанс. Из определения ясно, что величина $k(u)$ — если она мала — приблизительно выражает соотношение между поворотом поля и угловой скоростью прецессии. В силу этого в большинстве важнейших случаев $k(u) \ll 1$ или $k'(u) \ll 1$.

Для решения системы дифференциальных уравнений (3) использовался метод Н. М. Крылова—Н. Н. Боголюбова—Ю. А. Митропольского [1].

ROTATIONAL MOTION OF A FREE MAGNETIC DIPOLE IN A MAGNETIC FIELD SLOWLY VARYING IN TIME

by

A. BÉKÉSSY and L. JÁNOSSY

Abstract

The paper deals with the problem of rotational motion of a free magnetic dipole in a field varying slowly in time.

Let \mathbf{s} be the unit vector pointing into the direction of the dipole axis, the equation describing the motion of \mathbf{s} in non-relativistic approximation is then the following:

$$(1) \quad \dot{\mathbf{s}} = \frac{2\pi}{\hbar} \mu_B (\mathbf{s}(t) \times \mathbf{H}(t)),$$

where $\mathbf{H}(t)$ denotes the magnetic field strength and $\mu_B = \text{const}$. In a first approximation, the rotating dipole may be regarded as a classical model of an atom moving through an inhomogeneous magnetic field, in which case μ_B denotes the Bohr magneton, and $\mathbf{H}(t)$ is the average of the field strength in the close vicinity of the atom.

If the absolute value of \mathbf{H} varies with time, but its direction remains fixed, equation (1) is easily solvable. As it is well known, the dipole describes a precession cone round \mathbf{H} with varying angular frequency, the opening angle of the cone, however, remains strictly constant.

Even if the direction of \mathbf{H} varies, there is an important particular case, in which the solution may be exactly written down with the result that the cone of the precession turns round with the magnetic field, but with constant opening angle. Namely, let us introduce a system of coordinates determined by the unit vectors $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ defined as follows:

$$(2) \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\dot{\mathbf{h}}}{|\dot{\mathbf{h}}|}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2.$$

In the system (2) of coordinates the equations of motion derivable from (1) are

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{ds_1}{du} = k(u) \cdot s_2, \\ \frac{ds_2}{du} = s_3 - k(u) \cdot s_1, \\ \frac{ds_3}{du} = -s_2, \end{cases}$$

where $s_j = \mathbf{e}_j \mathbf{s}$, ($j = 1, 2, 3$), $k = \left| \frac{d\mathbf{h}}{du} \right|$, with

$$u = \int_0^t \left[\frac{2\pi}{\hbar} \mu_B |\mathbf{H}(t')| + \frac{\mathbf{h}(\dot{\mathbf{h}} \times \ddot{\mathbf{h}})}{\dot{\mathbf{h}}_2} \right] dt'$$

as a new independent variable. Now, if $k(u) = \text{const.}$, the solution of the system (3) is

$$(4) \quad \begin{cases} s_1 = -k \cdot a \cdot \cos \psi + b, \\ s_2 = a \omega \sin \psi', \\ s_3 = a \cos \psi + kb, \end{cases} \quad \psi = \omega u + \varphi$$

where $\omega = \sqrt{1 + k^2}$ and a, b, φ are constants with $\omega^2(a^2 + b^2) = 1$, showing that the precession takes place with a constant opening angle around an axis inclined to the direction of \mathbf{e}_1 (i.e. of $\mathbf{H}(t)$).

The main result of the paper is that the equations (4) are approximately valid even if $k(u)$ varies with u , supposed $k(u)$ itself and its derivative dk/du are small compared to 1, — except of cases of strong resonance between the angular velocity of the precession and the changes of the magnetic field. It is clear from the definitions that the quantity $k(u)$ — supposed to be small — expresses the rate of turning of the field to the angular velocity of precession, approximately. Therefore the conditions $k(u) \ll 1$ and $k'(u) \ll 1$ are fulfilled in most practical cases.

The mathematical methods used for analysing (3) were that of N. M. KRYLOV, N. BOGOLYUBOV and of YU. A. MITROPOLSKY, described e.g. in [1].

A SZMIRNOV-TÉTEL ALKALMAZÁSA EGY RAKTÁROZÁSI PROBLÉMÁRA

ZIERMANN MARGIT

Bevezetés

A termelő vállalatok zavartalan működéséhez szükséges minimális készletek mennyiségének a meghatározása fontos népgazdasági érdek. A gazdasági szakembereket, közgazdászokat és matematikusokat egyaránt foglalkoztatja az a probléma, hogy milyen *módszerrel* határozható meg a zavartalan termelést biztosító minimális raktárkészlet s ezzel kapcsolatban a minimális forgóeszköz szükséglet. A forgóeszköz szükséglet megállapításánál jelenleg alkalmazott számítási módszerek a termelés adott mértékben növekvő volumenéhez ugyanolyan mértékben növekvő forgóeszköz szükségletet engednek meg, illetve írnak elő (akkor is, ha a termelés belső összetétele és az anyagfelhasználási normák változatlanok).

Éppen ezért fordult az Országos Tervhivatal a Matematikai Kutató Intézethez az elmúlt év során azzal a kéréssel, hogy matematikai módszerekkel vizsgáljuk meg azt, hogy a termelés folyamatos anyagellátását biztosító készleteknek az a része, amely a (szállításban, termelésben, stb.) fellépő véletlen ingadozások okozta szükséglet fedezésére szolgál miképpen alakul akkor, ha a termelés nő.

A végzett munkáról tanulmány készült,¹ amelyben egyrészt a feltett kérdéssel kapcsolatos vizsgálatokról adtunk számot, másrészt olyan modelleket állítottunk fel, amelyek alkalmasak a *folyamatos termelést adott valószínűséggel biztosító legkisebb raktárkészlet mennyiségének a meghatározására*, feltéve, hogy egyedi normájú, folyamatos felhasználású és nem helyettesíthető anyagokról van szó.

Jelen cikk a tanulmány 4. §-ának az anyagát öleli fel. A tanulmányban foglalt további gondolatokat és eredményeket tartalmazza PRÉKOPA ANDRÁS sajtó alatt levő [4] cikke.

1. §. A matematikai modell felállítása és tárgyalása

A jelenlegi gyakorlatban sok esetben az a helyzet, hogy ha egy vállalat megrendel valamely K mennyiségű anyagot, akkor ezt a megrendelt mennyiséget egy előre meghatározott időtartamon (pl. negyedéven) belül kizárólag

¹ Tanulmány a folyamatos termelést biztosító legkisebb raktárkészlettel kapcsolatos egyes problémákról (a matematikai részt PRÉKOPA A. és ZIERMANN M., a közgazdasági részt BAGÓ F. és RIEB L. írták). Kézirat, 1962.

a megrendelést teljesítő vállalatától függő időpontokban és részletekben kapja meg. A megrendelést teljesítő vállalat tehát csupán arra kötelezi magát, hogy egy meghatározott időpontig a megrendelt K mennyiséget feltétlenül leszállítja, fenntartva magának az előszállítások jogát.

Ez esetben a megrendelő vállalathoz beérkező rész-szállítások mennyiségét s magukat a beérkezések időpontjait is valószínűségi változóknak tekinthetjük.

Ha a több évi tapasztalat azt mutatja, hogy a szóban forgó anyagból megrendelt K mennyiség a vizsgált időtartamon belül (pl. negyedévről negyedévre) *többnyire n alkalommal és nagyjából egyenlő részletekben* érkezik be (és nincs okunk annak feltételezésére, hogy a megrendelést teljesítő vállalat ettől a szokástól a jövőben eltér), akkor ezen utánpótlási rendszer leírására a következő matematikai modellt² tartjuk alkalmasnak:

Modell. Tekintsünk egy $[0, T]$ intervallumot, amelyre véletlenszerűen dobunk n pontot. Az n pont helyét a T hosszúságú szakaszon jelölje $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ($0 < \xi_i < T$, $i = 1, 2, \dots, n$). Ekkor a ξ_i valószínűségi változók — mint ismeretes — egymástól független, a $[0, T]$ -ben egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Rendezzük nagyság szerint növekvő sorrendbe a ξ_i értékeket, és jelölje ξ_k^* ($k = 1, 2, \dots, n$) e számsorozat k -adik elemét. A ξ_k^* valószínűségi változók reprezentálják a beérkezési időpontokat. Minden egyes ξ_k^* pontban ($0 < \xi_1^* < \xi_2^* < \dots < \xi_n^* < T$) a megrendelt mennyiség n -ed részével megnő a raktárkészlet.

A következőkben arra a kérdésre adunk feleletet, hogy valamely vizsgált időtartam kezdőpontjában a szóban forgó anyagból mekkora az a legkisebb raktárkészlet, az ún. *kiinduló készlet*, amely a modellben leírt utánpótlást tátelevezve fel, az *egész időtartam alatti folyamatos napi c intenzitású felhasználást* $1 - \varepsilon$ valószínűséggel biztosítani tudja.

Az ε ($0 < \varepsilon < 1$) kockázat értékeként a gyakorlatban csak igen kis értékek jöhetnek szóba, pl. $\varepsilon = 0,08; 0,05; 0,01$, é.i.t. ε értékének a megválasztása természetesen komoly mérlegelésen alapuló döntést kíván (pl. abban a tekintetben, hogy a népgazdaságnak jelentősebb megtakarítást okoz-e az, ha ε értékét növeljük, ami a kiinduló készletet csökkenti ugyan, de a termelés-kiesés lehetőségét növeli). A továbbiakban ε értékét adottnak tételezzük fel, azonban, mint látni fogjuk, az alkalmazott módszer mellett n elég nagy értéke biztosítani fogja ε kicsiny voltát.

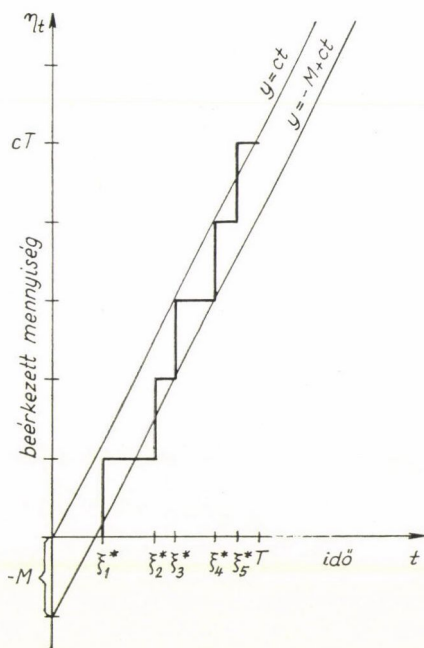
Jelöljük $[0, T]$ -vel a vizsgált időtartamot, M -mel a kiinduló készletet. Minthogy napi c intenzitású felhasználást tételeztünk fel, ezért cT a $[0, T]$ időtartam alatti összefelhasználás, tehát a 0 időpontot megelőzően $K = cT$ mennyiséget rendeltünk. Jelölje η_t a t időpontig összesen a raktárba érkezett anyag mennyiségét, és y_t a t időpontig összesen felhasznált (ill. a raktárból kivett) anyagot. A feltételezések értelmében $y_t = ct$.

Az alábbi ábra a modell szerint lejátszódó utánpótlás egy lehetséges realizációját ábrázolja az $n = 5$ esetben.

Az ábrán a vízszintes tengely jelenti az időtengelyt és ezen a $\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*, \xi_4^*, \xi_5^*$ pontok a beérkezési időpontokat, a függőleges tengelyen szerepel

² Azt az esetet, midőn az utánpótlás rendszerében nemcsak a beérkezési időpontok, hanem az egyes véletlen időpontokban beérkező mennyiségek is véletlen ingadozást mutatnak, tárgyalja PRÉKOFA András — a Bevezetésben említett — cikke.

η_t értéke. A ξ_1^*, \dots, ξ_5^* időpontok mindegyikében egyenlő mennyiség, $\frac{cT}{5}$ érkezik be. Ezekben az időpontokban tehát η_t értéke $\frac{cT}{5}$ -tel megnő. Ábránkon η_t alakulását a lépcsős függvény mutatja. Az $y = ct$ egyenes pontjai a t időpontig összesen felhasznált (ill. a raktárból kivett) anyag-mennyiséget ábrázolják — napi c egységnyi folyamatos felhasználást tételezve fel.



1. ábra.

Tegyük fel tehát, hogy a 0 időpontban M raktárkészletünk van. Valahányszor $y_t > \eta_t$, akkor az ezen t időpontot megelőző időszak egy részében biztosan fennakadás lenne a termelésben anyagihiány miatt, ilyenkor mindig az M raktárkészlethez nyúlunk. Nyilvánvaló tehát, hogy M -et úgy kell megválasztanunk, hogy az η_t lépcsős függvény M -értékével növelt ordinátái nagy valószínűséggel mindig az $y = ct$ egyenes pontjai felett (esetleg rajta) helyezkedjenek el, azaz előre adott valószínűséggel az

$$(1) \quad \eta_t + M \geq ct$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. A (1) egyenlőtlenséggel ekvivalens az

$$(2) \quad \eta_t \geq -M + ct,$$

illetve az

$$(3) \quad \eta_t - ct \geq -M$$

egyenlőtlenséggel. Az ábrán az $y = -M + ct$ egyenes látható.

Általában, ha az előre adott kockázat értéke ε , akkor a (3) egyenlőtlenség alapján M -et úgy kell megválasztanunk, hogy a ξ_1^*, \dots, ξ_n^* beérkezési időpontok minden lehetséges elhelyezkedésekor

$$(4) \quad \mathbf{P} \left\{ \inf_{0 < t < T} (\eta_t - ct) \geq -M \right\} \geq 1 - \varepsilon$$

legyen.

1. Tétel. Ha n elég nagy ($n > 20$), akkor a $[0, T]$ időtartam alatti napi állandó c felhasználást $1 - \varepsilon$ valószínűséggel biztosító kiinduló készlet

$$(5) \quad M \sim \frac{cT \sqrt{\log \frac{1}{\varepsilon}}}{\sqrt{2n}},$$

ahol $e^{-2n} \leq \varepsilon < 1$.

Bizonyítás. A (3) egyenlőtlenség mindkét oldalát cT -vel osztva, vezessük be az $x = \frac{t}{T}$, és az $u_x = \frac{\eta_t}{cT}$ jelöléseket. Ekkor (4) helyett a következő összefüggést kapjuk:

$$(6) \quad \mathbf{P} \left\{ \inf_{0 < x < 1} (u_x - x) \geq -\frac{M}{cT} \right\} \geq 1 - \varepsilon,$$

ahol u_x lehetséges értékei $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$. Minthogy a modell feltételezése szerint

a ξ_1, \dots, ξ_n valószínűségi változók egymástól független, egyenletes eloszlásúak

a $[0, T]$ intervallumban, tehát a $\zeta_i = \frac{\xi_i}{T}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) valószínűségi

változók is azok a $[0, 1]$ intervallumban. Ennek alapján a (6) összefüggésben szereplő u_x mennyiséget tekinthetjük a $[0, 1]$ -ben egyenletes eloszlású ζ_i valószínűségi változókból vett n elemű rendezett minta empirikus eloszlásfüggvényének, amelyet $F_n(x)$ -szel, míg x ennek a mintának az elméleti eloszlásfüggvénye, amelyet $F(x)$ -szel szokás jelölni.

Arra a megállapításra jutottunk tehát, hogy M -et az alábbi összefüggésből kell meghatároznunk:

$$(7) \quad \mathbf{P} \left\{ \inf_{0 < x < 1} (F_n(x) - F(x)) \geq -\frac{M}{cT} \right\} \geq 1 - \varepsilon.$$

N. SZMIRNOV [1] ismert tétele szerint azonban

$$(8) \quad P \left\{ \sqrt{n} \sup_x (F(x) - F_n(x)) < y \right\} \sim \begin{cases} 1 - e^{-2y^2} & \text{ha } y > 0 \\ 0 & \text{ha } y \leq 0. \end{cases}$$

A (7) valószínűségre alkalmazzuk a SZMIRNOV-tételt, ekkor

$$(9) \quad \begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \inf_{0 < x < 1} (F_n(x) - F(x)) \geq -\frac{M}{cT} \right\} = \\ & = \mathbf{P} \left\{ \sqrt{n} \sup_{0 < x < 1} (F(x) - F_n(x)) < \sqrt{n} \frac{M}{cT} \right\} \sim 1 - e^{-2 \frac{M^2 n}{c^2 T^2}}. \end{aligned}$$

Ha azt akarjuk, hogy M , a kiinduló raktárkészlet $1 - \varepsilon$ valószínűséggel fedezze a $[0, T]$ időszak alatti napi c felhasználást, akkor (7) és (9)-ből kifolyólag az alábbi egyenletnek kell fenállnia:

$$(10) \quad 1 - e^{-2 \frac{M^2 n}{c^2 T^2}} = 1 - \varepsilon.$$

Tekintettel arra, hogy $0 < \frac{M}{cT} < 1$, tehát csak olyan ε értékek jöhetnek szóba, amelyekre $e^{-2n} \leq \varepsilon < 1$. Ekkor a (9) egyenletet M -re megoldva, a tétel állításában szereplő M értéket kapjuk.

Az (5) aszimptotikus képlet M értékére annál jobb közelítést ad, minél nagyobb n , tehát minél több részletben szállítják le a megrendelt mennyiséget a vizsgált időtartam alatt. A gyakorlatban azonban többnyire $n = 4, 5$, é. i. t. M értéke meghatározására ekkor alkalmasabb az alábbi explicit formulát alkalmazni:

2. Tétel. Ha $0 < \frac{M}{cT} < 1$, akkor az adott ε értékhez tartozó kiinduló készlet:

M a következő összefüggésből határozható meg:

$$(11) \quad \varepsilon = \frac{M}{cT} \sum_{j=0}^{\left\lceil n \left(1 - \frac{M}{cT}\right) \right\rceil} \binom{n}{j} \left(1 - \frac{M}{cT} - \frac{j}{n}\right)^{n-j} \left(\frac{M}{cT} + \frac{j}{n}\right)^{j-1},$$

ahol $\left\lceil n \left(1 - \frac{M}{cT}\right) \right\rceil$ az $n \left(1 - \frac{M}{cT}\right)$ -ben foglalt legnagyobb egész számot jelenti.

Bizonyítás. SZMIRNOV [2], s tőle függetlenül BIRNBAUM és TINGEY [3] bebizonyították, hogy minden olyan n, ε és y értékre, amelyekre fennáll, hogy

$$(12) \quad \varepsilon = \mathbf{P}\left\{\sup_x (F_n(x) - F(x)) \geq y\right\},$$

ahol $F_n(x)$ az $F(x)$ eloszlásfüggvényű alapsokaságból vett n elemű minta empirikus eloszlásfüggvénye, igaz a következő összefüggés:

$$(13) \quad \varepsilon = y \sum_{j=0}^{\lceil n(1-y) \rceil} \binom{n}{j} \left(1 - y - \frac{j}{n}\right)^{n-j} \left(y + \frac{j}{n}\right)^{j-1},$$

ahol $\lceil n(1-y) \rceil$ az $n(1-y)$ -ban foglalt legnagyobb egész szám.

A (7) egyenlőtlenséget megfelelően átalakítva, az alábbi, vele ekvivalens egyenlőtlenségre jutunk:

$$(14) \quad \mathbf{P}\left\{\sup_{0 < x < 1} (F_n(x) - F(x)) < \frac{M}{cT}\right\} \geq 1 - \varepsilon,$$

ahol ε a (13) képletben szereplő kifejezéssel egyenlő, ha $y = \frac{M}{cT}$. Ezzel a bizonyítani kívánt összefüggésre jutottunk.

A csatolt táblázat³ $\varepsilon = 0,1; 0,05; 0,025; 0,01; 0,005$ értékeihez az $\frac{M}{cT}$ értékeket tartalmazza, $n = 1, 2, \dots, 40$ esetében.

Így pl. az $n = 5$ esetben, az $\varepsilon = 0,05$ kockázathoz tartozó $\frac{M}{cT}$ érték 0,50945, tehát

$$P\left\{\inf_{0 < x < 1} (F_5(x) - F(x)) \geq -0,50945\right\} = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Ebből az összefüggésből, a 2. Tétel alapján a következő megállapítást tehetjük:

Ha a $[0, T]$ időszakban 5 egyenlő (vagy közel egyenlő) részletben, de egyenletes eloszlásnak megfelelő véletlen időpontokban érkezik be a megrendelt mennyiség, akkor a 0 időpontban, tehát a vizsgált időszak kezdőnapján $0,50945 \cdot cT$ mennyiségnek, azaz az összfelhasználás 50,945%-ának raktáron kell lennie ahhoz, hogy a $[0, T]$ időtartam alatti napi c egységnyi folyamatos felhasználást 0,95 valószínűséggel biztosítani tudjuk. (Ha pl. $T = 90$ nap, akkor ez kb. 46 napi készletet jelent.)

Ha a közölt táblázatban szereplő értékeket egybevetjük a SZMIRNOV-táblázat (lásd pl. [3], pp. 595.) megfelelő értékeivel, akkor azt tapasztaljuk, hogy az aszimptotikus értékek nagyobbak az „egzakt” értékeknél, továbbá, hogy az eltérés $n = 20$ -tól kezdve már nem lényeges, $n = 50$ -tól kezdve pedig rendkívül kicsi.

Így a fenti példában, midőn $n = 5$, $\varepsilon = 0,05$ a SZMIRNOV-táblázatból $\frac{M}{cT} \sim 0,5473$, tehát $M \sim cT \cdot 0,5473$.

2. §. A rendelt mennyiség és a beérkezési időpontok számának hatása a kiinduló készletre

Az 1.§-ban tárgyalt modellt tételezve fel, vizsgáljuk meg, hogyan alakul M értéke abban az esetben, midőn a következő $[0, T]$ időtartam alatt a napi felhasználás intenzitása, tehát a megrendelt mennyiség is nagyobb. A SZMIRNOV-tétel alkalmazásával nyert (5) összefüggés szerint

$$M \sim \frac{cT \sqrt{\log \frac{1}{\varepsilon}}}{\sqrt{2n}}, \quad e^{-2n} \leq \varepsilon < 1.$$

Tegyük fel, hogy a napi felhasználás $c_1 = kc$ ($k > 1$), a megrendelt mennyiség tehát kcT , továbbá, hogy az utánpótlás a modellben adott feltételek szerint játszódik le, ismét n számú véletlen beérkezési időponttal. Ekkor, ha az $1 - \varepsilon$ biztonsághoz, továbbá az n, c értékekhez tartozó kiinduló készletet $M(n, c, \varepsilon)$ -nal jelöljük, akkor az új kiinduló készlet ugyanazon ε, n , de kc mennyiséghez tartozó értéke (5) szerint

$$k M(n, c, \varepsilon)$$

lesz. Ha tehát a beérkezési időpontok száma változatlan marad, megnövekedett

³ A táblázat értékeit Leslie A. MILLER számította ki, „Table of Percentage Points of Kolmogorov Statistics” című dolgozatában (*Journal of the American Statistical Association* 51 (1956), 111—121).

napi termeléshez — feltéve, hogy az ε kockázatot nem változtatjuk — ugyanolyan arányban megnövelt kiinduló készlet kell.

A gyakorlatban azonban a megrendelés mennyiségének a növekedése a beérkezési időpontok számának a növekedését vonja sok esetben maga után. Az (5) képletben c helyébe tegyünk kc -t ($k > 1$) és m helyébe zn -et ($z > 1$), akkor

$$(15) \quad M(zn, kc, \varepsilon) = \frac{k}{\sqrt{z}} M(n, c, \varepsilon) < kM(n, c, \varepsilon).$$

Ha tehát a beérkezési időpontok száma is megnő, akkor — változatlan ε kockázat mellett — a kiinduló készlet kisebb mértékben növekszik, mint a megrendelés mennyisége.

T Á B L Á Z A T

n	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.05$	$\varepsilon = 0.025$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.005$
1	.90000	.95000	.97500	.99000	.99500
2	.68377	.77639	.84189	.90000	.92929
3	.56481	.63604	.70760	.78456	.82900
4	.49265	.56522	.62394	.68887	.73424
5	.44698	.50945	.56328	.62718	.66853
6	.41037	.46799	.51926	.57741	.61661
7	.38148	.43607	.48342	.53844	.57581
8	.35831	.40962	.45427	.50654	.54179
9	.33910	.38746	.43001	.47960	.51332
10	.32260	.36866	.40925	.45662	.48893
11	.30829	.35242	.39122	.43670	.46770
12	.29577	.33815	.37543	.41918	.44905
13	.28470	.32549	.36143	.40362	.43247
14	.27481	.31417	.34890	.38970	.41762
15	.26588	.30397	.33760	.37713	.40420
16	.25778	.29472	.32733	.36571	.39201
17	.25039	.28627	.31796	.35528	.38086
18	.24360	.27851	.30936	.34569	.37062
19	.23735	.27136	.30143	.33685	.36117
20	.23156	.26473	.29408	.32866	.35241
21	.22617	.25858	.28724	.32104	.34427
22	.22115	.25283	.28087	.31394	.33666
23	.21645	.24746	.27490	.30728	.32954
24	.21205	.24242	.26931	.30104	.32286
25	.20790	.23768	.26404	.29516	.31657
26	.20399	.23320	.25907	.28962	.31064
27	.20030	.22898	.25438	.28438	.30502
28	.19680	.22497	.24993	.27942	.29971
29	.19348	.22117	.24571	.27471	.29466
30	.19032	.21756	.24170	.27023	.28987
31	.18732	.21412	.23788	.26596	.28530
32	.18445	.21085	.23424	.26189	.28094
33	.18171	.20771	.23076	.25801	.27677
34	.17909	.20472	.22743	.25429	.27279
35	.17659	.20185	.22425	.25073	.26897
36	.17418	.19910	.22119	.24732	.26532
37	.17188	.19646	.21826	.24404	.26180
38	.16966	.19392	.21544	.24089	.25843
39	.16753	.19148	.21273	.23786	.25518
40	.16547	.18913	.21012	.23494	.25205

Ugyanezt a törvényszerűséget tükrözi — természetesen — a csatolt táblázat is. Például $\varepsilon = 0,05$, $n = 7$ esetére a táblázat szerint $M = 0,43607 \cdot cT$. Ha a napi felhasználás 20%-kal megnő, a beérkezések száma pedig mindössze 2-szel, akkor a táblázat $\varepsilon = 0,05$, $n = 9$ -hez tartozó értéke 0,38746, tehát $M(9, 1,2c, 0,05) = 0,38746 \cdot 1,2 \cdot cT$. Az

$$\frac{M(9, 1,2c, 0,05)}{M(7, c, 0,05)} = \frac{0,38746 \cdot 1,2 \cdot cT}{0,43607 \cdot cT} \sim 1,07$$

arány mutatja, hogy míg a felhasználás napi intenzitása 20%-kal, addig a kiinduló raktárkészlet csupán 7%-kal nőtt.

Befejezésül köszönetemet fejezem ki ARATÓ MÁTYÁSNAK sok értékes megjegyzéséért.

(Beérkezett: 1963. július 29.)

IRODALOM

- [1] SMIRNOFF, N.: „Sur les écoules de la courbe de distribution empirique”. *Mat. Sbornik*, N. S. **6** (1939) 3—26.
- [2] СМІРНОВ, Н. В.: *Усп. Мат. Наук* **10** (1944) 179—206.
- [3] BIRNBAUM, Z. W.—TINGEY, F. H.: „One-sided confidence contours for probability functions.” *Annals of Mathematical Statistics* **22** (1951) 592—596.
- [4] ПРÉКОРА, А.: „Reliability equation for an inventory problem and its asymptotic solutions.” *Proceedings of the Colloquium on the Applications of Mathematics in Economics, Budapest, 1963 June 18—22*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1964.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ Н. В. СМІРНОВА К ЗАДАЧЕ О СКЛАДАХ

M. ZIERMANN

Резюме

В настоящее время в экономике часто встречается, что предприятие получает заказанное количество материала K не сразу, а в течение заранее определенного срока, однако то, в каких долях и в какие сроки получит его предприятие, не известно и зависит от завода, выполняющего заказ. В таком случае частные количества доставленного материала и время их прибытия можно рассматривать как случайные величины.

В первом параграфе работы рассматривается тот случай, когда заказанное количество K прибывает по равным частям n за время $[0, T]$ в случайные моменты, а интенсивность употребления на заводе является константой (c). Для описания такой системы пополнения имеется следующая модель: на отрезок $[0, T]$ сбрасываем n точек. Их упорядоченные места обозначаются величинами:

$$0 \leq \xi_1^* \leq \xi_2^* \leq \dots \leq \xi_n^* \leq T.$$

Эти точки будут обозначать время прибытия количества материала $\frac{cT}{n}$, где $cT = K$ количество использованного (а также заказанного) материала за время $[0, T]$.

Эта модель дает возможность определить с помощью теоремы Н. В. Смирнова то запасное количество M на складе, с помощью которого завод будет обеспечен материалом с вероятностью $(1 - \varepsilon)$ за период $[0, T]$. Получается, что

$$M \sim \frac{cT \sqrt{\log 1/\varepsilon}}{\sqrt{2n}}$$

при заданном риске ε ($e^{-2n} \leq \varepsilon < 1$), величина которого выбирается из экономических соображений.

Так как теорема Смирнова действует при $n \geq 20$, то для маленьких значений n величина M определяется по формуле (11). При данном n и ε по таблице можно определить $\frac{M}{cT}$.

Во втором параграфе рассматривается характер изменения M в зависимости от c , т. е. при увеличении заказа. В настоящее время при определении потребности оборотных средств, если объем производства растет, то в такой же степени должна расти потребность оборотных средств. Это не обязательно обосновано, потому что, как видно из выше приведенной формулы, M линейно растет с увеличением константы c , но от n зависит следующим образом: $M \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$, т. е. если $n_1 = zn$ ($z > 1$), а $c_1 = kc$ ($k > 1$), то $\frac{M_1}{M} \sim \frac{k}{\sqrt{z}}$.

Тот общий случай, когда отдельные полученные заказы также являются случайными величинами, рассматривается в работе (работа находится в печати) А. ФРÉКОРА [4].

ANWENDUNG DES SMIRNOW'SCHEN SATZES AUF EINEN LAGERHALTUNGSPROBLEM

von

M. ZIERMANN

Zusammenfassung

Im wirtschaftlichen Leben von heute kommt häufig der Fall vor, dass die Nachbestellmenge K von irgendeinem Material während einem gewissen Zeitabstand (sagen wir einem Vierteljahr) nur von dem Betrieb abhängig, der die Bestellung entgegengenommen hat, in den verschiedensten Zeitpunkten und Teillieferungen angeliefert kommt. Diese Teillieferungsmengen und ihre Zeitpunkte können als Zufallsvariable betrachtet werden.

Der § 1 des Artikels befasst sich mit einem Fall in dem das bestellte Material während irgendeinem Zeitabstand $[0, T]$ in n gleichgrossen Teilmengen aber in zufälligen Zeitpunkten angeliefert kommt, wobei die tägliche Verbrauchintensität c Konstant ist.

Zur Beschreibung dieses Lagererneuerungssystem dient das hier angeführte Modell:

Auf das Intervall $[0, T]$ werden n Punkten zufallsmässig geworfen. Die auf der Strecke $[0, T]$ nach Grössenordnung gerichtete Stellen der n Punkte sind $0 < \xi_1^* < \xi_2^* < \dots < \xi_n^* < T$. Es seien die ξ_i^* Zufallsvariable die stattgefundenen Teillieferungszeitpunkten. In jeden solchen Zeitpunkt kommt eine Materialmenge von $\frac{cT}{n}$ an, wo $cT = k$ die, vor dem Zeitpunkt 0 bestellt Menge

bedeutet, jene also, die während der Zeit von $[0, T]$ insgesamt verbraucht wird.

Das Modell gibt eine Möglichkeit mit Anwendung der SMIRNOW'schen Satzes zur asymptotischen Bestimmung jener kleinsten Vorratsmenge M (die

sogenannte Anfangsvorratsmenge) die in dem Zeitpunkt 0 vorhanden sein muss, wenn man den täglichen, ständigen Verbrauch c in dem Zeitintervall $[0, T]$ mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \varepsilon$ sichern will,

$$M \sim \frac{cT \sqrt{\log \frac{1}{\varepsilon}}}{\sqrt{2n}}, \quad e^{-2n} \leq \varepsilon < 1.$$

Der in der Formel angeführte und von verschiedenen wichtigen wirtschaftlichen Auswertungen abhängige Wert der Risiko ε , $0 < \varepsilon < 1$, wird hier als eine gegebene Grösse angenommen.

Da der asymptotische Wert für M nur bei $n > 20$ anwendbar ist, ist die Grösse der Anfangsvorratsmenge bei kleinen n Werten aus den Zusammenhang (11) zu berechnen. Bei angegebene ε und n kann man die $\frac{M}{cT}$ Werte aus der

beigefügten Tabelle ablesen.

Der § 2 beschäftigt sich mit der Frage, wie sich der Wert von M ändert, wenn der Tagesverbrauch c und somit die Bestellmenge cT zunimmt.

Bei der Feststellung des Richtsatzes erlauben die zur Zeit angewandten Berechnungsmethoden bei erhöhter Produktion von $\alpha\%$ eine $\alpha\%$ -ige Erhöhung auch des Richtsatzes. Das ist aber nicht unbedingt begründet. Wenn nämlich die Voraussetzungen des in § 2 besprochenen Modells erfüllt werden, und dabei die Teillieferungszeitpunkten von n auf zn ($z > 1$) anwachsen infolge des Zuwachses des Tagesverbrauches von c auf kc ($k > 1$), dann wird die neue Anfangsvorratsmenge, wie dies aus den Zusammenhang (15) leicht zu sehen ist kleiner sein als das k -fache der ursprünglichen — wenn ε das selbe bleibt.

Den allgemeineren Fall, in dem auch die Mengen der Teillieferungen Zufallsgrössen sind, behandelt sich das unter Druck stehende Werk [4] von A. PRÉKOPA.

SZAKASZOS DESZTILLÁCIÓ ÁTFUTÁSI ÖSSZIDEJÉNEK OPTIMALIZÁLÁSA

FRIVALDSZKY SÁNDOR¹

A jelen cikk a desztilláló készülék optimális működtetésével foglalkozik. Szakaszos desztilláció esetén kívánja a desztillációs átfutási összidőt minimalizálni. Tegyük fel, hogy a desztillálandó anyag háromkomponensű. A gyakorlatban a desztilláció a következőképpen történik szakaszos eljárás esetén: a technológiailag megengedett szintig töltött üstből először elpárologtatják a főtömegében az egyik komponenst tartalmazó „A”, majd a főtömegében a másik komponenst tartalmazó „B” anyagot, az ún. párlatokat, végül a főtömegében a harmadik komponenst tartalmazó „C” desztillációs maradék eltávolítása után vagy enélkül az üstöt újra a technológiailag megengedett előbbi szintig töltik, s újra desztillálnak stb. A lepárlásban az anyag fizikai sajátosságain kívül a lepárlási sebességet döntően meghatározza a párolgási felület és a hasznos (folyadékkal érintkező) fűtőfelület nagysága. Ezek általában az üstben levő anyag pillanatnyi szintjének függvényében változnak. Ebből azonnal következik, hogy az időegység alatt átdestillált anyag mennyisége függ az üstben levő anyag pillanatnyi szintmagasságától, és az utóbbi csökkenése többnyire maga után vonja az előbbi csökkenését is. Ezért általában a készüléket jobban ki lehet használni, ha csak az üst egy bizonyos szintmagasságáig hagyjuk elpárologni az anyagot, utána rátöltünk és egy szintig újra desztillálunk, stb.

Ezért, hogy ezt közelebbről megvizsgálhassuk, tegyük fel, hogy az üstbe a (kg) anyag fér be, amely meghatározott összetételű: $100\alpha\%$ „A” párlatot, $100\beta\%$ „B” párlatot és $100\gamma\%$ „C” desztillációs maradékot tartalmaz. ($\alpha + \beta + \gamma = 1$). Tegyük fel, hogy az anyag felmelegítéséhez, illetve az „A” párlat elpárologtatásához szükséges idő arányos az üstben levő anyagmennyiséggel, s a (kg) anyag feldolgozása esetén ez rendre u illetve v (óra). A szakaszos desztilláció megkezdése előtt a készülék előkészítéséhez z (óra) szükséges, továbbá egy rátöltés esetén (a készülék lehűtése, stb. miatt) w (óra) esik ki.

A „B” párlattal a megengedett szintig töltve az üstöt, legyen a „B” párlat elpárologtatási, mennyiség (kg)—idő (óra) függvénye $Q = f(\tau)$, amely a $(0; \tau_0)$ időintervallumban szigorúan monoton növekvően veszi fel a $(0; a(1 - \gamma))$ értékeket. A 0 időpont a párlat megjelenésének kezdetét jelöli. Az $f(\tau)$ függvény általában nem végig lineáris, mivel az anyag szintmagasságával együtt általában a párolgási felület és sokszor a fűtőfelület hasznosított része is csökken.

¹ Kőbányai Gyógyszerárugyár

tehát a függvény az első szakaszán a legmeredekebb — így ez a szakasz a legkedvezőbb a gyors desztillációra — utána a meredeksége fokozatosan csökken. Feltehető, hogy az $f(\tau)$ függvény a fenti intervallumban folytonos és differenciálható. Alakját a desztillációs berendezés határozza meg adott anyag esetén és lefutását általában kísérleti úton kell meghatározni.

Tegyük fel, hogy b (kg) anyagot akarunk m ütemben feldolgozni úgy, hogy a k -adik ($k = 1, \dots, m-1$) ütemben az „A” párlat teljes és a „B” párlat részleges elpárologtatásával összesen q_k (kg) anyagot desztillálunk ki az üstből, s ezután feltöltjük az üstöt a következő ütemre a megengedett szintig és csak az m -edik ütemben desztillálunk ki teljesen. A desztillálási program sémája:

Ütem száma:	Az „A” párlat mennyisége	Az elpárologtatott „B” párlat mennyisége	Összesen:	Rátöltés mennyisége:
1.	$a \alpha$	$q_1 - a \alpha$	q_1	q_1
2.	$q_1 \alpha$	$q_2 - q_1 \alpha$	q_2	q_2
3.	$q_2 \alpha$	$q_3 - q_2 \alpha$	q_3	q_3
.
.
.
($m-2$)	$q_{m-3} \alpha$	$q_{m-2} - q_{m-3} \alpha$	q_{m-2}	q_{m-2}
($m-1$)	$q_{m-2} \alpha$	$q_{m-1} - q_{m-2} \alpha$	q_{m-1}	r
m	$r \alpha$	s	$ar + s$	—

Természetesen az $(m-1)$ -edik ütemben csak a maradék r (kg) anyagot tudjuk betölteni, melyből $r \alpha$ (kg) „A” párlat és s (kg) „B” párlat keletkezik. Az r és s értéke könnyen számítható. Keresendő, hogy milyen m és q_k értékek mellett lesz a desztillációs összidő minimális ($m \geq 2$).

Feltehető, hogy a desztilláció folyamán kiváló „C” desztillációs maradék mennyisége minden időben az elpárologtatott anyagmennyiséggel arányos, akár az „A” párlatot, akár a „B” párlatot párologtatjuk el. Ekkor, ha mindig teljesen kidesztillálnánk, akkor a k -adik ($k = 1, 2, 3 \dots$) ütemben a $(1 - [1 - \gamma]^k)$ (kg) „C” desztillációs maradék maradna vissza, tehát az ütem végén legfeljebb $a(1 - \gamma)^k$ (kg) anyag volna betölthető. Így n ütemben összesen legfeljebb

$$C_n = \frac{a}{\gamma} (1 - [1 - \gamma]^n)$$

(kg) anyag volna feldolgozható. Ezért fel kell tenni, hogy

$$(1) \quad c_m \geq b,$$

ami megszorítást jelent m -re. Továbbá szükséges, hogy

$$(2) \quad 0 < r \leq q_{m-1}$$

legyen, végül, hogy a keletkezett „C” desztillációs maradék össz mennyisége

$$b\gamma \ll a$$

vagy

$$(3) \quad b\gamma < a\epsilon$$

legyen, ahol $0 < \varepsilon < 1$ technológiailag előírt szám. Ez utóbbi b nagyságára tesz megszorítást.

Az r és az s következőképpen számítható:

$$r + \sum_{k=1}^{m-2} q_k + a = b,$$

mert ez a feldolgozandó anyag összmenyisége. Bevezetve a

$$d_m = \sum_{k=1}^{m-2} q_k$$

jelölést

$$(4) \quad r = b - a - d_m$$

adódik. Továbbá a „B” párlat összmenyisége:

$$s + q_{m-1} + d_m - a - d_m a = b \beta$$

azaz

$$(5) \quad s = b \beta + a - (1 - a) d_m - q_{m-1}$$

Szükséges, hogy q_k ($k = 1, \dots, m-1$) értéke nagyobb legyen, mint a k -adik ütem esetén az üstben levő „A” párlat mennyisége és $a - q_k$ több, mint a k -adik ütem befejezéséig keletkezett „C” desztillációs maradék összmenyisége, azaz

$$(6) \quad q_{k-1} a < q_k < a - \frac{\gamma}{1 - \gamma} \sum_{j=1}^k q_j$$

vagy

$$(7) \quad q_{k-1} a < q_k < a(1 - \gamma) - \gamma \sum_{j=1}^{k-1} q_j$$

$$(k = 1, \dots, m-1)$$

ahol q_0 jelentése: $q_0 = a$. Ugyanis valamely e (kg) „A + B” párlat $e/(1 - \gamma)$ (kg) kezdeti anyagból („A + B + C” anyag) keletkezik. Továbbá szükséges, hogy

$$(8) \quad q_k > 0$$

$$(k = 1, \dots, m-1)$$

legyen; a (6) biztosítja, hogy $q_k \leq a$ teljesüljön. Az összes megadott feltételt az (2), (3), (7) és (8) adja.

Látszik, hogy az előkészítési, felmelegítési, az „A” és „B” párlatnál az átdesztillálási és a rátöltés miatt kiesett idők összege:

$$(9) \quad T(\mathbf{q}, m) = z + (m-1)w + \frac{u+v}{a}b + \sum_{k=1}^{m-1} \{f^{-1}(q_k) - f^{-1}(q_{k-1}a)\} +$$

$$+ \{f^{-1}(a - b\gamma) - f^{-1}(a - b\gamma - s)\}.$$

Rögzített m esetén, ha $T(\mathbf{q}, m)$ szélsőértéket vesz fel valamely $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{m-1})$ -re, akkor itt

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, m-1)$$

áll fenn. Speciálisan

$$\frac{\partial T}{\partial q_{m-1}} = \frac{d}{dx} f^{-1}(q_{m-1}) - \frac{d}{dx} f^{-1}(a - b\gamma - s) = 0$$

ahol d/dx az argumentum szerinti deriválást jelenti. Ha df^{-1}/dx szigorúan monoton — ami bekövetkezik, ha függvény alulról szigorúan konvex vagy konkáv — akkor ebből

$$q_{m-1} = a - b\gamma - s$$

vagy

$$(1 - \alpha) d_m = b(\beta + \gamma) + a(\alpha - 1)$$

$$d_m = b - a \quad (\alpha \neq 1)$$

következik, mivel $\beta + \gamma = 1 - \alpha$. Itt (5)-öt is felhasználtuk. A (4) szerint ekkor

$$r = 0$$

vagyis az $(m - 1)$ -edik ütemben nincs rátöltés, tehát az eljárás $(m - 1)$ ütemre redukálódik. Viszont ebből az is adódik, hogy az $(m - 2)$ -edik ütemben épp a megengedett szintig tölti fel az üstöt a maradék feldolgozandó anyag. Ha ténylegesen m ütemben dolgozzuk fel az anyagot, akkor az optimum esetén fennáll, hogy

$$r = q_{m-1}$$

vagy a (4) miatt

$$(10) \quad q_{m-1} = b - a - d_m.$$

A (10) mellett keressük T optimumát. A (10)-et (9)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$T(\bar{q}, m) = z + (m - 1)w + \frac{u + v}{a}b + \sum_{k=1}^{m-2} \{f^{-1}(q_k) - f^{-1}(q_k \alpha)\} + \\ + \{f^{-1}(b - a - d_m) - f^{-1}(a \alpha)\} + \{f^{-1}(a - b\gamma) - f^{-1}([b - a - d_m] \alpha)\}.$$

Az optimális $\bar{q} = (q_1, \dots, q_{m-2})$ -re

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{d}{dx} f^{-1}(q_k) - \alpha \frac{d}{dx} f^{-1}(q_k \alpha) - \frac{d}{dx} f^{-1}(b - a - d_m) + \\ + \alpha \frac{d}{dx} f^{-1}([b - a - d_m] \alpha) = 0 \quad (k = 1, \dots, m - 2)$$

adódik, vagy más alakban

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(q_k) - \alpha \frac{d}{dx} f^{-1}(q_k \alpha) = \frac{d}{dx} f^{-1}(b - a - d_m) - \alpha \frac{d}{dx} f^{-1}([b - a - d_m] \alpha).$$

$$(11) \quad (k = 1, \dots, m - 2)$$

Tegyük fel, hogy

$$(12) \quad \frac{d}{dx} f^{-1}(x) - \alpha \frac{d}{dx} f^{-1}(a x)$$

szigorúan monoton függvény. Ekkor, ha van megoldás, akkor csak egyetlen van, s ez

$$q_1 = q_2 = \dots = q_{m-2} = q$$

esetén lehetséges csak, mivel (11) jobboldala független k -tól. Hasonlóan adódik, hogy ekkor

$$q = b - a - d_m = b - a - (m - 2)q$$

vagy

$$(13) \quad q = \frac{b - a}{m - 1},$$

ami valóban kielégíti (11)-et. Ha a (12) alatti függvény monotonitása nem áll fenn, akkor is a (13) megoldást ad. A (10) szerint

$$(14) \quad q_{m-1} = b - a - \frac{b - a}{m - 1} (m - 2) = \frac{b - a}{m - 1}$$

szintén. Könnyen belátható, hogy ha a q -nak megfelelő abszcisszában $f(\tau)$ alulról (szigorúan) konkáv, akkor (13) és (14) lokális (szigorú) minimumot, ha alulról (szigorúan) konvex, akkor (szigorú) lokális maximumot ad. Hasonlóan, ha $f(\tau)$ a $(0; \tau_0)$ intervallumban alulról (szigorúan) konkáv, illetve konvex, akkor a (13) és a (14) rendre abszolút (szigorú) minimumot, illetve maximumot ad.

Ezért, ha $f(\tau)$ alulról (szigorúan) konkáv $(0; \tau_0)$ -ban, akkor (13) és (14) abszolút (szigorú) minimumot ad akkor is, ha a (12) alatti függvény szigorú monotonitása nem is áll fenn. Ekkor a minimum értéke:

$$(15) \quad T_m = T(\mathbf{q}, m) = z + (m - 1)w + \frac{u + v}{a}b + (m - 1) \left\{ f^{-1}\left(\frac{b - a}{m - 1}\right) - f^{-1}\left(\frac{b - a}{m - 1}a\right) \right\} + \{f^{-1}(a - b\gamma) - f^{-1}(a\alpha)\}.$$

Nézzük meg, hogy teljesülnek-e a mellékfeltételek. Feltehető, hogy $b > a$ különben a probléma fel sem merül. Ekkor

$$q_k > 0 \quad (k = 1, \dots, m - 1)$$

teljesül. A (7) szétbontható

$$a\alpha < q < a(1 - \gamma)$$

$$q\alpha < q < a(1 - \gamma) - \gamma(k - 1)q$$

alakban. Ez teljesül, ha

$$a\alpha < q < a(1 - \gamma) - \gamma(m - 2)q$$

vagy ha

$$a\alpha < \frac{b - a}{m - 1}$$

és

$$\frac{b - a}{m - 1} [1 + \gamma(m - 2)] < a(1 - \gamma)$$

is fennáll. Ezek átírhatók

$$(16) \quad m < \frac{b-a}{a} + 1$$

illetve

$$(17) \quad m > \frac{(b-a)(1-2\gamma) + a(1-\gamma)}{a-b\gamma}$$

alakban ($a > b\gamma$). Ezek jelentése a következő: ha (16) nem teljesül, akkor az első ütemek végén előbb töltenénk fel újra az üstöt, mielőtt az „A” párlat távozott volna. Ha pedig (17) nem áll fenn, akkor az utolsó ütemekre a „C” desztillációs maradék szintje túllépné a (13) és (14) által meghatározott optimális desztillációs szintet. Ezek az (1)-nek

$$(18) \quad m \geq \frac{{}^{10}\log\left(1 - \frac{\gamma b}{a}\right)}{{}^{10}\log(1 - \gamma)}$$

alakban átírt alakjával együtt adják a megszorításokat m -re. Az ezek által meghatározott m -ek közül az adja az optimális értéket, melyre a (15) minimális. A megfelelő q_k ($k = 1, \dots, m-1$) értékeket (13) és (14) szolgáltatja. A kiindulási feltétel pedig b -re a következő:

$$(19) \quad a < b < a\varepsilon/\gamma.$$

Bizonyos esetekben nem kell kiszámítani az összes T_m értékeket. Képezzük a következő kifejezést:

$$\begin{aligned} T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1} &= \frac{b-a}{m-1} \cdot \\ &\left\{ \left[\frac{f^{-1}\left(\frac{b-a}{m-2}\right) - f^{-1}\left(\frac{b-a}{m-1}\right)}{\frac{b-a}{m-2} - \frac{b-a}{m-1}} - \frac{f^{-1}\left(\frac{b-a}{m-1}\right) - f^{-1}\left(\frac{b-a}{m}\right)}{\frac{b-a}{m-1} - \frac{b-a}{m}} \right] - \right. \\ &\left. - \left[\frac{f^{-1}\left(\frac{b-a}{m-2}\right)a - f^{-1}\left(\frac{b-a}{m-1}\right)a}{\frac{b-a}{m-2} - \frac{b-a}{m-1}} - \frac{f^{-1}\left(\frac{b-a}{m-1}\right)a - f^{-1}\left(\frac{b-a}{m}\right)a}{\frac{b-a}{m-1} - \frac{b-a}{m}} \right] \right\} \\ &\quad (m > 2) \end{aligned}$$

Keresendő, hogy ez mikor pozitív.

$$T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1} \big|_{a=1} = 0.$$

$$T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1} \big|_{a=0} > 0,$$

ha az $f(\tau)$ függvény alulról szigorúan konkáv.

$$\frac{\partial(T_{m+1} - 2T_m + T_{m-1})}{\partial \alpha} = -(b-a) \left\{ \frac{d}{dx} f^{-1} \left(\frac{b-a}{m-2} \alpha \right) - \right. \\ \left. - 2 \frac{d}{dx} f^{-1} \left(\frac{b-a}{m-1} \alpha \right) + \frac{d}{dx} f^{-1} \left(\frac{b-a}{m} \alpha \right) \right\}.$$

Ha a df^{-1}/dx függvény alulról szigorúan konvex vagy konkáv, akkor a kapesos zárójelbeli kifejezés nem tűnik el $\alpha > 0$ esetén. Ekkor viszont a $0 \leq \alpha < 1$ intervallumban

$$(20) \quad \begin{aligned} T_{m+1} - 2T_m - T_{m-1} &> 0 \\ T_{m+1} - T_m &> T_m - T_{m-1}. \end{aligned} \quad (m > 2)$$

Ebben az esetben a megengedett T_m értékek közül a legkisebbik úgy helyezkedik el, hogy a T_m számok sorozata a minimumig monoton csökken, utána monoton növekszik. Legfeljebb egyetlen helyen lehetséges azonos értékű szomszédos T_m értékpár. A minimális T_m érték lehet a sorozat első vagy utolsó tagja is.

Ha (20) fennáll és a T_m számok az utolsó megengedett m -re veszik fel a minimumukat, akkor érdemes a q_k értékek bizonyos módosításával elérni, hogy (7) fennálljon a (16)-ot ki nem elégítő m -ekre és a megfelelő q_k értékekre is. Ebben az esetben lehetséges, hogy az így kapott T'_m értékek között lesz kisebb szám, mint a T_m számok minimuma. Legyen $n = n(m)$ egész szám, amelyre

$$\alpha \alpha^n < \frac{b-a}{m-1}$$

de

$$\alpha \alpha^{n-1} \geq \frac{b-a}{m-1}.$$

Ekkor legyen

$$\begin{aligned} q_k &= \alpha \alpha^k & (k = 1, \dots, n-1) \\ q_k &= \frac{b-a \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}}{m-n} & (k = n, \dots, m-1) \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve (9)-be kapjuk T'_m -et. Itt feltesszük, hogy $q_k > 0$ és (7) is teljesül.

Vizsgáljuk meg a most következő egyszerű esetet. Egyes speciális fűtésű üstöknél az elpárolgotatott „B” párlat mennyisége a desztillálás folyamán csak a párolgó felület és az eltelt idő nagyságától függ, s azokkal pedig lineárisan. Ez akkor áll fenn, ha a fűtőfelület kis része is már biztosítani tudja a párolgási felületen elpárolgotatható „B” párlat mennyiségéhez szükséges hőmennyiséget. Írja le a $g(x)$ függvény az üst kontúrgörbéjét, ahol az x tengely az üst szimmetriatengelye, (abszcisszán és ordinátán is 1 dm az egység), s legyen $g(x)$ a $(0; x_0)$ intervallumban kétszer differenciálható. Ekkor

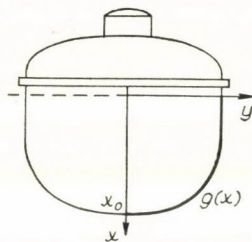
$$(21) \quad dQ = kF d\tau$$

ahol Q (kg) az elpárologatott anyagmennyiség, F (dm²) a párolgó felület nagysága és τ (óra) az idő. Hasonlóan

$$dQ = \delta F dx$$

ahol x a kezdőszinttől számított szintmagasság és σ (kg/dm³) a „B” párlat fajsúlya. Ekkor

$$\delta F dx = k F d\tau; \quad x = \frac{k}{\delta} \tau$$



1. ábra.

mert $\tau = 0$ -hoz $x = 0$ tartozik. Mivel

$$F = \pi g(x)^2$$

ezért a (21) szerint

$$dQ = k \pi g(x)^2 d\tau$$

vagy

$$dQ = k \pi g \left(\frac{k}{\delta} \tau \right)^2 d\tau$$

adódik. Innen azt kapjuk, hogy

$$Q = k \pi \int_0^{\tau} g \left(\frac{k}{\delta} \xi \right)^2 d\xi,$$

mivel $\tau = 0$ -hoz $Q = 0$ tartozik. Tehát

$$f(\tau) = k \pi \int_0^{\tau} g \left(\frac{k}{\delta} \xi \right)^2 d\xi.$$

Ekkor

$$\frac{df}{d\tau} = k \pi g \left(\frac{k}{\delta} \tau \right)^2$$

$$\frac{d^2f}{d\tau^2} = 2 \frac{k^2}{\delta} \pi g \left(\frac{k}{\delta} \tau \right) g' \left(\frac{k}{\delta} \tau \right)$$

$$\frac{d^3f}{d\tau^3} = 2 \frac{k^3}{\delta^2} \pi \left\{ g' \left(\frac{k}{\delta} \tau \right)^2 + g \left(\frac{k}{\delta} \tau \right) g'' \left(\frac{k}{\delta} \tau \right) \right\}$$

léteznek. $g(x) \neq 0$ miatt az f függvény szigorúan monoton növény, és alulról szigorúan konvex is, ha $g'(x) < 0$. Ez általában teljesül. A (20) teljesüléséhez elegendő, ha

$$\frac{d^3 f^{-1}}{dQ^3} > 0 \quad \text{vagy} \quad \frac{d^3 f^{-1}}{dQ^3} < 0;$$

átírva ezt f szerinti deriváltakra

$$\frac{3f''(\tau)^2}{f'(\tau)^5} - \frac{f'''(\tau)}{f'(\tau)^4} > 0 \quad \text{vagy} \quad \frac{3f''(\tau)^2}{f'(\tau)^5} - \frac{f'''(\tau)}{f'(\tau)^4} < 0$$

adódik. Ez a következő feltételt jelent $g(x)$ -re:

$$g''\left(\frac{k}{\delta}\tau\right) < \frac{5g'\left(\frac{k}{\delta}\tau\right)^2}{g\left(\frac{k}{\delta}\tau\right)} \quad \text{vagy} \quad g''\left(\frac{k}{\delta}\tau\right) > \frac{5g'\left(\frac{k}{\delta}\tau\right)^2}{g\left(\frac{k}{\delta}\tau\right)}.$$

Ha a g'' függvény folytonos, akkor elegendő feltenni, hogy

$$g''(x) \neq \frac{5g'(x)^2}{g(x)} \quad (0; x_0)\text{-ban.}$$

Azonban általában $g''(x) < 0$ is szokott teljesülni. Ebben az esetben a szükséges összes feltételek teljesülnek.

A gyakorlatban felmerül a probléma megfordítottja is: keresendő adott T (óra) idő alatt feldolgozható anyag maximális mennyisége.

A gyakorlatban feltehető, hogy T_m mint b függvénye szigorúan monoton növény, tehát a (15) összefüggés b -re invertálható. Ez azt jelenti, hogy nagyobb anyagmennyiség minimális átfutási ideje nagyobb. Látható, hogy (15) jobb oldalának minden tagja az utolsót kivéve b -ben szigorúan monoton növény, ezért a feltétel csak akkor nem áll fenn, ha az üst utolsó szakaszán való desztillálás igen hosszadalmas. Pontosabban, ha ez olyan hosszadalmas, hogy nagyobb anyagmennyiség feldolgozása esetén, amikor a felhalmozódott „C” desztillációs maradék mennyisége nagyobb, tehát az utolsó szakaszon való desztilláció lerövidül, a desztillációs minimalizált összidő nem növekszik. Az ilyen eset azonban vagy nem fordul elő vagy kikerülhető azzal, hogy az üst utolsó szakaszát desztillációra nem használjuk.

Ebben az esetben látható, hogy fix m esetén az optimális anyagmennyiséget (15)-nek b -re való invertálásával kapjuk meg. A megadott T -re, így a b_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) értékeket kapjuk. Ezek közül kiválasztjuk azokat, amelyekre (19) és amelyek m indexére (16), (17) és (18) fennáll, s a megfelelő b_m értékek közül választjuk ki a maximálisat.

(Beérkezett: 1963. augusztus 1.)

ОПТИМАЛИЗАЦИЯ ОБЩЕГО ВРЕМЕНИ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ФРАКЦИОННОЙ ДЕСТИЛЛЯЦИИ

S. FRIVALDSZKY

Резюме

Настоящая статья посвящена оптимализации дестилляции в химической промышленности. Если дестиллируемое вещество данного количества трех компонентное и если мгновенное дестилляционное время зависит от мгновенного уровня высоты вещества, то ищется при достижении какого уровня дестилляционной колонки надо снова наполнять перегонный куб, чтобы время дестилляции было минимальным.

Проблема решается как экстремальная задача.

ÜBER DIE OPTIMIERUNG DER DURCHLAUFZEIT DER STUFEN- WEISEN DESTILLATION

von

S. FRIVALDSZKY

Zusammenfassung

Vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Optimalisierung der chemischen Destillation. Besteht die zu destillierende Materie aus drei Komponenten und hängt die momentane Destillationszeit vom momentanen Niveau des Stoffes, so wird die Frage behandelt, bei welchem Niveau der zu destillierenden Materie muss das Gefäß neu aufgefüllt werden, damit die Gesamtzeit der Destillation minimal wird. Diese Frage wird als ein Extremalproblem behandelt und gelöst.

PÁCOLT HÚSOK FÉNY OKOZTA ELHALVÁNYODÁSI FOLYAMATÁNAK MATEMATIKAI VIZSGÁLATA I

FÉNYES TAMÁS, KÖRMENDY LÁSZLÓ¹ és ZUKÁL ENDRE¹

Bevezetés

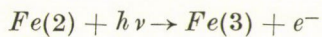
Pácolt húsok fénykozta elszíntelenedése ismert jelenség. A fogyasztóközönség megszokta a pácolt húskészítmények élénk rózsza színét, és a szín elhalványodását, elbarnulását minőségi hibának tekinti. Ez a hiba eléggé gyakori.

A vizsgálatok során kimutatták [1], hogy az elhalványodáskor a húsok piros színét adó nitrozomioglobin, illetve főtt húsoknál a nitrozomiokromogén bomlik el. A nitrozomioglobin, illetve a nitrozomiokromogén molekula színt adó magjában két vegyértékű vasatom van. Ezt a vasatomot a levegő oxigénje, vagy más — a húspan levő — oxidáló vegyület fény hatására 3 vegyértékűvé oxidálja. A 3 vegyértékű vasat tartalmazó színes vegyület — ametmio-globin ill. metmio-kromogén — már nem piros, hanem barna árnyalatú.

A fény okozta barnulási folyamat elleni védekezés leghatásosabb módja többek között a fény kizárása, a sötét csomagolás lenne. A vevő azonban látni akarja a készítményt, azért a csomagolást nem lehet úgy választani, hogy az önmagában is megakadályozza a barnulást, vagy — ami ugyanaz — a hús eredeti színének elhalványodását. Ezért különféle vegyszerekkel igyekeznek gátolni a fény hatását. A megfelelő szerv kiválasztásához, az egyes alkalmazott anyagok hatásában mutatkozó ellentmondások felderítéséhez ismerni kellene a fény okozta elszíntelenítés folyamatának lépéseit, a reakciómechanizmust. Erre pedig meglepően kevés az adat [2, 3].

Közleményünkben a feltételezhető legegyszerűbb reakciómechanizmusra épülő modellt mutatjuk be. A modell gyakorlati igazolása további laboratóriumi vizsgálatokat igényel.

Az alapvető reakció a következő:



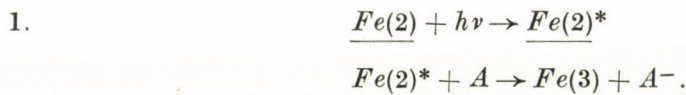
ahol $\text{Fe}(2)$ -vel a két vegyértékű vasat tartalmazó piros színező anyagot,
 $\text{Fe}(3)$ -al a 3 vegyértékű vasat tartalmazó halvány barna színező anyagot,
 e^- -vel a vasatom oxidálódásánál felszabaduló elektront jelöltük.
 $h\nu$ a fénykvantum.

A folyamathoz kell valamilyen elektronfelvevő anyag (pl. oxigén és víz) is. A továbbiakban ezt az anyagot A -val, az elektron felvétele után A^- -val fogjuk jelölni.

¹ Országos Húsipari Kutató Intézet.

Az irodalmi adatok [3] alapján a folyamat feltehetően fénykvantumok hatására megy végbe, legalábbis lényegesen gyorsul. A fénykvantumot a reakcióban résztvevő anyagok valamelyike elnyeli, gerjesztett állapotba jut és aktiválódik. Az aktivált anyagot a továbbiakban csillaggal fogjuk jelölni. A gerjesztett anyag atomja találkozik a másik reagáló partnerrel, és így jön létre az oxidációs reakció.

Az elmondott folyamatra 3 egyszerű eset lehetséges. Ezek a következők:



Ebben az esetben tehát a fénykvantum a hús színező anyagának vasatomját aktiválja, és az aktív vasatom reagál az elektronátvevő vegyülettel.

A reakció egyenleteknek megfelelő *reakció sebességi* egyenletek a következők:

$$\begin{aligned} \frac{d[\underline{Fe(2)^*}]}{dt} &= k_1[\underline{Fe(2)}] I \\ \frac{d[\underline{Fe(3)}]}{dt} &= k_2[\underline{Fe(2)^*}] [A] , \end{aligned}$$

ahol I a fény erőssége,

k_1, k_2 a koncentrációtól és fényerősségtől független reakció sebességi állandók,

t az idő

[]-el a zárójelben levő molekulafajták koncentrációját jelöltük.

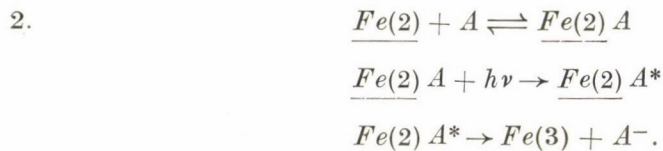
Az ilyen, két folyamatból összetett sebességi egyenletek a végtermékre nézve komplikált differenciálegyenletet adnak. Egyszerűsödik a megoldás, ha valamelyik reakció sebessége nagyon kicsi a másik reakció sebességéhez képest. Akkor ugyanis a reakció tekintélyes részében a lassú folyamat szabja meg az egész folyamat sebességét.

Feltételezhetjük, hogy

$$k_1 \ll k_2$$

akkor írható, hogy

$$\frac{d[\underline{Fe(3)}]}{dt} = k_1[\underline{Fe(2)}] I .$$



E szerint a feltevés szerint tehát először addíciós vegyület keletkezik, amelyik a kiinduló anyagokkal egyensúlyban van. Ezt a közbeeső vegyületet aktiválja a fény, és aktivált vegyület már úgy bomlik szét, hogy a végtermékek keletkeznek.

Az addíciós vegyület keletkezésére a tömeghatás törvénye érvényes:

$$\frac{[Fe(2) A]}{[Fe(2)] [A]} = K,$$

ahol K a reakció-egyensúlyi állandó.

A másik két reakció sebességi egyenlete a következő:

$$\frac{d[Fe(2) A^*]}{dt} = k_3 [Fe(2) A] I$$

$$\frac{d[Fe(3)]}{dt} = k_4 [Fe(2) A^*].$$

Az aktivált molekula szétbomlását gyorsnak tekinthetjük az aktiválási reakcióhoz képest, tehát írhatjuk, hogy:

$$\frac{d[Fe(3)]}{dt} = k_3 [Fe(2) A] I = k_3 K [Fe(2)] [A] I.$$

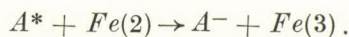
Az A mennyisége oly nagy (valószínűleg pótlódik), hogy annak koncentrációját állandónak tekinthetjük. Így az eredő reakció egyenletet a következőképp írhatjuk fel:

$$\frac{d[Fe(3)]}{dt} = k_5 [Fe(2)] I,$$

ahol

$$k_5 = k_3 K [A].$$

Az egyenlet formailag egyezik az első feltevésben nyert végső egyenlettel, csak a sebességi állandó jelentése más.



Ennél a feltevésnél az elektron-áttevő partnert aktiválja a fény, és az aktív partner reagál az izomfestékkel. A folyamatoknak megfelelő reakció sebességi egyenletek a következők:

$$\frac{d[A^*]}{dt} = k_6 [A] I$$

$$\frac{d[Fe(3)]}{dt} = k_7 [A^*] Fe(2).$$

Itt a kétlépcsős reakció nem egyszerűsíthető, mert ha feltételezzük, hogy:

$$k_6 \ll k_7$$

úgy a következő sebességi egyenletet nyerjük:

$$\frac{d[Fe(3)]}{dt} = k_8 [A] I = k_8 I,$$

ahol $k_8 = k_6 [A]$.

Ez azonban a tapasztalatnak ellentmond, mert az előzetes kísérletek szerint a reakció sebessége *függ* az izomfesték koncentrációjától.

A két részfolyamat együttes figyelembevételével adódó komplikált sebességi egyenlet taglalásától a közleményben eltekintünk.

A 3-as feltevést elvetjük, az első és második feltevésből pedig az alábbi azonos alakú reakció egyenlet adódik:

$$\frac{d[Fe(3)]}{dt} = k[Fe(2)] I.$$

Amennyi 3 vegyértékű vasat tartalmazó izomfesték keletkezik, annyi fogy el a két vegyértékű vasat tartalmazó izomfestékből. Írható tehát, hogy

$$\frac{d[Fe(3)]}{dt} = - \frac{d[Fe(2)]}{dt}.$$

Egyszerűsítés végett a $[Fe(2)]$ helyébe c -t írva, az egyenlet a következőképpen alakul:

$$\frac{dc}{dt} = -k c I.$$

A gyakorlati mérések számára az egyenletet újabb egyenlettel kell kiegészíteni. Ha ugyanis a kísérletet olyan vékony húsréteggel tudnánk elvégezni, amelyben az I állandó, úgy a reagáló anyagok töménységének időről-időre való meghatározásából a sebességi állandót meg lehetne mérni, illetve a feltételezett mechanizmust igazolni lehetne. Gyakorlatilag azonban mérhető mennyiségű izomfestéket csak olyan vastag rétegből nyerhetünk, amelyik átlátszatlan. A réteg vizsgálatával csak átlagos izomfesték koncentrációt tudunk mérni, több olyan réteget átlagolva, amelyben a fényerősség különböző. Ezért a fényintenzitásnak az egyes rétegekben való csökkenését is figyelembe kell venni.

A fényerősség változását a Lambert-törvény alapján adhatjuk meg:

$$\frac{dI}{dx} = -\beta I.$$

Feltételezhetjük, hogy:

$$\beta = \beta_1 + \gamma_1[Fe(2)] + \gamma_2[Fe(3)],$$

ahol I a fényerősség,

x a hely koordináta,

β a fényelnyelési együttható,

γ_1 a $Fe(2)$ tartalmazó izomfesték fajlagos fényelnyelési együtthatója,

γ_2 a $Fe(3)$ tartalmazó izomfesték fajlagos fényelnyelési együtthatója.

β_1 a többi anyag fényelnyelési együtthatója.

Az együtthatók a reakciót kiváltó hullámhosszon értendők. A fényelnyelési együtthatók három tagjának nagysága többnyire összemérhető. Speciális esetekben (nagyon világos hús színtelenedésének vizsgálatánál) a koncentrációtól függő tagok elhanyagolhatók, ha pedig pl. hígított vér színtelenedését vizsgáljuk, valamilyen színtelen kötőanyaggal gátolva a vér-

festék vándorlását, úgy elő tudjuk állítani azt a speciális határesetet, amikor a γ_1 mellett a másik két tagot lehet elhanyagolni.

A vastag rétegekben tehát az izomfesték koncentrációja helytől és az időtől függ, és elemezni csak az átlagos izomfesték töménységet tudjuk. Az átlagos töménység a következő:

$$\bar{c} = \frac{\int_0^l c dx}{l},$$

ahol l a vizsgált anyag rétegvastagsága.

A mérési eredményeknek a feltételezett reakció-mechanizmussal való egyeztetéséhez a $c(x, t)$ függvényt kell ismernünk. A függvényhez a következő differenciálegyenletrendszer megoldása juttat:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -kcI,$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -[\beta_1 + \gamma_1 c + \gamma_2(c_0 - c)]I.$$

Az előírt kezdeti feltétel és peremfeltétel a következő:

$$c(x, 0) = c_0,$$

$$I(0, t) = I_0.$$

1. §. A probléma megoldása

Az egyszerűbb írásmód kedvéért vezessük be az

$$(1) \quad a = \beta_1 + \gamma_2 c_0 \quad b = \gamma_1 - \gamma_2$$

állandókat, úgy a szóbanforgó parciális differenciálegyenletrendszer az alábbi alakot veszi fel:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} &= -kc(x, t)I(x, t), \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial x} &= -(a + bc(x, t))I(x, t). \end{aligned} \quad (0 \leq x < \infty; 0 \leq t < \infty)$$

Ehhez az alábbi kezdeti és peremfeltételt csatoljuk:

$$(3) \quad c(x, 0) = c_0, \quad I(0, t) = I_0.$$

Az alábbiakban meghatározzuk (2)-nek a (3) feltételeket kielégítő megoldását.

Fejezzük ki (2)-ből az $I(x, t)$ függvényt, úgy kapjuk, hogy

$$(4) \quad I = + \frac{1}{kc} \frac{\partial c}{\partial t}.$$

Vezessük be $c(x, t)$ helyére az

$$(5) \quad u = \log \frac{c_0}{c}$$

összefüggéssel definiált új függvényt, így (4) és (5) alapján

$$(6) \quad I = \frac{1}{k} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial I}{\partial x} = \frac{1}{k} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t}.$$

(6)-ot (2) második egyenletébe helyettesítve adódik, hogy

$$(7) \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} = -a \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - bc_0 e^{-u(x, t)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$

ahol figyelembevettük, hogy (5)-ből $C = C_0 e^{-u}$.

Integráljuk most (7) egyenletet t szerint, úgy kapjuk, hogy

$$(8) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + au(x, t) bc_0 e^{-u(x, t)} = f(x),$$

ahol $f(x)$ az x változó egyelőre tetszőleges folytonos függvénye.

(8) az $u(x, t)$ függvényre nézve már közönséges, nemlineáris differenciálegyenlet, amely a t változót mint paramétert tartalmazza.

(8) megoldását adott $f(x)$ esetén általában nem tudjuk zárt alakban felírni. Azonban, ha (8)-ba $t = 0$ értéket helyettesítünk és figyelembe vesszük, hogy (3) kezdeti feltétele és (5) alapján

$$u(x, 0) = \log \frac{c_0}{c(x, 0)} = \log \frac{c_0}{c_0} = \log 1 = 0,$$

és

$$e^{-u(x, 0)} = 1,$$

nyerjük, hogy

$$f(x) = -bc_0,$$

ami azt jelenti, hogy (8)-egyenlet az egyszerű, szeparálással megoldható

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + au - bc_0 e^{-u} + bc_0 = 0$$

differenciálegyenletre redukálódik. Az egyenlet megoldásához ismernünk kell $u(x, t)$ függvényt az $x = 0$ tengely mentén vagy ami ezzel ekvivalens, a $c(0, t)$ függvényt, más szóval kifejezve a $c(x, t)$ függvény peremen felvett értékeit.

Helyettesítünk (2) első egyenletébe $x = 0$ értéket, vegyük tekintetbe (3) feltételeket, úgy

$$\frac{\partial c(0, t)}{\partial t} = -kI_0 c(0, t),$$

amiből

$$c(0, t) = c_0 e^{-kI_0 t}$$

ami kémiaailag is plauzibilis. Továbbá

$$(10) \quad u(0, t) = \log \frac{c_0}{c(0, t)} = \log \frac{c_0}{c_0 e^{-kI_0 t}} = kI_0 t.$$

Ezekután (9)-et szeparálva (10) és (5) figyelembevételével adódik, hogy

$$(11) \quad \int_{\log \frac{c_0}{c(x, t)}}^{kI_0 t} \frac{du}{bc_0(1 - e^{-u}) + au} = x.$$

Ezzel megoldottuk (2) differenciálegyenletrendszer $c(x, t)$ -re. A kapott megoldás implicit alakú, belőle az ismeretlen $c(x, t)$ függvényt explicite nem lehet kifejezni, már csak azért sem, mert (11) zárt alakban nem integrálható. (11) integrált numerikus módszerekkel — esetleg elektronikus számológép igénybevételével — lehet kiértékelni és így egyszersmind explicit numerikus összefüggéseket a koncentráció eloszlására meghatározni.

Numerikus megoldásokkal e cikk keretében nem foglalkozunk. A dolgozat fő célja a folyamatot leíró leegyszerűsített matematikai modell megszerkesztése és a probléma matematikai megoldásának ismertetése. Sajnos a húsokra jellemző k , β_1 , γ_1 , γ_2 anyagi állandók számszerű értékei amúgysem ismeretesek, ami további nehézséget okoz (11) numerikus kiértékelése szempontjából. Az Országos Húsipari Kutatóintézet tervbevette, hogy laboratóriumi mérésekkel megállapítja a húsookban lezajló fényelnyelési folyamatokra jellemző β_1 , γ_1 , γ_2 állandók numerikus adatait. A k állandó az elszíntelenedés sebességére jellemző szám épp a kapott megoldás alapján határozandó meg, a laboratóriumi mérésekből nyert adatok figyelembevételével. A numerikus számítások előkészítése céljából célszerű (11)-et

$$(12) \quad \int_{\log \frac{c_0}{c(x, t)}}^{kI_0 t} \frac{du}{1 - e^{-u} + \varepsilon u} = bc_0 x$$

alakban írni, ahol

$$\varepsilon = \frac{a}{bc_0} = \frac{\beta_1 + \gamma_2 c_0}{(\gamma_1 - \gamma_2) c_0}.$$

Az I_0 , c_0 mennyiségek szintén laboratóriumi mérésekkel meghatározhatók. A $c(x, t)$ koncentrációt nem lehet mérni, hanem csupán egy $x = l$ vastagságú húsból levő átlagos koncentrációt, mint az idő függvényét:

$$(13) \quad \bar{c}(l, t) = \frac{\int_0^l c(x, t) dx}{l}.$$

Megmutatjuk, hogy az átlagos koncentrációra egy igen egyszerű összefüggés vezethető le. Ui. mivel

$$u = \log \frac{c_0}{c}, \quad c = c_0 e^{-u},$$

úgy (9)-et felhasználva egyszerű helyettesítéssel nyerjük, hogy

$$\bar{c}(l, t) = \frac{1}{l} \int_0^l c(x, t) dx = \frac{c_0}{l} \int_{\log \frac{c_0}{c(l, t)}}^{kI_0 t} \frac{e^{-u} du}{au + bc_0(1 - e^{-u})}.$$

A kapott kifejezést alakítsuk át a következőképpen

$$\bar{c}(l, t) = \frac{1}{bl} \int_{\log \frac{c_0}{c(l, t)}}^{kI_0 t} \frac{a + bc_0 e^{-u}}{au + bc_0(1 - e^{-u})} du - \frac{a}{bl} \int_{\log \frac{c_0}{c(l, t)}}^{kI_0 t} \frac{du}{au + bc_0(1 - e^{-u})}.$$

A kapott első integrál egyszerűen kiszámítható, a kapott második integrál pedig nem más, mint (11) összefüggés az $x = l$ helyen.

Így tehát

$$\begin{aligned} (14) \quad \bar{c}(l, t) &= \frac{1}{bl} \log [au + bc_0(1 - e^{-u})] \Big|_{u=\log \frac{c_0}{c(l, t)}}^{u=kI_0 t} - \frac{a}{b} = \\ &= \frac{1}{bl} \log \frac{ak I_0 t + bc_0(1 - e^{-kI_0 t})}{a \log \frac{c_0}{c(l, t)} + b[c_0 - c(l, t)]} - \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

(14) formula egyszerű összefüggést állapít meg az átlagos koncentráció és az $x = l$ helyen fellépő koncentráció között. (14) összefüggés nagy gyakorlati előnye, hogy az átlagos koncentráció számításához nincs szükség további numerikus integrálásra, elegendő hozzá az (11) integrál numerikus vizsgálatát az $x = l$ helyen elvégezni.

A mérési eredmények a $\bar{c}(l, t)$ átlagos koncentrációt adják meg. Amennyiben az elméletileg számított (14) átlagos koncentráció és a mért átlagos koncentráció összehasonlítása során sikerül a k mennyiségre — esetleg a többi anyagi állandóra is — olyan numerikus értéket találni, hogy az említett átlagos koncentrációk között kicsiny eltérés mutatkozik, úgy eredeti matematikai modellünket igazoltnak tekinthetjük. Az elméleti és a mért értékek közötti illeszkedés jószágát matematikai statisztikai módszerekkel kívánjuk értékelni. Ekkor a közölt vizsgálatok egyszersmind a reakciókinetikai szempontból igen fontos k állandó meghatározásához is segítséget nyújtanak. Amennyiben az utólagos mérések kiinduló modellünket nem támasztják alá, úgy az összetettebb modell matematikai vizsgálata is szükségessé válhat.

A húspanban fellépő fényerősséget a koncentráció ismeretében (4) kifejezés alapján numerikus differenciálás segítségével lehet kiszámolni. Megjegyezzük azonban, hogy húsipari szempontból a fényerősség ismeretének nincs különösebb jelentősége.

2. §. Speciális esetek vizsgálata

Mivel $\beta_1, \gamma_1, \gamma_2$ fényelnyelési együtthatók numerikus értékei nem ismertek, érdemes néhány speciális esettel külön foglalkozni.

I.

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0.$$

Ekkor (2) második egyenletében $a = \beta_1$, $b = 0$. Ez azt a kémiai lehetőséget fejezi ki, hogy a fény abszorbeálódása a koncentráció csökkenéstől függetlennek tekinthető. Ekkor (2) két közönséges differenciálegyenletté esik szét, melyeket egyszerűen megoldva (3) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$(16) \quad \begin{aligned} c(x, t) &= c_0 \exp[-kI_0 t e^{-\beta_1 x}], \\ I(x, t) &= I_0 e^{-\beta_1 x}. \end{aligned}$$

A fényerősség nyilvánvalóan az időtől független.

Számítsuk ki (13) alapján az l vastagságban fellépő átlagos koncentrációt is.

$$\bar{c}(l, t) = \frac{c_0}{l} \int_0^l \exp[-kI_0 t e^{-\beta_1 x}] dx.$$

Bevezetve a

$$v = -kI_0 t e^{-\beta_1 x}$$

helyettesítést, adódik, hogy

$$(17) \quad \int_0^l \exp[-kI_0 t e^{-\beta_1 x}] dx = -\frac{1}{\beta_1} \int_{-kI_0 t}^{-kI_0 t e^{-\beta_1 l}} \frac{e^v}{v} dv.$$

Hozzuk be az ún. exponenciális integrált:

$$\text{Ei}(y) = \int_{-\infty}^y \frac{e^z}{z} dz; \quad -\infty \leq y < 0,$$

akkor (17) jobboldala

$$(18) \quad -\frac{1}{\beta_1} [\text{Ei}(-kI_0 t e^{-\beta_1 l}) - \text{Ei}(-kI_0 t)]$$

alakban is írható, így az átlagos koncentráció

$$(19) \quad \bar{c}(l, t) = \frac{c_0}{\beta_1 l} [\text{Ei}(-kI_0 t) - \text{Ei}(-kI_0 t e^{-\beta_1 l})].$$

(19) formula praktikusán igen jól alkalmazható, tekintettel arra, hogy az exponenciális integrálra számos jól használható táblázat van.

Másik speciális esetként azt az esetet tárgyaljuk, mikor

$$\text{II.} \quad \beta_1 = \beta_2 = 0.$$

Ez azt a kémiai lehetőséget fejezi ki, hogy az anyag fényabszorpciója együtthatója arányos a mindenkor koncentrációval, vagyis a bevilágított anyag a fény hatására átlátszóvá válik. Ez természetesen húsoknál nem fordulhat elő, mert a húrok a rájuk eső fényt állandóan elnyelik már aránylag vékony rétegben. Mégis célszerűnek tartjuk II. eset részletes vizsgálatát, mert egyrészt ekkor egyszerű végső formulákra jutunk, másrészt pedig ez az eset a kémia, illetve biológia egyéb problémáiban fellép (lásd a Bevezetést).

Mivel most $a = 0$, $b = \gamma_1$ (11) integrál:

$$(20) \quad \frac{1}{\gamma_1 c_0} \int_{\log \frac{c_0}{c}}^{kI_0 t} \frac{du}{1 - e^{-u}} = x.$$

(20) integrál elemi függvények segítségével kifejezhető, integrálva lesz:

$$(21) \quad \begin{aligned} [u + \log(1 - e^{-u})] \Big|_{\log \frac{c_0}{c}}^{kI_0 t} &= kI_0 t - \log \frac{c_0}{c} + \log(1 - e^{-kI_0 t}) - \\ &- \log\left(1 - \frac{c}{c_0}\right) = kI_0 t + \log(1 - e^{-kI_0 t}) - \log\left(\frac{c_0}{c} - 1\right) = \gamma_1 c_0 x, \end{aligned}$$

amiből $c(x, t)$ rövid számolással:

$$(22) \quad c(x, t) = c_0 \frac{e^{\gamma_1 c_0 x}}{e^{\gamma_1 c_0 x} + e^{kI_0 t} - 1},$$

és (4) alapján a differenciálást elvégezve kapjuk, hogy

$$(23) \quad I(x, t) = I_0 \frac{e^{kI_0 t}}{e^{\gamma_1 c_0 x} + e^{kI_0 t} - 1}.$$

Az átlagos koncentráció

$$(24) \quad \begin{aligned} \bar{c}(l, t) &= \frac{c_0}{c} \int_0^l \frac{e^{\gamma_1 c_0 x}}{e^{\gamma_1 c_0 x} + e^{kI_0 t} - 1} dx = \frac{1}{l \gamma_1} \log(e^{\gamma_1 c_0 x} + e^{kI_0 t} - 1) \Big|_{x=0}^{x=l} = \\ &= \frac{1}{l \gamma_1} \log(e^{\gamma_1 c_0 l} + e^{kI_0 t} - 1) - \frac{kI_0 t}{l \gamma_1}. \end{aligned}$$

(Beérkezett: 1963. szeptember 4.)

IRODALOM

- [1] WATTS, B. M.: „Oxidative rancidity and discoloration in meat”. *Advances in Food Research* **5** (1954) 1—21.
- [2] WALSH, K. A.—ROSE D.: „Factors effecting the oxidation of nitricoxide myoglobin”. *Journal of Agriculture and Food Chemistry* **4** (1956) 35—38.
- [3] HORNSEY, H. C.: „The colour of cooked cured pork”. *Journal of the Science of Food and Agriculture* **8** (1957) 547—551.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБЕСЦВЕЧИВАНИЯ МАРИНОВАННОГО МЯСА ПОД ВЛИЯНИЕМ СВЕТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

T. FÉNYES, K. KÖRMENDY и E. ZUKÁL

Резюме

Данная работа содержит математическое исследование обесцвечивания мяса под влиянием света. Составленная математическая модель принимает во внимание абсорбцию световых лучей в мясе. В итоге получается система дифференциальных уравнений в частных производных и находится решение в неявной форме. В работе отсутствуют численные результаты, так как для указанных в работе видов мяса в настоящее время не известны абсорбционные константы. Только после определения последних становится возможным нахождение численных результатов и проверка математической модели на практике.

В конце работы обсуждаются некоторые частные вопросы.

Эти вычисления приводят к простым практически удобным формулам.

DIE UNTERSUCHUNG DES DURCH LICHT VERURSACHTEN VERBLASSUNGSVORGANGES BEI PÖKELFLEISCH

T. FÉNYES, L. KÖRMENDY und E. ZUKÁL

Zusammenfassung

Bei der Verblassung von Pökelfleisch wird das dem Pökelfleisch die lebhaft rote Farbe verleihende Nitrosomyoglobin, beziehungsweise bei gekochten Waren das Nitrosomyochromogen oxydiert. Als erster Schritt der Oxydation wird das in dem Molekül befindliche zweiwertige Eisenatom durch Lichteinwirkung in dreiwertiges oxydiert, falls im Fleisch eine Elektronen aufnehmende Substanz (z. B. Oxygen) vorhanden ist.

Die vereinfachte Gleichung der Reaktion ist:

$$\frac{dc}{dt} = -kcI$$

in der c die Konzentration der zweiwertigen Eisenatome enthaltenden Molekülen,

t die Zeit,

I die Lichtstärke und

k die Reaktionsgeschwindigkeitskonstante bedeutet.

Die Reaktion kann nur in begrenzt dicken Scheiben studiert werden, in denen I nicht konstant ist.

Angenommen, dass die Veränderung des I -s dem Lambertschen Gesetz folgt, so ist die Gleichung:

$$\frac{dI}{dx} = -\beta I$$

in der $\beta = \beta_1 + \gamma_1 c + \gamma_2 (c_0 - c)$
 x der in Richtung des Lichtes axial gemessene Koordinationswert,
 γ_1 der spezifische Lichtabsorptionskoeffizient der zweiwertiges
 Eisen enthaltenden Molekülen,
 γ_2 der spezifische Lichtabsorptionskoeffizient der dreiwertiges Eisen
 enthaltenden Molekülen,
 β_1 der Lichtabsorptionskoeffizient der anderen Substanzen,
 c_0 c im Zeitpunkt von $t = 0$ bedeutet.

Also hängt c und I so von t als auch von x ab.

Der Zusammenhang muss die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -kcI$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -[\beta_1 + \gamma_1 c + \gamma_2 (c_0 - c)] I$$

wie auch die Anfangsbedingung

$$c(x, 0) = c_0$$

und die Randbedingung

$$I(0, t) = I_0$$

befriedigen.

LINEÁRIS PROGRAMOZÁS TÖBB, EGYIDEJŰLEG ADOTT CÉLFÜGGVÉNY SZERINT

BOD PÉTER

Az elmúlt években számos közgazdasági vita zajlott le nálunk, amelyeken közgazdászok és matematikusok arról tárgyaltak, hogyan lehetne a matematikai programozást eredményesen a népgazdasági tervek optimális variánsainak felkutatására felhasználni. A tudományos irodalomból ismeretes, hogy hasonló viták széles körben zajlanak más országokban is. Kétségtelen, hogy a szóbanforgó problémakörön belül az egyik legvitatottabb és távolról sem megoldott kérdés a célfüggvény közgazdaságilag helyes megválasztása. E cikk szerzője úgy véli, hogy a népgazdasági tervezés matematikai megalkozásánál ritkán célravezető olyan modellek alkalmazása, amelyekben egyetlen célfüggvény szerepel. Indokoltnak látszik, hogy nagyobb figyelmet fordítsunk a több egyidejűleg adott célfüggvény alapján való optimalizálás kérdéseire.

Cikkünkben tájékoztatást adunk a probléma megoldásának bizonyos lehetőségeiről. Az I. pontban három — különböző közgazdasági feltevések mellett alkalmazható — modellt ismertetünk. A II. pontban összefoglalunk néhány ismert eredményt az ún. lineáris vektormaximum probléma megoldására. A III. pontban ezeket felhasználva megmutatjuk, hogyan általánosítható a lineáris programozás szimplex módszerének optimalitási kritériuma efficiencia kritériumokká.

A problémát az alábbi egyszerű példán keresztül érzékeltetjük. Tekintsünk egy nyílt, kétszektorú, külkereskedelmi kapcsolatokat nem tartalmazó lineáris népgazdasági modellt, amelynek a technológiai mátrixa:

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Tételezzük fel, hogy a brutto termelés túl nem léphető mértékét az egyes ágazatokban a

$$k = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

kapacitásvektor, míg a társadalom minimális szükségleteit a végső (fogyasztásra és felhalmozásra szolgáló) termékekből az

$$s_0 = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

vektor fejezi ki.

Jelölje ξ a brutto termelés és \mathbf{x} a végső felhasználás nem negatív vektorait, akkor érvényesek az alábbi összefüggések:

$$(E - A) \cdot \xi = \mathbf{x} \quad \text{illetve} \quad \xi = (E - A)^{-1} \mathbf{x}$$

Vagyis az elérhető végső felhasználást az alábbi feltételek korlátozzák¹:

$$(E - A)^{-1} \mathbf{x} \leq \mathbf{k}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{s}_0$$

Az e feltételek által meghatározott halmazból kell már most optimális programot választani és tegyük fel, hogy ezt a választást háromféle szempont szerint lehet értékelni:

1. a végső felhasználás volumene alapján,
2. a „belföldi árrendszer” alapján, amely szerint a kétféle termék áraránya 2 : 5 és végül
3. „nemzetközi árrendszer” alapján, amely szerint a kétféle termék áraránya 1 : 3.

Vagyis olyan programra van szükségünk, amely három egyidejűleg adott célfüggvény (mégpedig $y_1 = x_1 + x_2$; $y_2 = 2x_1 + 5x_2$ és $y_3 = x_1 + 3x_2$) szerint a „lehető legjobb”.

I.

A feladat általános megfogalmazása érdekében tekintsünk olyan lineáris döntési feladatokat, amelyeknél egyidejűleg több célfüggvény szerepel. A lehetséges megoldások halmaza ebben az esetben:

$$L = \{\mathbf{x} \mid A \mathbf{x} \leq \mathbf{b}; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Legyenek az egyes célfüggvények:

$$y_1 = \mathbf{c}_1^* \mathbf{x}$$

$$y_2 = \mathbf{c}_2^* \mathbf{x}$$

$$\vdots$$

$$y_k = \mathbf{c}_k^* \mathbf{x}$$

vagy tömören

$$\mathbf{y} = C \mathbf{x}.$$

Megállapodunk abban, hogy az egyes célfüggvények mindig nagyobb függvényértékkel fejezik ki a gazdaságilag előnyösebb következményt. Minden lehetséges döntés gazdasági következményét tehát egy R^k -ban fekvő vektor tükrözi. Így a lehetséges megoldások halmazához hozzárendelhetjük a következmények halmazát, amely

$$K = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = C \mathbf{x}; \mathbf{x} \in L\}.$$

¹ A cikkben vektorok közötti egyenlőtlenségek jelölésére háromféle szimbólumot használunk. $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ azt jelöli, hogy \mathbf{x} egyetlen komponense sem nagyobb \mathbf{y} megfelelő komponensénél. $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ esetén ezen felül van \mathbf{x} -nak legalább egy \mathbf{y} megfelelő komponensénél határozottan kisebb komponense. $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ azt jelenti, hogy \mathbf{x} minden komponense határozottan kisebb \mathbf{y} megfelelő komponensénél.

Ezek után azt kérdezzük, hogyan lehet ilyen körülmények között a gazdasági optimum fogalmát definiálni és a definíciónak megfelelő optimális programokat meghatározni.

Úgy gondoljuk, hogy három gazdaságilag reális lehetőséggel érdemes foglalkozni. Ezek a gazdasági preferencia szerkezetére vonatkozó feltételezésekben térnek el egymástól.

1. Feltehető, hogy létezik a célfüggvényeknek egy olyan fontossági sorrendje, amelynél bármilyen kis előny egy fontosabb célfüggvény szerint jelentősebb, mint akármilyen nagy hátrány valamely kevésbé fontos célfüggvény szerint. Ebben az esetben tulajdonképpen arról van szó, hogy a K halmazon közgazdasági szempontból elfogadhatóan meg lehet adni egy sajátos lexikografikus rendezést.

Amennyiben a preferencia ilyen szerkezetű: az alábbi módon járunk el. Legyen L_1 azon döntések halmaza, amelyekben a $y_1 = c_1^* x$ függvény felveszi maximumát L -ben. Ha L_1 egyetlen elemből áll, akkor egyetlen optimális programunk van. Legyen azonban $|L_1| > 1$. Akkor meghatározzuk azon pontok halmazát L_1 -ben, amelyekben $y_2 = c_2^* x$ felveszi maximumát (L_2 halmaz). Az eljárást folytatva halmazok egy sorozatát kapjuk

$$L_k \subset L_{k-1} \subset \dots \subset L_2 \subset L_1 \subset L.$$

Természetesen lehetséges, hogy valamely $j < k$ indexre már $|L_j| = 1$. Ebben az esetben

$$L_j = L_{j+1} = \dots = L_{k-1} = L_k.$$

Az optimális programok halmaza azonban mindenképpen:

$$L_0 = L_k.$$

2. Elképzelhető olyan helyzet, amelyben a K halmazon meg lehet adni egy skalárértékű vektor függvényt és ez a függvény helyesen kifejezi a lehetséges döntések összesített (valamilyen módon összegezett) gazdasági hatékonyságát. Ebben az esetben arról van szó, hogy kialakítható a lehetséges döntések megítélésében egy egységes preferencia. Legyen az említett függvény

$$z = \Phi(y) = \Phi[Cx].$$

Akkor az optimális programok halmaza:

$$L_0 = \{x \mid z = \Phi[Cx] \text{ maximális, } x \in L\}.$$

A halmaz elemeinek felkutatása nyilván lineáris feltételekkel korlátozott — de nem szükségképpen lineáris — függvény maximumának meghatározása révén lehetséges.

3. Az eddigi tapasztalatok alapján úgy tűnik, hogy az esetek többségében nem adható meg eleve sem az 1. pontban feltételezett sajátos jellegű fontossági sorrend a célfüggvények között, sem a 2. pontban jelzett és a különböző minőségű jellegű preferenciákat „közös nevezőre” hozó függvény. Vagyis a K halmazon nem található más rendezés, mint az a részleges rendezés, ame-

lyet természetes módon a megadott célfüggvények határoznak meg. Nyilvánvaló ugyanis, hogy ha \mathbf{x}_1 és \mathbf{x}_2 két lehetséges elhatározás és

$$\mathbf{y}_1 = C\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{y}_2 = C\mathbf{x}_2 \text{ akkor } \mathbf{x}_1 \text{ előnyösebb mint } \mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{y}_1 = C\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_2 = C\mathbf{x}_2 \text{ akkor } \mathbf{x}_1 \text{ egyformán előnyös mint } \mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{y}_1 = C\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{y}_2 = C\mathbf{x}_2 \text{ akkor } \mathbf{x}_1 \text{ kevésbé előnyös mint } \mathbf{x}_2.$$

Ezzel szemben, ha \mathbf{y}_1 egyes komponensei nagyobbak, mások viszont kisebbek, mint \mathbf{y}_2 megfelelő komponensei, akkor \mathbf{x}_1 és \mathbf{y}_2 hatékonysága közvetlenül nem hasonlítható össze. Az optimalizálási probléma pedig, amire jutottunk, az ún. vektormaximum probléma.

Ilyen körülmények között az optimalizálás csak az ún. efficiens programokra irányulhat. Ezt a fogalmat, mint ismeretes először PARETO vezette be a közgazdaságtudományba. A matematikai programozás elméletében mindenekelőtt KOOPMANS, CHARNES és COOPER alkalmazták jelentős eredménnyel (lásd: [3] és [4]).

A K halmazon \mathbf{y}_0 pontot efficiens pontnak nevezzük, ha minden $\mathbf{y} \in K$ -ra

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{y}_0 \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{y}_0.$$

Vagyis nincs olyan $\mathbf{y} \in K$ pont, amelynek lenne \mathbf{y}_0 -nál nagyobb komponense úgy, hogy egyetlen komponense sem kisebb \mathbf{y}_0 megfelelő komponensénél. Jelöljük az efficiens pontok halmazát K -ban K_e -vel.

Nyilvánvaló, hogy ha K felülről korlátos, akkor és csak akkor: $K_e \neq \emptyset$. Másrészt minden $\mathbf{y} \in \{K - K_e\}$ -hez található olyan $\mathbf{y}' \in K_e$, hogy $\mathbf{y}' \geq \mathbf{y}$. Ellenkező esetben \mathbf{y} is efficiens pont kellene, hogy legyen.

Ha $K_e \neq \emptyset$, akkor értelmezhető az efficiens következményű döntések — röviden efficiens döntések — halmaza:

$$L_e = \{\mathbf{x} \mid C\mathbf{x} = \mathbf{y}, \mathbf{y} \in K_e; \mathbf{x} \in L\}.$$

Az optimalizálás célja az L_e halmaz előállítás.

II.

Az L halmaz a gyakorlatban előforduló esetekben nem üres konvex poliéder. Ha feltesszük, hogy valamennyi célfüggvény korlátos az L halmazon, akkor K is korlátos és szintén nem üres poliéder R^k -ben. Azt is tudjuk, hogy extrémális pontjai az L halmaz extrémális pontjainak képpontjai között találhatók. Vagyis, ha L extrémális pontjai: $\mathbf{p}_1; \mathbf{p}_2; \dots \mathbf{p}_N$, akkor a $C\mathbf{p}_1; C\mathbf{p}_2; \dots C\mathbf{p}_N$ pontok közül kihagyva mindazokat, amelyek előállíthatók, mint a többi konvex lineáris kombinációja; megkapjuk a K poliéder extrémális pontjait.

A K halmaz extrémális pontjai közül azok lesznek efficiensek, amelyek e poliéder pozitív normálisú határoló hipersíkjain fekszenek. Azonos határoló hipersíkon fekvő efficiens extrémális pontok konvex lineáris kombinációi is efficiens pontokat eredményeznek. Vagyis K_e összefüggő — nem szükségképpen konvex, de konvex részek egyesítéséből álló halmaz. Ennek a halmaznak részletes előállításához a K halmaz extrémális pontjainak koordinátáira és határoló hipersíkjainak egyenleteire van szükség.

Fenti megfontolások alapján, amelyek a konvex poliéderek elméletének ismert tételeire (lásd: [5] 63—64. o.) támaszkodnak, elvben a következő út jelölhető ki az efficiens programok megtalálására:

1. Valamilyen erre alkalmas módszerrel megállapítjuk az L halmaz összes extrémális pontját. Ennek a feladatnak a megoldására számos eljárás ismeretes. Így többek között az ún. „teljes leírás” módszere, az UZAWA-féle algoritmus, BALINSKI eljárása stb. LIPTÁK TAMÁS bizonyos fokig egyszerűsítette UZAWA eljárását, amennyiben sikerült olyan algoritmust adnia, amely-nél nem kerül sor felesleges (tehát ténylegesen nem extrémális) pontok generálására. Az idén júniusban tartott „Matematika közgazdasági alkalmazásai” kollokviumon pedig KREKÓ BÉLA és GEORG WINTGEN mutattak be a fenti feladat megoldására eljárásokat. (Lásd: [1]; [7]; [8]; [9]; [10].)

2. Képezzük az L halmaz extrémális pontjainak képpontjait a C transzformációs mátrix segítségével és hagyjuk el az így nyert pontok közül azokat, amelyek előállíthatók a többi lineáris konvex kombinációjaként. Ezzel megkaptuk K extrémális pontjait.

3. A K halmaz extrémális pontjaiból megállapítjuk a poliéder határoló hipersíkjainak egyenleteit. Ennek a feladatnak a megoldására ugyancsak LIPTÁK TAMÁS dolgozott ki az elmúlt évben egy még nem publikált algoritmust.

4. Ezek után a K halmaz efficiens pontjainak meghatározásához már minden szükséges információval rendelkezünk. Maguknak az efficiens programoknak a megállapítása nem jelent külön nehézséget, hiszen a K halmaz efficiens csúcspontjainak ősei már a számítások 1. lépcsőjében meghatározásra kerültek.

A fentiekben vázolt eljárás teljes mértékben megvalósítható, de rendkívül számításigényes; mint minden olyan algoritmus, amely egy konvex poliéder összes csúcspontjaival explicite dolgozik. A mi feladatunk esetében az L halmaz összes extrémális pontja meghatározásának önmagában is rendkívül fáradságos munkájához járul még a K halmaz határoló hipersíkjainak felépítése extrémális pontjaiból.

Az ezzel a részfeladattal kapcsolatos számítási munkák terjedelmét mindenesetre valamelyest csökkenteni lehet azáltal, hogy kimutatható — miszerint a K_e halmaz elemeinek előállításához nincs szükség a teljes K halmazra; elég annak egy részhalmazával foglalkozni. Legyen ugyanis a K halmaz extrémális pontjainak halmaza:

$$Q = \{q_1; q_2; \dots q_M\}.$$

Válasszuk ki ebből a halmazból azokat a pontokat, amelyeknél nincs „nagyobb” magában a halmazban, vagyis válasszuk ki a Q halmaz efficiens pontjait. Legyen ezen pontok halmaza:

$$\hat{Q} = \{q_{i_1}; q_{i_2}; \dots q_{i_r}\}.$$

Ez annyit jelent, hogy a $\bar{Q} = \{Q - \hat{Q}\}$ halmaz minden eleménél van „nagyobb” a \hat{Q} halmazban.

Bebizonyítjuk a következő lemmát:

A K halmaz egyetlen olyan pontja sem lehet efficiens, amelynek előállításában a \bar{Q} halmazhoz tartozó extrémális pont pozitív súllyal szerepel.

Legyen ugyanis

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^M \mu_i \mathbf{q}_i; \quad \sum_{i=1}^M \mu_i = 1 \quad 0 \leq \mu_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, M)$$

a K halmaz egy tetszőleges pontja és tegyük fel, hogy

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{q}_{j_v} \in \bar{Q} \\ \mu_{j_v} \neq 0 \end{array} \right\} (v=1, 2, \dots, l)$$

Válasszunk ki a \hat{Q} halmazból olyan elemeket, amelyek rendre „nagyobbak” \mathbf{q}_{j_v} ($v = 1, 2, \dots, l$)-nél és képezzünk a fenti kombinációs súlyokkal új pontot: \mathbf{y}' , amelynél a \mathbf{q}_{j_v} vektorokat rendre a náluk „nagyobb” \mathbf{q}_{i_v} vektorokkal cseréljük fel. Az így nyert pontra nyilvánvalóan

$$\mathbf{y}' \in K \quad \text{és} \quad \mathbf{y}' \geq \mathbf{y}.$$

Vagyis \mathbf{y} nem efficiens.

Fenti lemma alapján elég a \hat{Q} halmaz pontjai által generált ún. redukált következményhalmaz határoló hipersíkjaait előállítani. Ezeken megtaláljuk a K halmaz összes efficiens pontját. Azonban még ilyen számítási munkacsökkentés mellett sem lehetséges a ma rendelkezésünkre álló számítástechnikai lehetőségek keretei között a vázolt módon akár csak közepes méretű feladatot is gyakorlatilag használható időn belül megoldanunk. Ezért olyan módszer alkalmazására kell törekednünk, amely nem teszi szükségessé az összes extrémális pont meghatározását. Ilyen módszer a szimplex eljárás.

A szimplex módszert fel lehet használni efficiens programok meghatározására. Ennek a lehetőségét az alábbi két tétel biztosítja. A tételek eredetileg CHARNESTől és COOPERTől származnak, akik 1957-ben a lineáris termelési modellek efficiens termelési lehetőségeinek problémáját vizsgálták. Eredményeiket könnyen átfogalmazhatjuk az általunk vizsgált problémára. (Lásd: [3] 82. o. és részletesebben [4] I. 299—313.)

Efficiens következményű program megtalálását biztosítja az alábbi

I. tétel. Ha \mathbf{x}_0 optimális megoldása a

$$\mathbf{p}_0^* C \mathbf{x} \rightarrow \max!$$

$$A \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

lineáris programozási feladatnak, amelyben \mathbf{p}_0^* tetszőleges pozitív vektor, akkor $\mathbf{y}_0 = C \mathbf{x}_0$ efficiens pont K -ban.

Tegyük fel fentiekkel ellentétesen, hogy

$$\mathbf{y}' = C \mathbf{x}' \geq \mathbf{y}_0 \quad \text{és} \quad \mathbf{x}' \in L$$

Akkor

$$C \mathbf{x}' \geq \mathbf{y}_0 \Rightarrow \mathbf{p}_0^* C \mathbf{x}' > \mathbf{p}_0^* C \mathbf{x}_0$$

vagyis \mathbf{x}_0 nem lenne optimális megoldása a fenti feladatnak, szemben a feltételezésünkkel. Tehát $\mathbf{y}' \geq \mathbf{y}_0$ nem állhat fenn, vagyis $\mathbf{y}_0 \in K_e$.

Tetszőleges lehetséges program efficiens vagy nem efficiens voltának eldöntésére alkalmas a következő

II. tétel. \mathbf{x}_0 efficiens következményű program akkor és csak akkor, ha a $\mathbf{e}^* \mathbf{y} \rightarrow \max'$, ahol $\mathbf{e}^* = [1, 1, \dots, 1]$

$$A \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$C \mathbf{x} - \mathbf{y} = C \mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

lineáris programozási feladatban

$$\max (\mathbf{e}^* \mathbf{y}) = 0.$$

A feltétel szükséges: legyen \mathbf{x}_0 efficiens következményű, akkor

$$C \mathbf{x}' \geq C \mathbf{x}_0 \Rightarrow C \mathbf{x}' = C \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{e}^* \mathbf{y} \equiv 0.$$

A feltétel elégséges: legyen $\max(\mathbf{e}^* \mathbf{y}) = 0$ és $C \mathbf{x}' \geq C \mathbf{x}_0$. Vagyis léteznek olyan komponensek, amelyekre

$$(C \mathbf{x}')_i > (C \mathbf{x}_0)_i.$$

Tehát \mathbf{y} -nak kell, hogy legyenek pozitív komponensei is és így

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}; \mathbf{e}^* > \mathbf{0}^* \Rightarrow \mathbf{e}^* \mathbf{y} > 0,$$

szemben a feltevésünkkel.

Tekintsük a fenti (II. tételbeli) feladat duálisát

$$\mathbf{u}^* \mathbf{b} + \mathbf{v}^* C \mathbf{x}_0 \rightarrow \min!$$

$$\mathbf{u}^* A + \mathbf{v}^* C \geq \mathbf{0}^*$$

$$-\mathbf{v}^* \geq \mathbf{e}^*$$

$$\mathbf{u}^* \geq \mathbf{0}^*.$$

II. tétel alapján, ha \mathbf{x}_0 efficiens következményű program, akkor $(\mathbf{x}_0; \mathbf{y}_0 = C \mathbf{x}_0)$ optimális megoldása a primál feladatnak és

$$\max (\mathbf{e}^* \mathbf{y}) = 0.$$

Ekkor viszont a duál feladatnak is van optimális megoldása:

$$(\mathbf{u}_0^*; \mathbf{v}_0^*)$$

\mathbf{v}^* -ről tudjuk, hogy

$$-\mathbf{v}^* \geq \mathbf{e}^* > \mathbf{0}^*.$$

Jelölje

$$\mathbf{p}^* = -\mathbf{v}^*.$$

Másrészt

$$\mathbf{u}^* A \geq -\mathbf{v}^* C = \mathbf{p}^* C$$

és a dualitás tétel miatt

$$\min (\mathbf{u}^* \mathbf{b} + \mathbf{v}^* C \mathbf{x}_0) = \min (\mathbf{u}^* \mathbf{b} - \mathbf{p}^* C \mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_0^* \mathbf{b} - \mathbf{p}_0^* C \mathbf{x}_0 = 0.$$

Innen

$$\mathbf{u}_0^* \mathbf{b} = \mathbf{p}_0^* C \mathbf{x}_0.$$

Rögzített \mathbf{p}_0^* mellett ezt úgy értelmezhetjük, hogy \mathbf{x}_0 és \mathbf{u}_0^* primál, illetve duál optimuma a

$$\begin{array}{ll} A \mathbf{x} \leq \mathbf{b} & \mathbf{u}^* A \geq \mathbf{p}_0^* C \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \mathbf{u}^* \geq \mathbf{0}^* \\ \mathbf{p}_0^* C \mathbf{x} \rightarrow \max! & \mathbf{u}^* \mathbf{b} \rightarrow \min! \end{array}$$

feladatpárnak. Ez megmutatja, hogy adott $\mathbf{p}_0^* > \mathbf{0}^*$ mellett a

$$\mathbf{p}_0^* C \mathbf{x} \rightarrow \max!$$

$$A \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

feladat optimális megoldása efficiens következményű és megfordítva, minden efficiens következményű programhoz van olyan $\mathbf{p}_0^* > \mathbf{0}^*$ vektor, hogy \mathbf{x}_0 optimális megoldás a $\mathbf{p}_0^* C \mathbf{x}$ célfüggvény tekintetében.

III.

Fenti tételeket a simplex módszer nálunk szokványos (lásd: [7] 228—234 o.) számítási eljárásában az alábbiak szerint alkalmazhatjuk:

Induljunk ki a következő táblából

	\mathbf{x}^*	
\mathbf{u}	A	\mathbf{b}
	C	$\mathbf{0}$

és particionáljuk úgy, hogy a bal felső blokkban egy reguláris kvadratikus blokkot nyerjünk.

	\mathbf{x}_1^*	\mathbf{x}_2^*	
\mathbf{u}_1	A_{11}	A_{21}	\mathbf{b}_1
\mathbf{u}_2	A_{21}	A_{22}	\mathbf{b}_2
	C_1	C_2	

Ha A_{11}^{-1} létezik, át lehet térni egy olyan bázisra, amelyben \mathbf{u}_1 helyében \mathbf{x}_1 áll.

	\mathbf{u}_1^*	\mathbf{x}_2^*	
\mathbf{x}_1	$-A_{11}^{-1}$	$A_{11}^{-1} A_{12}$	$A_{11}^{-1} \mathbf{b}_1$
\mathbf{u}_2	$-A_{21} A_{11}^{-1}$	$A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$	$\mathbf{b}_2 - A_{21} A_{11}^{-1} \mathbf{b}_1$
	$-C_1 A_{11}^{-1}$	$C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}$	$-C_1 A_{11}^{-1} \mathbf{b}_1$

Tegyük fel, hogy a transzformáció eredményeként lehetséges megoldást kapunk, vagyis

$$A_{11}^{-1} \mathbf{b}_1 \geq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{b}_2 - A_{21} A_{11}^{-1} \mathbf{b}_1 \geq \mathbf{0},$$

és így

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in L.$$

E program következményvektora:

$$\mathbf{y}_0 = C_1 A_{11}^{-1} \mathbf{b}_1 \in K.$$

Tételezzük végül még fel, hogy $-C_1 A^{-1} \leq \mathbf{0}$, vagyis

$$C_1 A_{11}^{-1} \geq \mathbf{0}.$$

Ezek után bebizonyítjuk a következő megállapításokat:

1. Ha $C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12} \leq \mathbf{0}$, akkor K_e egyetlen pontból áll:

$$K_e = \{\mathbf{y}_0\}.$$

Legyen ugyanis $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \end{bmatrix} \in L$ és $\mathbf{y}' = C\mathbf{x}' = C_1 \mathbf{x}'_1 + C_2 \mathbf{x}'_2$. Mivel $\mathbf{x}'_2 \geq \mathbf{0}$ és $C_2 \leq C_1 A_{11}^{-1} A_{12}$, ezért

$$\mathbf{y}' = C_1 \mathbf{x}'_1 + C_2 \mathbf{x}'_2 \leq C_1 \mathbf{x}'_1 + C_1 A_{11}^{-1} A_{12} \mathbf{x}'_2 = \underbrace{C_1 A_{11}^{-1}}_{\geq \mathbf{0}} (\underbrace{A_{11} \mathbf{x}'_1 + A_{12} \mathbf{x}'_2}_{\leq \mathbf{b}_1})$$

és így

$$\mathbf{y}' \leq C_1 A_{11}^{-1} \mathbf{b}_1 = \mathbf{y}_0.$$

2. Ha a $\mathbf{p}^*[C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}] \leq \mathbf{0}^*$ egyenlőtlenségrendszernek van pozitív megoldásvektora, akkor

$$\mathbf{y}_0 \in K_e.$$

Legyen

$$\mathbf{p}_0^*[C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}] \leq \mathbf{0}^* \quad \text{és} \quad \mathbf{p}_0^* > \mathbf{0}^*.$$

Ebben az esetben \mathbf{x}_0 optimális megoldása a

$$\mathbf{p}_0^* C \mathbf{x} \rightarrow \max!$$

$$A \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

lineáris programozási feladatnak. A megfelelő optimális megoldást mutató tábla ugyanis

	\mathbf{u}_1^*	\mathbf{x}_2^*	
\mathbf{x}_1	A_{11}^{-1}	$A_{11}^{-1} A_{12}$	$A_{11}^{-1} \mathbf{b}_1$
\mathbf{u}_2	$-A_{21} A_{11}^{-1}$	$A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$	$\mathbf{b}_2 - A_{21} A_{11}^{-1} \mathbf{b}_1$
	$\frac{-\mathbf{p}_0^* C_1 A_{11}^{-1} \quad \mathbf{p}_0^*[C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}]}{\leq \mathbf{0}^*}$		$-\mathbf{p}_0^* C_1 A_{11}^{-1} \mathbf{b}_1$

$A p^*[C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}] \leq 0^*$ egyenlőtlenségrendszernek nyilvánvalóan nem lehet pozitív megoldása, ha a mátrixnak van félpozitív oszlopvektora és biztosan van pozitív megoldása, ha van legalább egy félnegatív sorvektora.

3. Ha az $[C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}]$ mátrixban van félpozitív oszlopvektor (olyan nem negatív vektor, amelynek legalább egy pozitív komponense van) és felette található pozitív generáló elem, akkor egy elemi transzformációval olyan

$$x^1 \in L$$

programhoz jutunk, melyre

$$y^1 = C x^1 \geq y_0.$$

$$\text{Legyen} \quad c_j = \begin{bmatrix} c_1^j \\ c_2^j \\ \vdots \\ c_k^j \end{bmatrix} \geq 0 \text{ a } [C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}] \quad \text{mátrix}$$

j -ik oszlopvektora. Kerüljön be x_j a bázisba $\delta > 0$ mértékű tevékenységként; akkor

$$C x^1 = C x_0 + \delta c_j \geq C x_0.$$

4. Ha a $p_0^*[C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}]$ nem pozitív vektornak van olyan zérus komponense, amely felett létezik pozitív generáló elem, akkor egy elemi transzformációval olyan $x' \in L$ programhoz jutunk, amely alternatív optimuma a 2. pontban jelzett lineáris programozási feladatnak, tehát

$$y' = C x' \in K_e.$$

5. Az alternatív optimumokra való áttérés lehetőségét kimerítve: p_0^* valamelyik elemét megváltoztatva áttérünk olyan p_1^* vektorra, hogy a

$$p_1^*[C_2 - C_1 A_{11}^{-1} A_{12}]$$

vektornak legyen legalább egy pozitív eleme. Ez lehetővé teszi olyan újabb bázismegoldás, vagy bázismegoldások felkutatását, amelyek optimális megoldásai a

$$p_1^* C x \rightarrow \max !$$

$$A x \leq b$$

$$x \geq 0$$

feladatnak, tehát újabb efficiens következményű programokat szolgáltatnak.

A fentiekben kritériumot nyertünk efficiens bázisprogramok előállítására és adott efficiens bázisprogramból további ugyancsak efficiens bázisprogramra való áttérésre. Gyakorlatilag adott feladatok esetében ezek olyan döntéseket jelentenek, amelyekkel kapcsolatban a gazdasági hatékonyság valamelyik elemének fokozása feltétlenül a hatékonyság más elemeinek rovására valósítható csak meg. Ezek a programok ebben az értelemben optimálisak. Természetes, hogy általában nem várható az hogy K_e egyetlen elemből álljon. Ahhoz, hogy az összes efficiens bázisprogramot lépésről lépésre előállíthassuk, szükség van olyan nyilvántartó eljárásra, amely számon tartja, hogy a lehetséges megoldások halmazának mely szóbajöhető extrémális pontjait jártuk

már be. Ilyen nyilvántartó eljárást kell alkalmazni olyankor is, amikor egy közönséges lineáris programozási feladatnál igen sok alternatív optimális csúcspont adódik. Gyakorlatilag bevált erre a célra az ugyancsak CHARNES és COOPER által kidolgozott ún. „labirintus eljárás” (lásd [2] 69—70 o.). Ha már most nemcsak az efficiens extrémális pontokra, hanem az összes efficiens programra kíváncsiak vagyunk, figyelembe kell venni, hogy itt eltérés van az efficiens csúcspontok elhelyezkedése és az alternatív optimális csúcspontok elhelyezkedése között a közönséges lineáris programozásnál. Míg ugyanis ez utóbbi problémánál az alternatív optimális extrémális pontok minden konvex lineáris kombinációja maga is optimális programot ad, addig az efficiens csúcspontok konvex lineáris kombinációi vezethetnek belső pontokhoz is. Ezek konvex lineáris kombinációja akkor és csak akkor efficiens, ha a kombinációban pozitív súllyal szereplő efficiens csúcspontok azonos határoló hipersíkon fekszenek.

Illusztrációként megoldjuk a cikk elején vázolt példát. Mivel a feltételekben szereplő inverz mátrix:

$$(E - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,3 \\ -0,2 & 0,6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & 5/4 \\ 5/6 & 25/12 \end{bmatrix},$$

ezért a feltételek:

$$5/2 x_1 + 5/4 x_2 \leq 200$$

$$5/6 x_1 + 25/12 x_2 \leq 200$$

$$x_1 \geq 50$$

$$x_2 \geq 20$$

Kisebbsz átalakítások után az alábbi kiinduló táblázatot írhatjuk fel:

	x_1	x_2	v_1	v_2	
u_1	10	5	0	0	800
u_2	10	25	0	0	1200
$^x u_3$	1	0	-1	0	50
$^x u_4$	0	2	0	-1	20
	1	1	0	0	0
	2	5	0	0	0
	1	3	0	0	0

Mivel az együtthatómátrix bekeretezett része reguláris, áttérhetünk olyan új bázisra, amelyben a csillaggal jelölt duális változók szerepét x_1 és x_2 foglalják el. A transzformáció révén — elhagyva a felesleges oszlopokat — a következő táblát nyerjük, amelyben a feladatnak már egy lehetséges megoldása áll:

	v_1	v_2	
u_1	10	5	200
u_2	10	<u>25</u>	200
x_1	-1	0	50
x_2	0	-1	20
	1	1	-70
	2	5	-200
	1	3	-110

Itt $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \end{bmatrix} \in L$ és a program következményeit a $\mathbf{y}^1 = \begin{bmatrix} 70 \\ 200 \\ 110 \end{bmatrix}$ vektor tük-

rözi. Mivel a tábla alsó felében levő mátrix minden oszlopa pozitív vektorokból áll, bármelyik tevékenységet bevonhatjuk a bázisba és ezáltal \mathbf{x}^1 -nél minden tekintetben előnyösebb programhoz jutunk.

	v_1	u_2	
u_1	<u>8</u>	$-1/5$	160
v_2	$2/5$	$1/25$	8
x_1	-1	0	50
x_2	$2/5$	$1/25$	28
	$3/5$	$-1/25$	-78
	0	$-5/25$	-240
	$1/5$	$3/25$	-134

Az új program $\mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} 50 \\ 28 \end{bmatrix} \in L$ és következménye

$$\mathbf{y}^2 = \begin{bmatrix} 78 \\ 240 \\ 134 \end{bmatrix} > \mathbf{y}^1.$$

Lássuk be, hogy \mathbf{x}^2 efficiens program, hiszen a

$$\mathbf{p}^* \begin{bmatrix} 2/5 & -1/25 \\ 0 & -5/25 \\ -1/5 & -3/25 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}^*$$

egyenlőtlenségrendszernek van pozitív megoldása, pl.

$$\mathbf{p}_0^* = [1, 1, 3].$$

Mivel a $[1, 1, 3]$ $\begin{bmatrix} 3/5 & -1/25 \\ 0 & -5/25 \\ -1/5 & -3/25 \end{bmatrix} = [0, -3/5]$ vektornak az első komponense zérus, v_1 bevonható a bázisba és ezáltal új efficiens bázisprogramot kapunk.

	u_1	u_2	
v_1	$1/8$	$-1/40$	20
v_2	$-1/20$	$1/20$	0
x_1	$1/8$	$-1/40$	70
x_2	$-1/20$	$3/100$	20
	$-3/40$	$-1/40$	-90
	0	$-5/25$	-240
	$1/40$	$-1/8$	-130

Az új program: $\mathbf{x}^3 = \begin{bmatrix} 70 \\ 20 \end{bmatrix}$; következményvektora:

$$\mathbf{y}^3 = \begin{bmatrix} 90 \\ 240 \\ 130 \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy \mathbf{y}^2 és \mathbf{y}^3 nem hasonlíthatók össze. Viszont \mathbf{x}^3 efficiens, hiszen a

$$\mathbf{p}^* \begin{bmatrix} -3/40 & -1/40 \\ 0 & -5/25 \\ -1/40 & -1/8 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}^*$$

egyenlőtlenségrendszernek van pozitív megoldásvektora.

Több efficiens bázismegoldás nem található, de minden

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^2 + (1 - \lambda) \mathbf{x}^3 \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

program efficiens.

(Beérkezett: 1963. szeptember 6.)

IRODALOM

- [1] BALINSKI, M. L.: „An Algorithm for Finding All Vertices of Convex Polyhedral Sets.” *Journ. of the Soc. for Ind. and Appl. Math.* **9** (1961) 72—88.
- [2] CHARNES, A.—COOPER, W.—HENDERSON, R.: *An Introduction to Linear Programming*. John Wiley, New York, 1953.
- [3] CHARNES, A.—COOPER, W.: „Management Models and Industrial Applications of Linear Programming.” *Management Science* **4** (1957) 38—92.
- [4] CHARNES, A.—COOPER, W.: *Management Models and Industrial Application of Linear Programming*. John Wiley, New York, 1961. I—II.

- [5] KOOPMANS, T. C.: *Activity Analysis of Production and Allocation*. John Wiley, New York. 1961.
- [6] KREKÓ BÉLA: *Lineáris programozás*. Közgazdasági és Jogi Kiadó, Budapest. 1962.
- [7] KREKÓ BÉLA: „Über einige neue Untersuchungen in der Theorie der mathematischen Optimierung.” A „*Matematika Közgazdasági Alkalmazásai Kollokvium*” (Budapest, 1963) kiadványkötete, s. a.
- [8] LIPTÁK TAMÁS: „Szukcesszív módszer lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldására. — Alkalmazások lineáris és nem-lineáris programozásban”. (Kéziratban) Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai Központ, 1961.
- [9] UZAWA, S.: „An Elementary Method for Linear Programming.” Megjelent az ARROW—HURWICZ—UZAWA: *Studies in Linear and Non-Linear Programming* című kötetben. Stanford University Press. 1958.
- [10] WINTGEN, G.: „Über den Zusammenhang der Uzawamethode der linearen Optimierung mit der Methode der vollständigen Beschreibung von Motzkin, Raiffa, Thompson und Thrall.” A „*Matematika Közgazdasági Alkalmazásai Kollokvium*” (Budapest, 1963) kiadványkötete, s. a.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ ОДНОВРЕМЕННО ЗАДАННЫХ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

P. BOD

Резюме

Исследуются такие экономические проблемы, возможные следствия решений которых необходимо оценивать с различных точек зрения. Так эффективность всех допустимых в рамках ограничивающих условий решений измеряется векторами (конечной размерности в силу нашего предположения).

В случае программ с линейным решением к множеству возможных решений

$$L = \{ \mathbf{x} \mid A \mathbf{x} \leq \mathbf{b}; \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}$$

относится множество следствий

$$K = \left\{ \mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \begin{pmatrix} C_1^* \mathbf{x} \\ C_2^* \mathbf{x} \\ \vdots \\ C_k^* \mathbf{x} \end{pmatrix} = C \mathbf{x}; \quad \mathbf{x} \in L \right\}.$$

Для того, чтобы выяснить сущность оптимальных решений, появляется необходимость в упорядочивании множества K . Для этого имеются следующие возможности:

1. Можно задать такой порядок важности целевых функций, что любое маленькое преимущество более важной, чем остальные, целевой функции считается сильнее, чем какой бы то ни было недостаток всех менее важных целевых функций.

Множество оптимальных программ можно определять методами линейного программирования.

2. На множестве K можно задать такую вектор-скалярную функцию, которая выражает общую эффективность возможных программ.

Определение всех оптимальных программ приводит к вычислению максимума функции (не обязательно линейной) при определенных линейных условиях.

3. На множестве K возможны только частичные упорядочивания посредством отдельных целевых функций.

В этом случае программирование сводится к отысканию так называемых эффективных программ.

Для определения эффективных программ можно дать простой метод, основанный на нескольких свойствах эффективных точек множества следствий. Однако этот метод требует больших вычислений в виду того, что при расчетах употребляются все максимальные точки множества решений и большинство максимальных точек множества следствий.

Проблему эффективных уровней производства линейных производственных моделей изучали в 1957 г. SNARLES и COOPER. Их результаты можно применить к рассматриваемой здесь проблеме. В следствие этого в нашем распоряжении имеются две теоремы, с помощью которых можно определять программы с эффективными следствиями или о любой возможной программе можно сказать, эффективна она или нет.

Обычный критерий оптимальности симплексного метода можно обобщить в критерий, определяющий эффективные программы.

ÜBER LINEARE OPTIMIERUNG GEMÄSS SIMULTAN GEGEBENEN ZIELFUNKTIONEN

von

P. BOD

Zusammenfassung

Wir untersuchen solche lineare wirtschaftliche Entscheidungsprobleme, in denen man den Erfolg der zulässlichen Lösungen aus mehreren Gesichtspunkten bewerten muss. So wird der ökonomische Wirkungseffekt der einzelnen zulässlichen Programme durch Vektoren endlicher Dimension gemessen.

Im Falle linearer Entscheidungsprobleme gehört zu der Menge der zulässlichen Lösungen

$$L = \{x \mid Ax \leq b; \quad x \geq 0\}$$

eine Menge
der Konsequenzen:

$$K = \left\{ y \mid y = \begin{bmatrix} C_1^* x \\ C_2^* x \\ \vdots \\ C_k^* x \end{bmatrix} = C x; \quad x \in L \right\}.$$

Um optimale Entscheidungen deuten zu können, muss ein aus ökonomischem Standpunkt gerechtfertigtes Ordnen auf der Menge K definiert werden können: Es bieten sich die folgenden Möglichkeiten:

1. Es kann eine Wichtigkeitsreihenfolge der Zielfunktionen so angegeben werden, dass ein noch so geringer Vorteil nach einer wichtigeren Zielfunktion starker sei, als jeder Nachteil nach dem weniger wichtigen Zielfunktionen.

Die Menge der optimalen Lösungen kann mittels einer zweckmässig geführten linearen Optimierung erhalten werden.

2. Es gibt eine Skalar-Vektor-Funktion auf der Menge K , die den Gesamtnutzeffekt der zulässlichen Lösungen ausdrückt.

Um das Optimum zu finden, muss man den Maximum einer durch linearen Ungleichungen beschränkten, jedoch nicht notwendig linearen Funktion bestimmen.

3. Auf der Menge K besteht nur das durch die verschiedenen Zielfunktionen bestimmte Partialordnen.

Die Optimierung kann sich in diesem Falle nur auf die Herstellung der sogenannten effizienten Programme richten.

Auf Grund einiger einfachen Eigenschaften der effizienten Punkte der Konsequenzmenge kann ein naheliegendes Verfahren zur Herstellung effizienter Programme angedeutet werden. Das Verfahren ist stark rechnungsanspruchsvoll, da es sämtliche Extrempunkte der Menge L und fast sämtliche Extrempunkte der Menge K tatsächlich benutzt.

CHARNES und COOPER untersuchten im Jahre 1957 das Problem der effizienten Nettoproduktionsmöglichkeit in den linearen Produktionsmodellen. Ihre Ergebnisse kann man auf das hier untersuchte Problem umformulieren. Man erhält so zwei Sätze, mit denen man Programme effizienten Erfolges herstellen kann, und über alle zulässliche Lösungen entscheiden kann, ob sie effizient sind oder nicht.

Das übliche Optimalitätskriterium des Simplex-Verfahrens lässt sich leicht zum Kriterium der Effizienz verallgemeinern.

GÖMBALAKÚ ÖNTVÉNY LEHŰLÉSI FOLYAMATÁNAK VIZSGÁLATA¹

ADLER GYÖRGY

1. §. A feladat megfogalmazása

Vizsgálataink gömbalakú öntvényeknek vastag hőszigetelő réteggel körülvett formaanyagba történő, kétféle öntési eljárására vonatkoznak. A két öntési eljárás abban tér el egymástól, hogy az egyik esetben az öntvényben öntéskor szilárd, az öntvénnel azonos anyagú és avval koncentrikusan elhelyezkedő, gömbalakú mag foglal helyet, mely az öntvénybe beépül. A másik esetben szilárd mag nélkül történik az öntés.

A gömbalakú öntvény sugara legyen R . Ezt d vastagságú, gömbhéj alakú formaanyag, valamint körül elhelyezkedő b vastagságú, ugyancsak gömbhéj alakú hőszigetelő anyag határolja. A szilárd mag sugara legyen R_m (lásd 1. ábra).

Az öntvény túlhevített és megolvadt állapotban kerül az öntőformába. Az öntvény lehűlésének és megszilárdulásának matematikai vizsgálatánál az alábbi folyamatokat és feltételeket kell figyelembe venni.

1. Az öntvényben és a hőszigetelő anyagban hővezetés játszódik le; ezen anyagokban a hőmérséklet az időtől és a helytől is függ.

2. A formaanyag viszonylag vékony volta és jó hővezetőképessége folytán a formaanyagban a hővezetésre nem kell tekintettel lenni; a formaanyag hőmérséklete csak az időtől függ, a helytől nem.

3. Az öntvény megszilárdulása folyamán a szilárd és a cseppfolyós fázis határán olvadáshő szabadul fel.

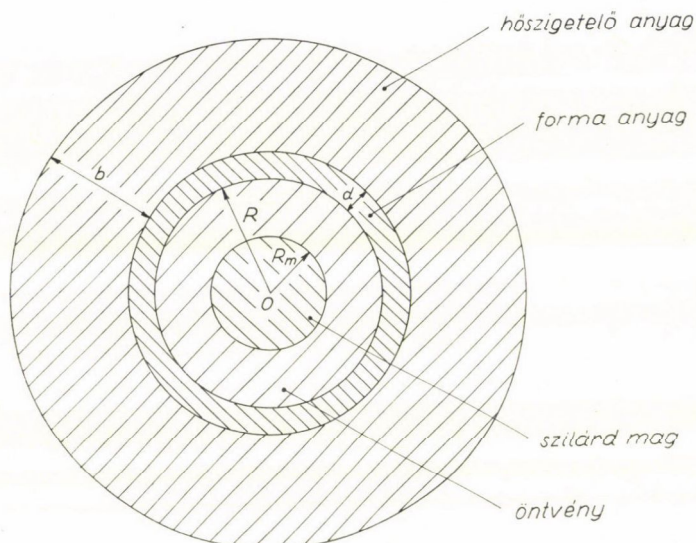
4. Az öntvény és a formaanyag, illetve a formaanyag és a hőszigetelő anyag határán a hőmérséklet a helynek folytonos függvénye. A hőszigetelő anyag és az azt kívülről határoló levegő között a lineáris hőátadási törvény áll fenn. (A hőszigetelő anyag és a levegő határán a hőmérsékletnek ugrása van.) A külső levegő hőmérséklete állandó és megegyezik a hőszigetelő anyag kezdeti hőmérsékletével.

5. Mivel az adatok szerint a vizsgált anyag termikus jellemzői nemcsak a hőmérséklettől, de a halmazállapottól sem függenek, ezért a szilárd mag és a cseppfolyós öntvény határára vonatkozóan semmilyen peremfeltélt sem kell kiróni, mert itt, az anyag hővezetési szempontból homogén lévén, magának a hővezetési egyenletnek kell teljesülnie. Természetesen ezen a helyen,

¹ A dolgozatban foglalt számítások a Fémipari Kutatóintézet (ROMWALTER ALFRÉD mérnök) megbízásából készültek.

az öntés pillanatában fennálló hőmérsékleti különbségek folytán, a kezdeti hőmérsékleteloszlás diszkontinuus lesz.

6. Végül a leírt rendszer termikus viselkedését az anyagi állandókon kívül a kezdeti időpontban uralkodó hőmérsékletek és az öntvény olvadáspontja teljesen meghatározzák.



1. ábra.

A leírt rendszer anyagi állandói a következők:

k = hővezetőképesség $\text{cal cm}^{-1} \text{sec}^{-1} \text{C}^{\circ-1}$

c = fajhő $\text{cal g}^{-1} \text{C}^{\circ-1}$,

ρ = sűrűség g cm^{-3} ,

λ = olvadáshő, cal g^{-1} ,

h = hőátadási tényező $\text{cal cm}^{-2} \text{sec}^{-1} \text{C}^{\circ-1}$.

A rendszer hőmérsékleti jellemzői:

T = kezdeti hőmérséklet C° ,

τ = öntvény olvadáspontja C° .

A hőszigetelő anyagra vonatkozó állandókat 1-es, az öntvényre vonatkozó adatokat 2-es, a formaanyagra vonatkozó adatokat 0-ás indexszel fogjuk jelölni.

A feladat mindkét (szilárd-magos és szilárd mag nélküli) öntési eljárás esetében a következő állapotjelzők meghatározása:

a) az öntvény dermedési folyamatára jellemző folyékony—szilárd fázis-határfelület helyzete mint az idő függvénye:

b) az öntvény és a hőszigetelő anyag hőmérsékletének időbeli és térbeli eloszlása a lehűlés folyamán.

2. §. A folyamat matematikai modellje

A) Egyenletek

Az egyszerűség kedvéért először foglalkozunk a szilárd mag nélküli öntés esetével. Jelöljük a hőszigetelő anyag hőmérsékletét $u(r, t)$ -vel, a megszilárdult öntvényt $v(r, t)$ -vel, a még cseppfolyós öntvényt $w(r, t)$ -vel, a formaanyagét pedig $z(t)$ -vel, ahol r a radiális koordinátát (az öntvény centrumától mért távolságot), t pedig az időt jelenti. (Mivel a folyamat teljesen gömbszimmetrikus, a helytől való függés csak a radiális koordinátától való függést jelenti.) A feltételeknek megfelelően a formaanyag hőmérséklete csak a t változótól függ. A megszilárdult öntvényrész vastagsága legyen $\xi(t)$. (Vagyis, ha $r = R(t)$ a cseppfolyós halmazállapotú öntvény sugara a t időpontban — ilyen jelölés mellett $R = R(0)$ — akkor $\xi(t) = R - R(t)$.)

A hőszigetelésben, továbbá az öntvénynek mind a megszilárdult, mind pedig a cseppfolyós részében a megfelelő hőmérsékleteknek a hővezetés egyenletét kell kielégíteniök (lásd: [2], 195—198. o. és 487. o.):

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (R + d < r < R + d + b),$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (R - \xi(t) < r < R),$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (0 < r < R - \xi(t)),$$

ahol

$$a_i^2 = \frac{k_i}{c_i \varrho_i} \quad (i = 1, 2).$$

(Az adatok szerint a szilárd és a cseppfolyós fázis termikus anyagi jellemzői megegyeznek.)

(Ezen egyenletekhez a hővezetés derékszögű x_1, x_2, x_3 koordinátákban felírt

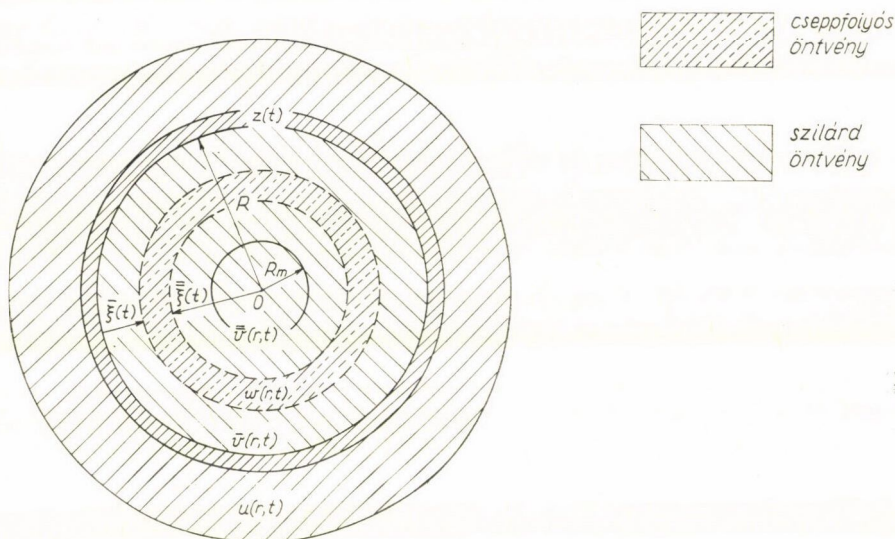
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

egyenletéből, a teljes gömbszimmetria figyelembevételével, az $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ helyettesítéssel juthatunk el.)

A szilárd-magos öntés esetében a dermedési folyamat nemcsak a formaanyag mentén, hanem a szilárd mag mentén is megindul. Jelentse $\bar{\xi}(t)$, illetve $\bar{\xi}(t)$ az átfagyott réteg vastagságát a formaanyag mentén, illetve a szilárd mag és a ráfagyott réteg alkotta gömb sugarát (lásd 2. ábra), $\bar{v}(r, t)$ illetve $\bar{v}(r, t)$ pedig a megfelelő részek hőmérsékletét, ahol $\bar{v}(r, t)$ egyben az eredeti szilárd mag hőmérsékletét is jelöli (lásd 1. §, 5.).

Természetesen az öntvény elegendő magas túlhevítése esetén a folyamat a szilárd mag megolvadásával kezdődik. Ez a jelenség matematikailag csupán abban nyilvánul meg, hogy a kezdeti időszakban $\bar{\xi}(t)$ csökkenőnek adódik.

Mint azt a 3. § II. számú problémájának megoldása mutatja, az adott numerikus értékek mellett $\bar{\xi}(t)$ növekedően indul (ti. az ott szereplő α pozitív), vagyis a szilárd mag, legalábbis a lehűlési folyamat megindulásakor, nem olvad meg.



2. ábra.

Tehát szilárd-magos öntés esetében a hőmérsékleteket meghatározó egyenletek a következők lesznek:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial u}{\partial t} & (R + d < r < R + d + b), \\
 (2) \quad & \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} & (R - \bar{\xi}(t) < r < R) \\
 (2) \quad & \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} & (0 < r < \bar{\xi}(t)), \\
 (3) \quad & \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial w}{\partial t} & (\bar{\xi}(t) < r < R - \bar{\xi}(t)).
 \end{aligned}$$

B) Kezdeti- és peremfeltételek. A fagyásfelület mozgását leíró egyenlet

A levegő és a hőszigetelő anyag határfelületén a lineáris hőátadási törvény érvényes:

$$(4) \quad -k_1 \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R+d+b} = h_1 [u(r, t)|_{r=R+d+b} - T_1].$$

(Mint az a feltételekből is következik, T_1 a levegő hőmérsékletét is jelenti.)

A többi határfelületeken hőmérsékleti ugrás nincs, ezért szilárd mag nélküli öntés esetén

$$(5) \quad u(r, t) \big|_{r=R+d} = z(t) = v(r, t) \big|_{r=R},$$

$$(6) \quad v(r, t) \big|_{r=R-\xi(t)} = w(r, t) \big|_{r=R-\xi(t)},$$

illetve szilárd-magos öntés esetén

$$(\bar{5}) \quad u(r, t) \big|_{r=R+d} = z(t) = \bar{v}(r, t) \big|_{r=R},$$

$$(\bar{6}) \quad \bar{v}(r, t) \big|_{r=R-\bar{\xi}(t)} = w(r, t) \big|_{r=R-\bar{\xi}(t)},$$

$$(\bar{\bar{6}}) \quad \bar{\bar{v}}(r, t) \big|_{r=\bar{\bar{\xi}}(t)} = w(r, t) \big|_{r=\bar{\bar{\xi}}(t)}.$$

Az $r = 0$ pont a gömbi szimmetria centruma, ezért itt hőáramlás nincs, vagyis szilárd mag nélküli öntésnél

$$(7) \quad \left. \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0,$$

míg szilárd-magos öntés esetében

$$(\bar{7}) \quad \left. \frac{\partial \bar{\bar{v}}(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$

Újabb határfeltételhez jutunk, ha figyelembe vesszük, hogy a formaanyagba időegység alatt beáramló és onnan kiáramló hőmennyiségek különbsége a formaanyag hőmérsékletének emelésére fordítódik. Így, szilárd mag nélküli öntés esetén, a következő határfeltételt kapjuk:

$$(8) \quad 4R^2\pi k_2 \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R} - 4(R+d)^2\pi k_1 \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R+d} = \\ = -\varrho_0 c_0 \left(\frac{4(R+d)^3\pi}{3} - \frac{4R^3\pi}{3} \right) \frac{dz(t)}{dt}.$$

Szilárd-magos öntés esetében ezen képlet annyiban módosul, hogy benne a $v(r, t)$ függvény helyett a $\bar{v}(r, t)$ függvény szerepel.

A szilárd és a cseppfolyós fázis határán végbemenő fagyási folyamat feltételi egyenletét a szilárd mag nélküli esetre vezetjük le. A szilárd-magos esetre vonatkozó egyenletek (itt két fázis-határfelület van!) szószerint meggyezző módon kapható meg, csak arra kell ügyelni, hogy a $\bar{\xi}(t)$ távolságot az $r = 0$ ponttól jobbra, míg a $\bar{\bar{\xi}}(t)$ távolságot az $r = R$ ponttól balra mérjük pozitívnak, és ugyanakkor a szilárd és a cseppfolyós fázisok r tengely menti sorrendje is ellenkező a két határfelület mentén. (A formaanyagtól befelé, a szilárd magtól pedig kifelé történik a dermedés.)

A t időpontban a szilárd-cseppfolyós fázishatár az $r = R - \xi(t)$ sugarú gömb, mely Δt idő alatt az $r = R - [\xi(t) + \Delta \xi]$ sugarú gömbbe megy át. Tehát ezen Δt idő alatt $4[R - \xi(t)]^2\pi \Delta \xi \varrho_2$ tömegű öntvény szilárdul meg, és ennek megfelelően $4[R - \xi(t)]^2\pi \Delta \xi \varrho_2 \lambda$ hőmennyiség szabadul fel. Ezen hőmennyiségnek egyenlőnek kell lennie az $r = R - \xi(t)$ és az $r = R - [\xi(t) +$

$+\Delta\xi]$ sugarú gömbfelületeken Δt idő alatt átáramló hőmennyiségek különbségével, vagyis

$$\begin{aligned} \Delta t \left[4(R - \xi(t) - \Delta\xi)^2 \pi k_2 \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=R-\xi(t)-\Delta\xi} - \right. \\ \left. - 4(R - \xi(t))^2 \pi k_2 \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=R-\xi(t)} \right] = \\ = 4[R - \xi(t)]^2 \pi \Delta\xi \rho_2 \lambda. \end{aligned}$$

Innen, $4[R - \xi(t)]^2 \pi \Delta t k_2$ -vel való osztás és a $\Delta t \rightarrow 0$ határátmenet elvégzése után a következő feltételi egyenletet kapjuk (vö.: [2], 280. o.):

$$(9) \quad \left[\frac{\partial w(r, t)}{\partial r} - \frac{\partial v(r, t)}{\partial r} \right]_{r=R-\xi(t)} = \frac{\lambda \rho_2}{k_2} \frac{d\xi(t)}{dt}.$$

A folyamat megindulásakor az öntvény teljes egészében cseppfolyós állapotban van, ezért $\xi(0) = 0$.

Szilárd-magos öntésnél az átfagyási feltételek a következők lesznek

$$(9) \quad \left[\frac{\partial w(r, t)}{\partial r} - \frac{\partial \bar{v}(r, t)}{\partial r} \right]_{r=R-\bar{\xi}(t)} = \frac{\lambda \rho_2}{k_2} \frac{d\bar{\xi}(t)}{dt},$$

$$(9) \quad \left[-\frac{\partial w(r, t)}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}(r, t)}{\partial r} \right]_{r=\bar{\xi}(t)} = \frac{\lambda \rho_2}{k_2} \frac{d\bar{\xi}(t)}{dt},$$

melyekhez a következő kezdeti feltételek tartoznak:

$$\bar{\xi}(0) = 0, \quad \bar{\bar{\xi}}(0) = R_m.$$

A kezdeti hőmérsékletek a következők:
szilárd mag nélküli öntésnél:

$$u(r, 0) = z(0) = T_0 = T_1,$$

$$w(r, 0) = T_2,$$

szilárd-magos öntésnél:

$$u(r, 0) = \bar{v}(r, 0) = z(0) = T_0 = T_1,$$

$$w(r, 0) = T_2.$$

A szilárd és a cseppfolyós fázis határán a hőmérséklet állandóan az öntvény olvadáspontján van:

$$(10) \quad v(r, t) \Big|_{t=R-\xi(t)} = w(r, t) \Big|_{r=R-\xi(t)} = \tau,$$

illetve szilárd-magos öntésnél

$$(10) \quad \bar{v}(r, t) \Big|_{r=R-\bar{\xi}(t)} = w(r, t) \Big|_{r=R-\bar{\xi}(t)} = \tau,$$

$$(10) \quad \bar{\bar{v}}(r, t) \Big|_{r=\bar{\xi}(t)} = w(r, t) \Big|_{t=\bar{\xi}(t)} = \tau.$$

(Ezek a feltételek $t > 0$ esetére értendők. $t = 0$ esetén a kezdeti hőmérséklet az öntvény határán (vagy határain) nem folytonos.)

A könnyebb áttekinthetőség kedvéért képleteinket a 3. és 4. ábrán összefoglaltuk: a 3. ábrán a szilárd mag nélküli, a 4. ábrán pedig a szilárd-magos öntés képleteit foglaltuk össze úgy, hogy az r változó megfelelő szakaszaihoz, illetve megfelelő pontjaihoz feltüntettük az ott érvényes egyenleteket, illetve peremfeltételeket.

3. §. Két, félterek átfagyására vonatkozó probléma egzakt megoldása

Tekintettel arra, hogy a fagyási folyamat, amint azt az alább következő I. probléma $\xi = \alpha \sqrt{t}$ megoldása mutatja, végtelen nagy sebességgel indul meg $\left(\text{vagyis } \frac{d\xi}{dt} \Big|_{t=0} = +\infty \right)$, ezért a numerikus számítási módszer, miként azt a 4. §-ban látni fogjuk, a folyamat kezdeti szakaszának kiszámítására nem alkalmas. Ezért ezen kezdeti szakaszt alkalmasan leegyszerűsített modellek egzakt megoldásával számítjuk ki.

Az egyszerűsítés lényegében abban áll, hogy a formaanyag és az öntvény, illetve az öntvény és a szilárd mag határát síknak, és a közegeket egyik irányban végtelen kiterjedésűeknek tekintjük. Ezek az egyszerűsítő feltevések azért jogosak, mert a fagyási folyamat megindulásakor létrejövő változások, ha vizsgálatainkat rövid időtartamra korlátozzuk, lényegében a különböző közegek határfelületeinek csak a közvetlen környezetére koncentrálódnak, így azokat sem a szóban forgó határfelületek görbületi viszonyai, sem pedig az ezen felületektől távolos pontokban lejátszódó folyamatok nem befolyásolják.

Ezen leegyszerűsített modellek azért is fontosak, mert a fagyási folyamat megindulásáról pontos képet adnak.

I. probléma. (Lásd: [2], 280—282. o.)

Jelölje x egy térbeli derékszögű koordinátarendszer egyik koordinátáját. Az öntvény foglalja el az $x > 0$ félteret. Nyilvánvaló, hogy ha kezdeti feltételeink és peremfeltételeink csak az x koordinátától függenek, akkor a folyamat minden jellemzője csak ezen x koordinátától — és természetesen az időtől — fog függeni. A t időpontban az öntvény szilárd és cseppfolyós fázisának elválasztó felülete legyen az $x = \xi(t)$ sík. A hőmérséklet a cseppfolyós fázisban legyen $w(x, t)$, a megszilárdult részben pedig $v(x, t)$. Ezen hőmérsékleteknek a megfelelő tartományokban a hővezetés egyenletét kell kielégíteniök:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (0 < x < \xi(t)),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (\xi(t) < x < +\infty).$$

Az öntvény kezdetben legyen teljes egészében megolvadt állapotban. T_2 hőmérsékleten; tehát

$$\xi(0) = 0$$

és

$$w(x, 0) = T_2 \quad (0 < x < +\infty).$$

Az öntvény az $x = 0$ síkban legyen állandóan $T_1 (< \tau)$ hőmérsékletűre hűtve:

$$v(0, t) = T_1 \quad (t > 0).$$

A végtelen távolban ($x = +\infty$) az öntvény hőmérséklete nem változik az idők folyamán:

$$w(+\infty, t) = T_2 \quad (t > 0).$$

Az $x = \xi(t)$ fagyásfelületen pedig (9) és (10) értelmében a következő feltételeknek kell teljesülniök:

$$\left[\begin{aligned} -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} &= \frac{\lambda \varrho_2}{k_2} \frac{d\xi(t)}{dt} \\ v(x, t) \Big|_{x=\xi(t)} &= w(x, t) \Big|_{x=\xi(t)} = \tau \end{aligned} \right] \quad (t > 0).$$

A probléma megoldását az az észrevétel teszi lehetővé, hogy ha az x változó helyett annak tetszőszerinti β -szorosát, a t változó helyett pedig annak β^2 -szeresét vezetjük be új változónak, akkor problémánk valamennyi egyenlete és feltétele változatlanul érvényben marad. Ez azt jelenti, hogy a feladat

v és w megoldásai csak az $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$ változótól függenek:

$$v(x, t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

$$w(x, t) = g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Ezen kifejezésekből azonnal következik, hogy a fagyásfelület mozgását a

$$\xi = \alpha \sqrt{t}$$

egyenlet írja le, ahol α az

$$f(\alpha) = g(\alpha) = \tau$$

egyenletnek tesz eleget.

Behelyettesítve ezen kifejezéseket egyenleteinkbe és feltételeinkbe, azt kapjuk, hogy az $f(y)$ és $g(y)$ függvényeknek a következő egyenleteket és peremfeltételeket kell kielégíteniök:

$$a_2^2 \frac{d^2 f}{dy^2} = -2y \frac{df}{dy} \quad (0 < y < \alpha),$$

$$a_2^2 \frac{d^2 g}{dy^2} = -2y \frac{dg}{dy} \quad (\alpha < y < +\infty)$$

$$(*) \quad \begin{cases} f(0) = T_1, & g(+\infty) = \tau_2, \\ f(\alpha) = g(\alpha) = \tau, \end{cases}$$

$$(**) \quad f'(\alpha) - g'(\alpha) = \frac{\lambda \varrho_2}{2k_2} \alpha.$$

Innen következik, hogy egyenletrendszerünk megoldása

$$f(y) = A_1 + B_1 \psi(y/2a_2) \quad (0 < y < a),$$

$$g(y) = A_2 + B_2 \psi(y/2a_2) \quad (a < y < +\infty),$$

$$\left(\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\sigma^2} d\sigma \right)$$

alakú, ahol az A_1 , A_2 , B_1 és B_2 együtthatók a (*) egyenletrendszerből számíthatók ki; az itt szereplő α a (**) egyenletből határozható meg. Az együtthatókra a következő értékeket kapjuk:

$$A_1 = T_1, \quad B_1 = \frac{\tau - T_1}{\psi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)},$$

$$A_2 = \frac{\tau - \psi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right) T_2}{1 - \psi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}, \quad B_2 = \frac{T_2 - \tau}{1 - \psi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}$$

A (**) egyenlet rendezés után a következőképp írható:

$$\frac{T_1 - \tau}{\psi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)} + \frac{T_2 - \tau}{1 - \psi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)} = -\frac{\lambda Q_2 \sqrt{\pi} a_2}{2k_2} \alpha e^{\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}.$$

A fenti megoldásból adódik, hogy a $(0, t)$ időtartam alatt az $x = 0$ felületen keresztül felületegységenként

$$Q = \int_0^t k_2 \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} dt = \frac{k_2(\tau - T_1)}{a_2 \sqrt{\pi}} \frac{1}{\psi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)} \sqrt{t}$$

hőmennyiség távozik el a félteret kitöltő öntvényből.

II. probléma

A cseppfolyós, T_2 hőfokú öntvény a $t = 0$ időpontban most is foglalja el az $x > 0$ félteret, míg az $x < 0$ félteret már megszilárdult és kihűlt, T_1 hőfokú öntvény töltse ki. (Az öntvény saját anyagából készült falra történik az öntés.) A szilárd és a cseppfolyós fázis határfelülete a t időpontban legyen ismét az $x = \xi(t)$ sík. A szilárd, illetve a cseppfolyós fázis hőmérsékletét jelölje — úgy, mint az előző problémánál — $v(x, t)$, illetve $w(x, t)$.

Az I. problémánál elmondottak mintájára azonnal felírhatók jelen problémánk egyenletei és feltételei. A változás az előzőkhöz képest lényegében

az, hogy a $v(x, t)$ hőmérséklet most egészen az $x = -\infty$ értékig van értelmezve, és az $x = 0$ síkban érvényes peremfeltétel esedik. Tehát:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (-\infty < x < \xi(t))$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{a_2^2} \frac{\partial w}{\partial t} \quad (\xi(t) < x < +\infty),$$

$$\xi(0) = 0,$$

$$v(x, 0) = T_1 \quad (-\infty < x < 0),$$

$$w(x, 0) = T_2 \quad (0 < x < +\infty),$$

$$\left. \begin{aligned} v(-\infty, t) &= T_1 \\ w(+\infty, t) &= T_2 \end{aligned} \right\} \quad (t > 0),$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left[-\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{x=\xi(t)} &= \frac{\lambda \rho_2}{k_2} \frac{d\xi(t)}{dt} \\ v(x, t)|_{x=\xi(t)} &= w(x, t)|_{x=\xi(t)} = \tau \end{aligned} \right\} \quad (t > 0).$$

Most is alkalmazhatók az I. problémánál felhasznált meggondolások. A nem részletezendő számítások végeredménye a következő:

$$v = A_1 + B_1 \psi \left(\frac{x}{2a_2 \sqrt{t}} \right) \quad (-\infty < x < \xi(t)),$$

$$w = A_2 + B_2 \psi \left(\frac{x}{2a_2 \sqrt{t}} \right) \quad (\xi(t) < x < +\infty),$$

$$\xi(t) = a \sqrt{t},$$

ahol

$$A_1 = T_1 + \frac{\tau - T_1}{1 + \psi \left(\frac{a}{2a_2} \right)},$$

$$A_2 = T_2 + \frac{\tau - T_2}{1 - \psi \left(\frac{a}{2a_2} \right)},$$

$$B_1 = \frac{\tau - T_1}{1 + \psi \left(\frac{a}{2a_2} \right)},$$

$$B_2 = \frac{-\tau + T_2}{1 - \psi \left(\frac{a}{2a_2} \right)},$$

és α a következő egyenlet gyöke:

$$\frac{\tau - T_2}{1 - \psi\left(\frac{a}{2a_2}\right)} + \frac{\tau - T_1}{1 + \psi\left(\frac{a}{2a_2}\right)} = \frac{\lambda_{02} \sqrt{\pi} a_2}{2k_2} \alpha e^{\frac{a^2}{4a_2^2}}.$$

4. §. A numerikus módszer képletei

Numerikus megoldási módszer gyanánt az ún. rácpont-módszernek (vagy más néven differenciaegyenletek módszerének) egy alkalmas módosítását fogjuk használni. A rácpont-módszer lényege az, hogy az egyenletekben és a határfeltételekben szereplő differenciálhányadosokat differenciahányadosokkal helyettesítjük, és így a parciális differenciálegyenletrendszer megoldását elsőfokú algebrai egyenletrendszer megoldására vezetjük vissza. (Az általános elveket illetően lásd: [1], 196—229. o.)

A) A hővezetés egyenletének megfelelő differenciaegyenlet

A hővezetés egyenlete esetünkben (lásd (1), (2), (3))

$$(11) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial U}{\partial t}$$

alakú. A pozitív r és a pozitív t tengelyt osszuk fel az

$$r_i = ip, \text{ illetve } t_j = jq \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots)$$

osztópontokkal. Így az $(r > 0, t > 0)$ negyed sík egy rácpontrendszerét kapjuk. Az $U(r, t)$ függvény közelítő értékét az (r_i, t_j) pontban jelölje $U_{i,j}$:

$$U_{i,j} \approx U(r_i, t_j).$$

Az U függvénynek a (11) egyenletben szereplő differenciálhányadosait a következő differenciahányadosokkal helyettesítjük:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{r=r_i, t=t_j} &\approx \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{q}, \\ \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=r_i, t=t_j} &\approx \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2p}, \\ \left. \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right|_{r=r_i, t=t_j} &\approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{p^2}. \end{aligned}$$

Ezen differenciahányadosokat a (11) egyenletbe helyettesítve a következő differenciaegyenletet kapjuk:

$$(12) \quad \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{p^2} + \frac{2}{r_i} \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2p} = \frac{1}{a^2} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{q}.$$

Ha itt a p és q állandókat úgy választjuk, hogy

$$(13) \quad q = \frac{p^2}{2a^2}$$

legyen, akkor a (12) egyenlet a következő egyszerű alakba írható:

$$(14) \quad U_{i,j+1} = \frac{1}{2} (U_{i-1,j} + U_{i+1,j}) + \frac{p}{2r_i} (U_{i+1,j} - U_{i-1,j}).$$

Ily módon a $t = t_{j+1}$ időponthoz tartozó közelítő értékek a $t = t_j$ időponthoz tartozókból egyszerű módon kaphatók meg.

Az egyszerűség kedvéért állapodjunk meg egy, az egész vizsgált rendszerre kiterjedő végleges rácsponthelosztásban és jelölésrendszerben. A rácsponthelosztást és az egyes rácsponthoz tartozó közelítő értékeket a szilárd mag nélküli, illetve a szilárd-magos esetben az 5. illetve a 6. ábra mutatja. Ezek az ábrák, az r tengely menti elrendezést illetően, a 3. és a 4. ábra megfelelői. Itt a ξ_j a $\xi(t_j)$ értéknek megfelelő közelítő érték:

$$\xi_j \approx \xi(t_j).$$

A rácsponthok vízszintes távolsága a hőszigetelésnek megfelelő részben legyen p_1 , az öntvénynek megfelelő részben pedig p_2 . A rácsponthok függőleges távolsága (vagyis az idő-differencia) mindkét részben legyen q . A p_1 , p_2 és q rácsállandókat válasszuk meg úgy, hogy teljesüljenek a (13) feltételnek megfelelő

$$(13') \quad q = p_1^2 \frac{1}{2a_1^2} = p_2^2 \frac{1}{2a_2^2}$$

feltételek.

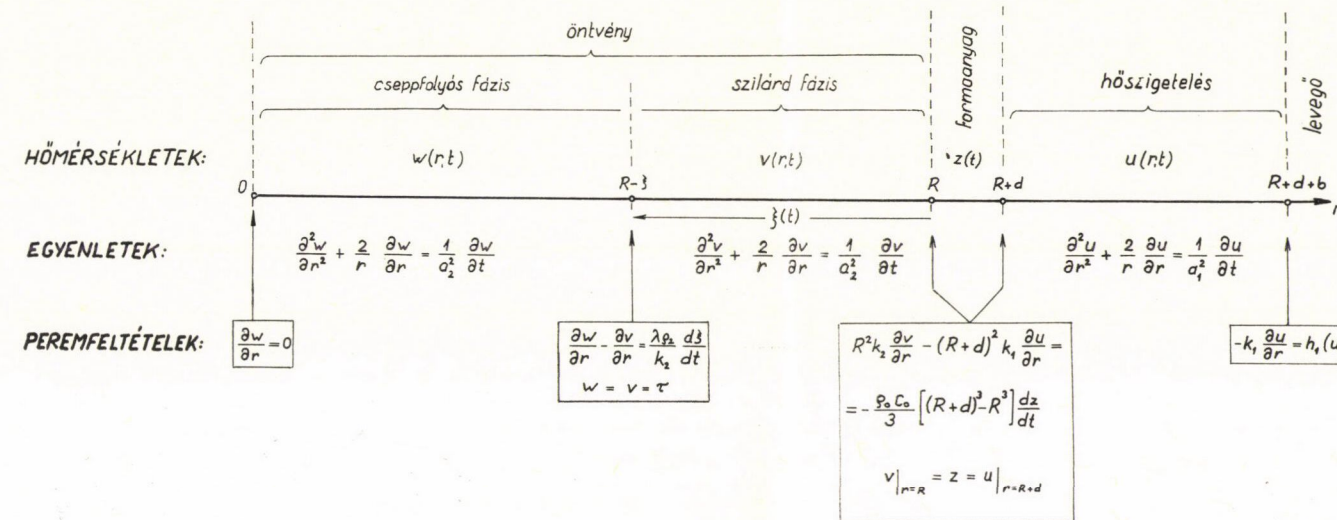
A ξ_j távolság A_j végpontját vízszintes irányban közrefogó szomszédos rácsponthoknak megfelelő első indexek legyenek i_j és $i_j + 1$. Ha A_j rácsponthba esik, akkor a vele összeeső rácsponth első indexe legyen i_j . Vagyis

$$i_j p_2 \leq R - \xi_j < (i_j + 1) p_2.$$

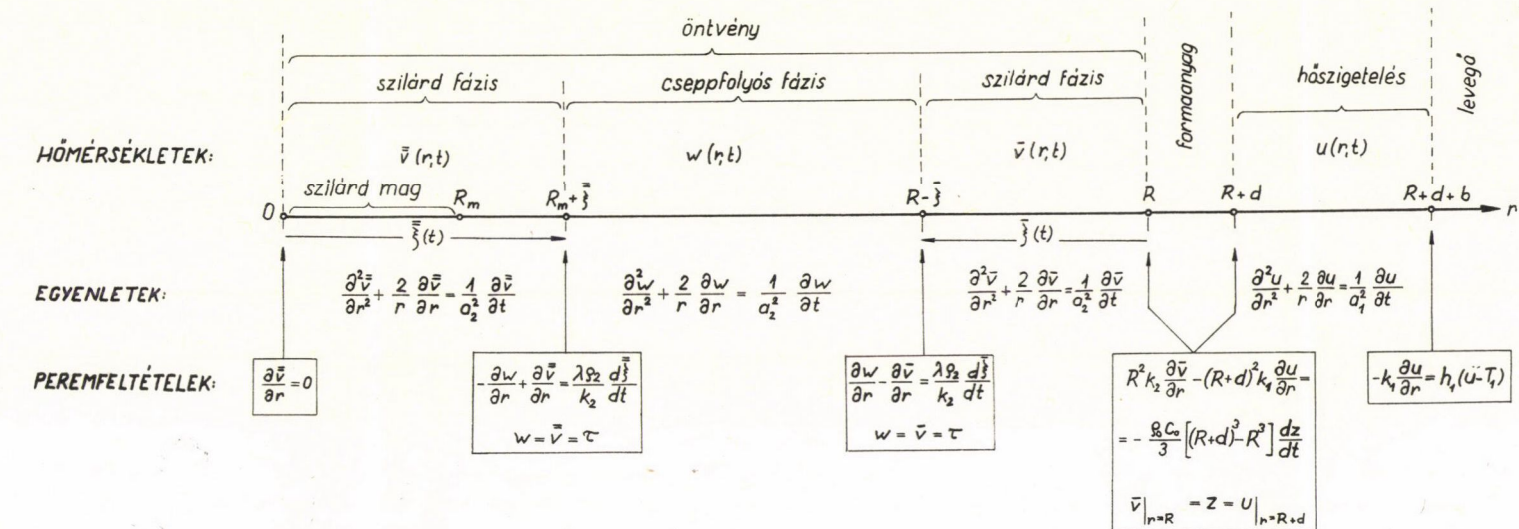
Az 5. ábrán az $\dots A_j A_{j+1} \dots$ vonal a szilárd és a cseppfolyós fázis határfelületének időbeli mozgását mutatja. Tőle balra vannak a cseppfolyós fázis hőmérsékletét jelölő w , tőle jobbra pedig a szilárd fázis hőmérsékletét jelölő v értékek. Egyszerűség kedvéért a v és a w értékek első, az r változóra vonatkozó indexei balról, a gömb centrumából kiindulva folytatólágosan következnek (és nem kezdtük a v értékeknél újra az indexelést). Hasonló a helyzet a 6. ábra esetében is.

Levezetéseinket az írásmunka megkönnyítésére csak a szilárd mag nélküli esetre végezzük el. A szilárd-magos esetre vonatkozó képletek szóról szóra ugyanúgy vezethetők le. Az ezen utóbbi esetre vonatkozó eredményeket a 6. ábrán tüntettük fel.

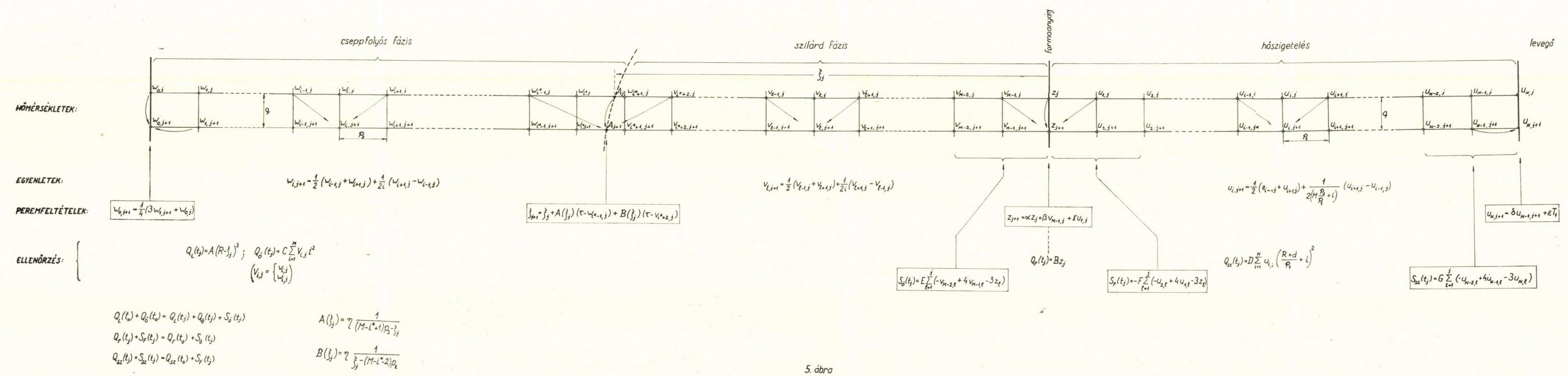
A (14) képlet alapján, az 5. ábra jelöléseinek megfelelően, külön-külön felírjuk az (1), (2) és (3) egyenleteknek megfelelő differenciaegyenleteket.



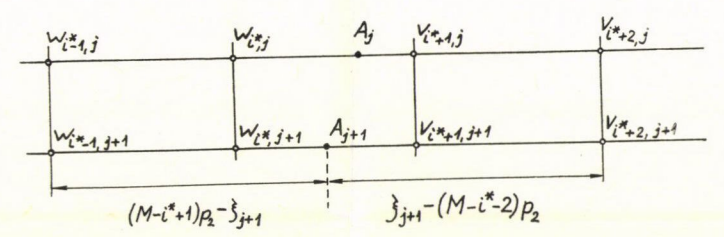
3. ábra



4. ábra



5. ábra



- a) $w_{i,j+1}^* = v_{i,j+1}^* = \tau$ } ha $\xi_{j+1} = (M-i^*)p_2$
- $v_{i+1,j+1}^* = \frac{1}{2}(\tau + v_{i+2,j+1}^*)$
- b) $w_{i,j+1}^* = w_{i+1,j+1}^* + (\tau - w_{i+1,j+1}^*) \frac{p_2}{(M-i^*)p_2 - \xi_{j+1}}$ } ha $(M-i^*)p_2 \leq \xi_j < \xi_{j+1} < (M-i^*)p_2$
- $v_{i+1,j+1}^* = v_{i+2,j+1}^* + (\tau - v_{i+2,j+1}^*) \frac{p_2}{\xi_{j+1} - (M-i^*)p_2}$
- c) $v_{i,j+1}^* = \tau$ } ha $(M-i^*)p_2 < \xi_j < (M-i^*)p_2 < \xi_{j+1}$
- $v_{i+1,j+1}^* = \frac{1}{2}(\tau + v_{i+2,j+1}^*)$

5a. ábra

Ezek rendre:

$$(I) \quad u_{i,j+1} = \frac{1}{2} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \frac{1}{2 \left(M \frac{p_2}{p_1} + i \right)} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}),$$

$$(II) \quad v_{i,j+1} = \frac{1}{2} (v_{i-1,j} + v_{i+1,j}) + \frac{1}{2i} (v_{i+1,j} - v_{i-1,j}),$$

$$(III) \quad w_{i,j+1} = \frac{1}{2} (w_{i-1,j} + w_{i+1,j}) + \frac{1}{2i} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j}).$$

Hasonlóan kapjuk, $v_{i,j}$ helyett egyszer $\bar{v}_{i,j}$ -t, másszor $\bar{\bar{v}}_{i,j}$ -t írva, a (2) és a (2) egyenletek differencia-formuláit.

B) A peremfeltételeknek és a fagyásfelület mozgását leíró egyenletnek megfelelő differenciaegyenletek

Először foglalkozunk az $r = 0$ ponthoz tartozó (lásd (7) és (7))

$$(15) \quad \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

alakú feltétellel. Ezt a feltételt, a differenciálhányados helyett a megfelelő differenciahányadost írva, azonnal átírhatnánk differenciaegyenletté. Pontosabb képlethez juthatunk azonban, ha figyelembe vesszük, hogy az $r = 0$ pont (gömről lévén szó) tulajdonképpen nem pereme a tartománynak, hanem annak belső pontja. Ezért ahelyett, hogy a (15) feltételből indulnánk ki, induljunk ki magából a (11) differenciálegyenletből, melynek — nem feledkezve meg a (15) feltételről — a megfelelő határértékekre áttérve, az $r = 0$ pontban is érvényesnek kell lennie.

Vizsgáljuk tehát, hogy (11) egyenletünk mihez tart $r \rightarrow 0$ esetén. A (15) feltétel figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=0} \right) \right] = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \Big|_{r=0}.$$

Ennek alapján azt kapjuk, hogy a (11) differenciálegyenlet, figyelembevételével (15)-öt, az $r = 0$ pontban

$$(11') \quad 3 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial U}{\partial t}$$

alakú.

Az r tengely felosztását folytassuk egy osztóponttal a negatív r értékek irányába. Így kapjuk az

$$r_{-1} = -p$$

osztópontot, és a neki megfelelő

$$U_{-1,j} \approx U(r_{-1}, t_j)$$

közelítő értéket. Figyelembe véve az $r = 0$ pontra vonatkozó szimmetriát,

$$U_{-1,j} = U_{1,j}$$

veendő. Ennek alapján a (11') egyenlet baloldalán szereplő derivált az $r = 0$ pontban a

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right|_{r=0} \approx \frac{U_{1,j} - 2U_{0,j} + U_{-1,j}}{p^2} = 2 \frac{U_{1,j} - U_{0,j}}{p^2}$$

differenciahányadossal közelíthető. A (11') egyenlet jobboldalán szereplő deriváltat pedig a

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{r=0, t=t_j} \approx \frac{U_{0,j} - U_{0,j-1}}{q}$$

differenciahányadossal közelítjük.² Így végül is a (15) peremfeltételre, a fenti közelítő formulákat behelyettesítve a (11') egyenletbe, a következőt kapjuk:

$$3 \frac{2 U_{1,j} - 2 U_{0,j}}{p^2} = \frac{1}{a^2} \frac{U_{0,j} - U_{0,j-1}}{q}.$$

Innen, p és q értékét a (13) feltételnek megfelelően választva, a következő adódik:

$$(VII) \quad U_{0,j+1} = \frac{1}{4} (3 U_{1,j+1} + U_{0,j}).$$

A (4) határfeltételnek megfelelő differencia-képlet minden további nélkül azonnal felírható:

$$-k_1 \frac{u_{N,j} - u_{N-1,j}}{p_1} = h_1 (u_{N,j} - T_1),$$

ahonnan

$$(IV) \quad u_{N,j} = \delta u_{N-1,j} + \varepsilon T_1,$$

ahol

$$\delta = \frac{1}{1 + \frac{p_1 h_1}{k_1}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{k_1}{p_1 h_1}}.$$

A (8) határfeltétel átírása differencia-formába ugyancsak azonnal elvégezhető, ha bevezetjük a

$$z_j \approx z(t_j)$$

jelölést:

$$R^2 k_2 \frac{z_j - v_{M-1,j}}{p_2} - (R + d)^2 k_1 \frac{u_{1,j} - z_j}{p_1} = -\frac{q_0 c_0}{3} [(R + d)^3 - R^3] \frac{z_{j+1} - z_j}{q}.$$

² Az idő szerinti deriváltat azért az itt szereplő ún. baloldali, és nem az A) pontban szereplő ún. jobboldali differenciahányadossal helyettesítjük, mert így a numerikus módszer „stabilitása” nagyobb. Erre itt részletesen nem térünk ki.

Innen

(VIII)

$$z_{j+1} = \alpha z_j + \beta v_{M-1,j} + \gamma u_{1,j},$$

ahol

$$\alpha = 1 - \beta - \gamma,$$

$$\beta = \frac{3 q R^2 k_2}{\varrho_0 c_0 p_2 [(R+d)^3 - R^3]}, \quad \gamma = \frac{3 q (R+d)^2 k_1}{\varrho_0 c_0 p_1 [(R+d)^3 - R^3]}.$$

A (VIII) képlet levezetésénél figyelembe vettük azt, hogy

$$v_{M,j} \equiv z_j \equiv u_{0,j},$$

ezáltal az (5) feltétel automatikusan teljesül.

A fentieknél nehezebb feladatot jelent az átfagyás folyamatát leíró (6) és (9) feltételek átírása differenciaegyenlet alakjába. További problémát jelent a közelítő v és w értékek meghatározása az átfagyási felület szomszédságában, ahol a (II) és (III) differenciaegyenlet nem használható, mert a $v_{i,j}$ érték a cseppfolyós részbe, $w_{i+1,j}$ pedig a szilárd részbe esne.

A (9) feltétel jobboldala azonnal átírható differenciahányados alakjába:

$$\frac{\lambda \varrho_2}{k_2} \frac{d\xi}{dt} \sim \frac{\lambda \varrho_2}{k_2} \frac{\xi_{j+1} - \xi_j}{q}.$$

A baloldalon szereplő deriváltakat az $(i_j - 1, j)$ indexű és az A_j , illetve az $(i_j + 2, j)$ indexű és az A_j alappontokon képezett differenciahányadosokkal helyettesítjük. Figyelembe véve, hogy az A_j pontban a hőmérséklet egyenlő a τ olvadási hőmérséklettel, a következőt kapjuk:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=R-\xi(t)} \approx \frac{\tau - w_{i_j-1,j}}{p_2 + [(M - i_j) p_2 - \xi_j]},$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R-\xi(t)} \approx \frac{v_{i_j+2,j} - \tau}{p_2 + [\xi_j - (M - i_j - 1) p_2]}.$$

Ezen differenciahányadosok segítségével a (9) feltétel így írható át:

$$(IX) \quad \xi_{j+1} = \xi_j + A(\xi_j) (\tau - w_{i_j-1,j}) + B(\xi_j) (\tau - v_{i_j+2,j}),$$

ahol

$$A(\xi_j) = \frac{k_2 q}{\lambda \varrho_2} \frac{1}{(M - i_j + 1) p_2 - \xi_j}, \quad B(\xi_j) = \frac{k_2 q}{\lambda \varrho_2} \frac{1}{\xi_j - (M - i_j - 2) p_2}.$$

Ezen (IX) formula levezetésénél a (6) feltételt figyelembe vettük.

Ahhoz, hogy ezt a formulát használhassuk, szükség van az A_j ponttól jobbra illetve balra eső két-két szomszédos $(i_j - 1, i_j)$ illetve $(i_j + 1, i_j + 2)$ indexű rácspontra; itt A_j -t, ha rácspontba esik, saját baloldali szomszédjának tekintjük. Ezért az ezen formulával való számítást csak akkor lehet elkezdeni, ha a

$$(16) \quad \xi_j \geq p_2$$

feltétel teljesül, és addig lehet folytatni, míg a

$$(17) \quad \xi_j \leq (M-1)p_2$$

egyenlőtlenség fennáll. A (16) feltételre numerikus példánknál a kezdeti értékek megadásánál tekintettel leszünk (lásd 6. §).

Ha ξ_j olyan nagy már, hogy a (17) feltétel nem teljesül, akkor a (IX) formulát úgy módosítjuk, figyelembe véve a konkrét numerikus feladatunkban szereplő adatokat, hogy a $w_{i-1,j}$ értéket tartalmazó tagot egyszerűen elhagyjuk. Ezt annál is inkább megtehetjük, mert a fizikai folyamat ilyen előrehaladott állapotában ez a tag elenyészően kicsiny a másik tag mellett. Tehát módosított (IX) formulánk a következő alakot ölti:

$$(IX') \quad \xi_{j+1} = \xi_j + \frac{k_2 q}{\lambda \varrho_2} \frac{\tau - v_{i,j}}{\xi_j - (M-2)p_2} \quad (\xi_j > (M-1)p_2).$$

Ekkor a (III) képlet sem alkalmazható már, helyette, a fenti (IX') képlettel összhangban, a $w_{0,j} = w_{1,j} = \tau$ értékeket vesszük fel.

Az eddig levezetett differencia-formuláink lehetővé teszik, hogy a $t = t_{j+1}$ időponthoz tartozó közelítő értékeket az előző $t = t_j$ időponthoz tartozó értékekből kiszámítsuk, kivéve az átfagyási felülettel, vagyis az A_{j+1} ponttal szomszédos közelítő $w_{i+1,j+1}$ és $v_{i+1+1,j+1}$ értékeket. Ezen értékeket a következőképp határozzuk meg.

Először is olyan finom rácsponzt-beosztást veszünk (vagyis q -t olyan kicsire választjuk), hogy eleve

$$(18) \quad \xi_{j+1} - \xi_j < p_2$$

legyen minden j -re (ez a feltétel az 5. ábrán teljesül). Ezt a 3. §-ban foglalt eredményeink teszik lehetővé. Ezzel részletesebben a jelen paragrafus C) pontjában és a 6. §-ban fogunk foglalkozni. q ilyen választása mellett a következő eseteket különböztethetjük meg:

a.) Ha az A_{j+1} pont rácspontra esik, akkor itt a hőmérséklet τ , és így ezzel a rácspontra nincs probléma.

b.) Ha A_j és A_{j+1} ugyanazon két szomszédos függőleges rácsvonal közé esik, mondjuk az i^* és az $i^* + 1$ indexűek közé, akkor $w_{i^*,j+1}$ illetve $v_{i^*+1,j+1}$ értékét az $(i^* - 1, j + 1)$ pontbeli $w_{i^*-1,j+1}$ érték és az A_{j+1} pontbeli τ érték, illetve az $(i^* + 2, j + 1)$ pontbeli $v_{i^*+2,j+1}$ és az A_{j+1} pontbeli τ érték közötti lineáris interpolációval kaphatjuk meg (lásd 5a. ábra):

$$w_{i^*,j+1} = w_{i^*-1,j+1} + (\tau - w_{i^*-1,j+1}) \frac{p_2}{(M - i^* + 1)p_2 - \xi_{j+1}}$$

$$v_{i^*+1,j+1} = v_{i^*+2,j+1} + (\tau - v_{i^*+2,j+1}) \frac{p_2}{\xi_{j+1} - (M - i^* - 2)p_2}.$$

c.) Ha az A_j és az A_{j+1} pontokat függőleges rácsvonal, mondjuk az i^* indexű elválasztja egymástól (a tett feltétel szerint A_j -t és A_{j+1} -t legfeljebb egy függőleges rácsvonal választhatja el egymástól), akkor legyen

$$v_{i^*,j+1} = \tau, \quad v_{i^*+1,j+1} = \frac{1}{2}(\tau + v_{i^*+2,j+1}).$$

Ezzel az összes lehetséges eseteket letárgyaltuk, és közben a (6) feltételre is figyelemmel voltunk.

A szilárd-magos esetre vonatkozó képleteket, az 5. és az 5.a ábrákkal analóg módon, a 6. és az ehhez kapcsolódó 6.a ábrán tüntettük fel.

A (IX') képlettel kapcsolatban elmondottak analógiájára, ha $\bar{\xi}_j$ és $\bar{\bar{\xi}}_j$ már oly nagyok, hogy az \bar{A}_j és az $\bar{\bar{A}}_j$ pontok között már csak 1 illetve 2 db osztópont helyezkedik el, akkor $\bar{\xi}_{j+1}$ és $\bar{\bar{\xi}}_{j+1}$ képletében a w -t tartalmazó tagok egyszerűen elhagyandók, és egyidejűleg az \bar{A}_j és $\bar{\bar{A}}_j$ közé eső w értékek gyanánt a

$$w_{i'+1,j+1} = w_{i^*,j+1} = \tau$$

értéket vesszük fel.

C) Kezdeti feltételek

Amint azt a 3. § elején említettük, fentebb levezetett képleteink a kihűlési folyamat kezdeti ($t = 0$ körüli) szakaszának kiszámítására nem alkalmasak. Ezért egyszerűsítő feltevéseket teszünk, melyek lehetővé teszik a 3. §-ban kapott eredményeink alkalmazását a kezdeti értékek kiszámítására.

Először a szilárd mag nélküli öntéssel foglalkozunk.

Az öntvényt úgy tekintjük, mintha az az $x > 0$ féltérlet töltené ki. (Mint azt már a 3. § elején említettük, ezt azért tehetjük meg, mert közvetlenül a fagyási folyamat megindulását követően számottevő hőmérsékletváltozás csak a formaanyag és az öntvény határfelületének szűkebb környezetében lesz.) A formaanyag hőmérsékletét pedig állandónak, T_0 -nak tekintjük. Ezt ugyancsak megtehetjük, mert a formaanyag hőmérséklete az időnek folytonos függvénye még a $t = 0$ pontban is (ez részletesebb analízissel kimutatható), és így elegendő rövid idő alatt tetszésszerűen kevés változik csak meg. Az így leegyszerűsített probléma azonos a 3. § I. problémájával.

Az az időintervallum, melyre a fenti közelítő modellt fogadjuk el érvényesnek, legyen a $0 < t < t^*$ intervallum. Ezen t^* időtartam alatt, az I. probléma megoldásánál kapott eredményeink szerint, az $x = 0$ felületen keresztül felületegységenként

$$Q = \frac{k_2(\tau - T_1)}{a_2 \sqrt{\pi}} \frac{1}{\psi\left(\frac{a}{2a_2}\right)} \sqrt{t^*}$$

hőmennyiség távozik el az öntvényből.

Mármint a rácspont-módszerhez az öntvény hőmérsékletére kezdeti értékek gyanánt az I. probléma megoldásai által $t = t^*$ -ra szolgáltatott értékeket tekintjük. A hőszigetelő anyag kezdeti hőmérsékletét T_1 -nek vesszük, míg a formaanyag kezdeti hőmérséklete legyen

$$z_0 = T_0 + 4R^2\pi \frac{Q}{\varrho_0 c_0 \left[\frac{4(R+d)^3\pi}{3} - \frac{4R^3\pi}{3} \right]} = T_0 + \frac{3R^2Q}{\varrho_0 c_0 [(R+d)^3 - R^3]},$$

vagyis úgy számolunk, mintha az öntvényből a $(0, t^*)$ időintervallumban eltávozott hőmennyiség teljes egészében a formaanyagban halmozódott volna fel. Ezzel elérjük azt, hogy a közelítés ellenére a rácspont-módszerrel történő

számolás kezdetéig a hővezető rendszerben eredetileg felhalmozott teljes hőmennyiségből semmi sem „vész el”.

t^* megválasztásánál két, egymással ellentétes szempont érvényesül. A modell leegyszerűsítésével járó hiba csökkentése azt kívánja, hogy t^* mennél kisebb legyen. Másrésről azonban, ha q -t, vagyis a rácspontfelosztást egyszer rögzítettük, akkor a (16) és a (18) feltétel már alsó határt szab t^* -nak. Vagyis a numerikus számolás a differencia-formulák alapján csak akkor kezdhető el, ha már $\xi_j \geq p_2$ és $\xi_{j+1} - \xi_j < p_2$.

Az első, (16) feltétel teljesítése nem kíván magyarázatot. A második, (18) feltételhez pedig azt jegyezzük meg, hogy a $\xi_{j+1} - \xi_j$ differenciák elegendő kicsiny j indexek esetén csökkenő sorozatot alkotnak (ezt a 3. § I. problémájának megoldása mutatja), és így, a 3. §-ban foglaltak segítségével könnyen található olyan t^* , hogy $t_j > t^*$ esetén (legalábbis a számítás kezdeti szakaszában) biztosan teljesüljön (18).

Fenti megfontolásaink minden további nélkül (még a számadatokat sem kell megváltoztatni) alkalmasak a szilárd-magos öntéshez tartozó, az öntvény-formaanyag határkörnyezetére vonatkozó kezdeti értékek kiszámítására. Szilárd-magos öntésnél szükség van még a szilárd mag-öntvény határ környezetébe eső kezdeti értékek kiszámítására. Ezen értékek a 3. § II. problémájának megoldásából kaphatók meg, a fentiekkel analóg módon, ha a szilárd magot és az öntvényt úgy tekintjük, mintha egy sík két oldalán elhelyezkedő feltételeket töltenének ki.

A fent elmondott számítások numerikus végeredményeit, a képletekben szereplő állandók (p_1, p_2, q, t^* , stb.) alkalmas felvétele után, a 6. § 1. és 2. táblázatában közöljük.

5. §. Ellenőrzési rendszer

A számítások ellenőrzésének két, egymástól lényegükben különböző módja kínálkozik. Az egyik módon a képletek alapján elvégzett műveletek helyességét lehet ellenőrizni, de nem lehet semmit sem tudni arról, hogy maguk a numerikus képletek milyen pontos közelítést szolgáltatják az egzakt megoldásnak. A másik módon a folyamat fizikai oldaláról, fizikai összefüggések alapján lehet ellenőrizni a számítások helyességét. Ez az ellenőrzési mód külön-külön nem mutatja ki a kisebb hibákat (pl. kerekítési hibák), de következtéseket enged levonni maguknak a numerikus képleteknek a pontosságára is. Mi ez utóbbi lehetőséget választjuk.

Az ellenőrzés lényege az, hogy fel fogjuk írni a hővezető rendszer egyes részeinek a hőmérlegét és megnézzük, hogy az illető részekbe be- és azokból kiáramló hőmennyiségek különbsége mennyire tér el a szóban forgó részekben felhalmozódó hőmennyiségektől.

A továbbiakban csak a szilárd mag nélküli esetre részletezzük a leveztéseket. A végeredményeket az 5. ábrán összefoglaltuk. A szilárd-magos esetre vonatkozó képleteket a 6. ábrán foglaltuk össze, az 5. ábra mintájára. (A képletekben szereplő, konkrét numerikus problémánkra vonatkozó együtthatókat lásd a paragrafus végén.)

A következőkben táblázatszerűen összefoglaljuk azokat a képleteket, melyekre szükségünk lesz. Ezek a képletek nem szorulnak magyarázatra.

Az öntvény latens olvadáshő-tartalma a t időpontban:

$$(19) \quad Q_L(t) = \frac{4\pi[R - \xi(t)]^3}{3} q_2 \lambda.$$

Az öntvény látszólagos (olvadáshő nélkül számított) hőtartalma a t időpontban:

$$(20) \quad Q_O(t) = 4\pi \left[\int_0^{R-\xi(t)} w(r, t) r^2 dr + \int_{R-\xi(t)}^0 v(r, t) r^2 dr \right] \varrho_2 c_2.$$

A formaanyag hőtartalma a t időpontban:

$$(21) \quad Q_F(t) = \frac{4\pi}{3} [(R+d)^3 - R^3] \varrho_0 c_0 z(t).$$

A hőszigetelés hőtartalma a t időpontban:

$$(22) \quad Q_{Sz}(t) = 4\pi \int_{R+d}^{R+d+b} u(r, t) r^2 dr \cdot \varrho_1 c_1.$$

Az öntvényből a formaanyagba t idő alatt beáramló hőmennyiség:

$$(23) \quad S_O(t) = -4R^2\pi \int_0^t \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R} dt \cdot k_2.$$

A formaanyagból a hőszigetelésbe t idő alatt beáramló hőmennyiség:

$$(24) \quad S_F(t) = -4(R+d)^2\pi \int_0^t \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R+d} dt \cdot k_1.$$

A hőszigetelésből a levegőbe t idő alatt beáramló hőmennyiség:

$$(25) \quad S_{Sz}(t) = -4(R+d+b)^2\pi \int_0^t \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R+d+b} dt \cdot k_1.$$

Ezen hőmennyiségek között a következő összefüggések állnak fenn:

$$(26) \quad \begin{aligned} Q_L(0) + Q_O(0) &= S_O(t) + Q_L(t) + Q_O(t), \\ Q_F(t) + S_F(t) &= Q_F(0) + S_O(t), \\ Q_{Sz}(t) + S_{Sz}(t) &= Q_{Sz}(0) + S_F(t). \end{aligned}$$

További feladatunk most már csak az, hogy felírjuk a (19)–(25) képleteknek megfelelő differencia-formulákat. Ezt úgy végezzük el, hogy a képletekben szereplő differenciálhányadosokat differenciahányadosokkal, az integrálokat pedig közelítő összegeikkel helyettesítjük. Közelítő összegként a leg-egyszerűbbet, a téglányösszeget választjuk, a differenciálhányadosokat pedig

a három alappontra támaszkodó differencia-formulából számítjuk.³ Ezek a differencia-formulák esetünkben a következő alakúak:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R+d, t=t_j} &\approx \frac{-u_{2,j} + 4u_{1,j} - 3z_j}{2p_1}, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R+d+b, t=t_j} &\approx \frac{u_{N-2,j} - 4u_{N-1,j} + 3u_{N,j}}{2p_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=R, t=t_j} &\approx \frac{v_{M-2,j} - 4v_{M-1,j} + 3z_j}{2p_2}.\end{aligned}$$

A további számításokat nem részletezzük, hanem felírjuk a (19)–(25) képleteknek megfelelő differencia-formulákat:

$$(27) \quad Q_L(t_j) \approx A \cdot (R - \xi_j)^3,$$

$$Q_F(t_j) \approx B \cdot z_j,$$

ahol

$$A = \frac{4\pi}{3} \varrho_2 \lambda,$$

$$B = \frac{4\pi}{3} [(R+d)^3 - R^3] \varrho_0 c_0.$$

Egyszerűség kedvéért a v és a w értékeket egyöntetűen V -vel jelölve:

$$\left. \begin{matrix} v_{i,j} \\ w_{i,j} \end{matrix} \right\} = V_{i,j}$$

(ez nem okozhat zavart, mert a v -k és a w -k első indexei folytatólágoosan mennek, két egyenlő első indexű v és w nem létezik), a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}(28) \quad Q_0(t_j) &\approx C \sum_{i=1}^M V_{i,j} \cdot i^2, \\ Q_{S_z}(t_j) &\approx D \sum_{i=1}^N u_{i,j} \left(\frac{R+d}{p_1} + i \right)^2, \\ S_0(t_j) &\approx E \sum_{l=1}^j (-v_{M-2,l} + 4v_{M-1,l} - 3z_l), \\ S_F(t_j) &\approx F \sum_{l=1}^j (u_{2,l} - 4u_{1,l} + 3z_l), \\ S_{S_z}(t_j) &\approx G \sum_{l=1}^j (-u_{N-2,l} + 4u_{N-1,l} - 3u_{N,l}),\end{aligned}$$

³ Közelítő összegként azért választjuk a legegyszerűbb téglányösszeget, mert az idő szerinti integrálok felső határa változik, így minden más numerikus kvadrátúra-képlet megnehezítené a számolást. Emlékeztetünk arra, hogy monoton integrandusok esetén (és itt azok szerepelnek) a külső téglányösszeg és a pontos integrálérték közötti

ahol

$$C = 4 \pi \varrho_2 c_2 p_2^3,$$

$$D = 4 \pi \varrho_1 c_1 p_1^3,$$

$$E = 2 \pi R^2 k_2 \frac{q}{p_2},$$

$$F = 2 \pi (R + d)^2 k_1 \frac{q}{p_1},$$

$$G = 2 \pi (R + d + b)^2 k_1 \frac{q}{p_1}.$$

6. §. Az állandók numerikus értékei. A kezdeti értékek és az együttthatók táblázata. A gépi számítás szakaszai

Az anyagi állandók számértékei a következők:

$k_1 = 0,0062$	$k_2 = 0,013$	$k_0 = +\infty$
$c_1 = 0,28$	$c_2 = 0,28$	$c_0 = 0,36$
$\varrho_1 = 2,0$	$\varrho_2 = 4,0$	$\varrho_0 = 1,5$
h_1 (levegő felé) $= 1,95 \cdot 10^{-4}$		$\lambda = 255$

A kezdeti hőmérsékletek és az olvadáspont:

$$T_1 = 20, \quad T_2 = 2050, \quad T_0 = 20, \quad \tau = 2000.$$

A rendszer geometriai adatai a következők:

$$R_m = \begin{cases} 8,19126208 & (= 128 \ p_2) \\ 10,2390776 & (= 160 \ p_2) \\ 14,3347086 & (= 224 \ p_2) \end{cases}$$

$$R = 24,5737862 \quad (= 384 \ p_2)$$

$$d = 4,$$

$$b = 5; 10; 40.$$

Kiinduláshoz a rácsállandók következő értékeit választjuk (elegendő p_1 -t megválasztani, p_2 -t és q -t a (13') összefüggés már meghatározza):

$$p_1 = 0,062500000, \quad p_2 = 0,063994235,$$

$$q = 0,17641129.$$

különbség abszolút értéke nem haladja meg az összeg maximális abszolút értékű tagjának abszolút értékét, és ez a hibakorlát független az integrálás intervallumának hosszától. Evvel szemben a differenciálhányadosok differenciálhányadosokkal való helyettesítése szisztematikus hibát okoz, mely az idő szerinti integrálásnál felgyülemlik. Így célszerű a két alappontra támaszkodó differenciálhányados-képlet helyett az alig bonyolultabb, de jóval pontosabb három alappontra támaszkodó képletet alkalmazni.

Tehát az osztópontok száma:

$$M = 384$$

$$L = \begin{cases} 128 \\ 160 \\ 225 \end{cases} \quad N = \begin{cases} 80 \\ 160 \\ 640 \end{cases}$$

A fizikai folyamat idővel egyre lassúbb lesz. Ez a numerikus számítás szempontjából azt jelenti, hogy azonos mennyiségű numerikus számításra idővel egyre kisebb hőmérséklet-változás esik. Ezért, a számítás meggyorsítására, célszerű időnként nagyobb rácsállandókra, vagyis durvább rácspontheosztásra áttérni. Fenti kiindulási rácsállandóinkat, továbbá R -t és R_m -t úgy vettük fel, hogy a rácspontheosztás durvítása egyszerűen p_1 és p_2 megkétszerezésével, és ennek megfelelően (lásd (13)) q megnégyszerezésével hajtható végre. Így az új rácsállandókkal történő számítás kezdeti értékei gyanánt az előző számítások végeredményei, nevezetesen az r tengelyen minden második érték, azonnal, interpoláció nélkül felhasználható. Minden geometriai konfiguráció esetén 5 lépésváltás lehetséges, kivéve a $b = 5$ esetet, midőn csak 4-szer lehet lépést váltani.

A 3. §-ban szereplő α állandó értékei:
az I. problémánál:

$$\alpha = \alpha_I = 0,172\,943,$$

a II. problémánál:

$$\alpha = \alpha_{II} = 0,116\,067.$$

Tekintettel arra, hogy $t \sim 0$ esetén a 3. § I. problémájából számított

$$\xi = \alpha_I \sqrt{t}$$

függvény írja le a fagyásfelület mozgását, α_I fentebb közölt numerikus értéke ismeretében azonnal látható, hogy a numerikus számítások kezdeti időpontjául (lásd 4. §. C.) a

$$t^* = t_8 (= 8q) = 1,411\,290$$

időpontot választva, $j > 8$ esetén mind a (16), mind pedig a (18) feltétel (az utóbbi legalábbis nem túl nagy j -kre) teljesülni fog. Egyszersmind érvényesek az analóg egyenlőtlenségek a szilárd-magos öntés esetére.

Nyilvánvaló, hogy valamennyi egyenletünk és peremfeltételünk a hőmérsékleti skála eltolásával szemben invariáns (ez fizikai szempontból is evidens). Ezért célszerű a hőmérsékleti skálát a számítások elvégzéséhez 20°C -al úgy eltolni, hogy a szereplő legalacsonyabb hőmérséklet 0:

$$T_0 = T_1 = 0,$$

és így

$$T_2 = 2030,$$

$$\tau = 1980$$

legyen. Ezáltal a (IV) képletben szereplő második tag ($= \varepsilon T_1$) eltűnik,

A kiinduláshoz szükséges, t^* fentebbi értékéhez tartozó kezdeti értékek — melyeket a 3. §-ban közölt leegyszerűsített modellekből, továbbá a 4. § C) pontjában elmondottak alapján számítottunk —, figyelembe véve az imént említett skálaeltolást, az 1. és 2. táblázatban vannak feltüntetve. Ezen táblázatokban az időt jelölő második indexnek (mely az elmondottak értelmében $j = 8$ lenne), a $j = 0$ értéket vettük.

A 3. táblázatban összefoglalva közöljük a numerikus számításokhoz szükséges együtthatók értékeit. Ezen táblázatban egymás alatt az összetartozó (ugyanazon rácsponthoz tartozó) adatok szerepelnek.

Végezetül a 4. és az 5. táblázatban azt foglaltuk össze, hogy milyen határok között mekkora lépésközzel végeztük a numerikus számításokat. Minden egyes geometriai konfiguráció esetén megadtuk, hogy n valamely értéke mellett hány idő-lépésközzel mentünk előre (j index értékhatárai), és ez milyen idő-köznek (t változó értékhatárai) felel meg.

A konkrét számítás azt mutatta, hogy a rendelkezésre álló számológép használati idő mellett elérhető pontosság határain belül a $b = 10$, illetve a $b = 40$ értékekre vonatkozó számítások elejét nem érdemes elvégezni, mert ezek helyett a $b = 5$ illetve a $b = 10$ értékre végzett számítások kezdeti szakaszai kiindulásként felhasználhatók. Erre utalnak a táblázatokban szereplő „ugyanaz, mint $b = 5$ ($b = 10$) esetén” jelzések.

7. §. A numerikus számítások eredményeit feltüntető grafikonok

1. grafikon: az átfagyott réteg vastagsága (ξ) az idő függvényében, a szilárd mag nélküli öntés esetén.

1. a grafikon: az 1. grafikon kezdeti szakasza. (A $b = 10$ értéknek megfelelő görbe nincs feltüntetve).

2. grafikon: az átfagyott rétegek vastagsága ($\bar{\xi}$ és $\bar{\bar{\xi}}$) az idő függvényében (az idő az ordináta-tengelyen van feltüntetve) a szilárd-magos öntés esetén. Nem közvetlenül $\bar{\xi}$ -t, hanem $R - \bar{\xi}$ -t rajzoltuk fel, így a teljes átfagyás pillanata a $\bar{\xi}$ és az $R - \bar{\xi}$ görbék metszésénél közvetlenül leolvasható. A $\bar{\xi}$ görbék mindhárom R_m értékre, az $R - \bar{\xi}$ görbék pedig mindhárom b értékre gyakorlatilag (a rajz hibahatárain belül) azonosak. A $b = 10$ értéknek megfelelő $\bar{\xi}$ görbe nincs feltüntetve.

3., 4. és 5. grafikon: a hőmérsékletek a hely és az idő függvényében, a szilárd mag nélküli öntés esetén. A helykoordináta az abszcissa-tengelyen van felmérve (a 0 pont a forma-anyagnak felel meg, tőle balra az öntvény, jobbra pedig a hőszigetelő réteg van), az idő pedig a görbék paramétere.

3. a grafikon: a hőmérsékletek a hely és az idő függvényében, kis t értékekre. Ez a grafikon, a rajz hibahatárain belül, valamennyi öntés esetére (lásd: 3., 4., 5., 6., 7. és 8. grafikon) egyaránt vonatkozik.

6., 7. és 8. grafikon: a hőmérsékletek a hely és az idő függvényében, az $R_m = 14,33$ sugarú szilárd mag esetén.

Amint arra a 6. § végén utaltunk, a $b = 10$ illetve a $b = 40$ értékekhez tartozó, elegendő kis t -re vonatkozó öntvény-hőmérsékletek, a rajzolási hiba határain belül, megegyeznek az előző, $b = 5$ illetve $b = 10$ értékekhez tartozó hőmérsékletekkel. Ezért, szilárd-magos öntés esetén, a $b = 10$ és a $b = 40$ esetekben a rajzok csak a $t = 695,2$ időponthoz tartozó görbékkel kezdődnek.

Helykímélés végett az $R_m = 10,24$ és az $R_m = 8,19$ sugarú szilárd magok esetére vonatkozó hőmérsékleti görbék közlésétől eltekintünk.

Végezetül a 6. táblázatban közöljük az 5. §-ban leírt ellenőrzési rendszer által szolgáltatott eredményeket. Csak az $R_m = 14,33$ esetre szorítkozunk. A táblázat a (26) alatti egyenletek jobb- és baloldalának közelítő értékei (melyeket a (27) és a (28) alatti képletekkel számítottunk ki) között fennálló relatív hibákat tünteti fel. Nevezetesen a táblázatban a következő értékek szerepelnek:

$$H_1 = \frac{Q_L(0) + Q_O(0)}{S_O(t) + Q_L(t) + Q_O(t)} - 1,$$

$$H_2 = \frac{Q_F(t) + S_F(t)}{Q_F(0) + S_O(t)} - 1,$$

$$H_3 = 1 - \frac{Q_{Sz}(t) + S_{Sz}(t)}{Q_{Sz}(0) + S_F(t)}.$$

Az ezen értékek t -től függő változásában mutatkozó egyenetlenségek a lépésváltozásokkal (rácsállandóváltoztatásokkal) függnek össze.

(Beérkezett: 1963. szeptember 11.)

IRODALOM

- [1] COLLATZ, L.: *Numerische Behandlung von Differenzialgleichungen*. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1951.
 [2] ТИХОНОВ, А. Н.—САМАРСКИЙ, А. А.: *А математikai fizika differenciálegyenletei*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.

1. TÁBLÁZAT

(Szilárd mag nélküli öntés)

$w_{0,0}$	$= w_{1,0} = \dots = w_{M-14,0} = 2030,000$
$w_{M-13,0}$	$= 2029,999$
$w_{M-12,0}$	$= 2029,996$
$w_{M-11,0}$	$= 2029,980$
$w_{M-10,0}$	$= 2029,921$
$w_{M-9,0}$	$= 2029,715$
$w_{M-8,0}$	$= 2029,088$
$w_{M-7,0}$	$= 2027,400$
$w_{M-6,0}$	$= 2023,389$
$w_{M-5,0}$	$= 2014,961$
$w_{M-4,0}$	$= 1999,318$
$v_{M-3,0}$	$= 1893,457$
$v_{M-2,0}$	$= 1385,834$
$v_{M-1,0}$	$= 735,721$
$v_{M,0} = z_0 = u_{0,0}$	$= 85,086$
$u_{1,0} = u_{2,0} = \dots = u_{N,0}$	$= 0$
$\xi_0 = \alpha_1 \sqrt{t^*}$	$= 0,205\ 452$

2. TÁBLÁZAT
(Szilárd-magos öntés)

$\bar{v}_{0,0}$	$= \bar{v}_{1,0} = \dots = \bar{v}_{L-15} = 0$
$\bar{v}_{L-14,0}$	$= 0,001$
$\bar{v}_{L-13,0}$	$= 0,006$
$\bar{v}_{L-12,0}$	$= 0,028$
$\bar{v}_{L-11,0}$	$= 0,128$
$\bar{v}_{L-10,0}$	$= 0,519$
$\bar{v}_{L-9,0}$	$= 1,864$
$\bar{v}_{L-8,0}$	$= 5,961$
$\bar{v}_{L-7,0}$	$= 16,984$
$\bar{v}_{L-6,0}$	$= 43,192$
$\bar{v}_{L-5,0}$	$= 98,247$
$\bar{v}_{L-4,0}$	$= 200,444$
$\bar{v}_{L-3,0}$	$= 368,070$
$\bar{v}_{L-2,0}$	$= 611,020$
$\bar{v}_{L-1,0}$	$= 922,167$
$\bar{v}_{L,0}$	$= 1274,285$
$\bar{v}_{L+1,0}$	$= 1626,404$
$\bar{v}_{L+2,0}$	$= 1937,551$
$w_{L+3,0}$	$= 1997,632$
$w_{L+4,0}$	$= 2012,373$
$w_{L+5,0}$	$= 2021,360$
$w_{L+6,0}$	$= 2026,202$
$w_{L+7,0}$	$= 2028,507$
$w_{L+8,0}$	$= 2029,476$
$w_{L+9,0}$	$= 2029,836$
$w_{L+10,0}$	$= 2029,954$
$w_{L+11,0}$	$= 2029,989$
$w_{L+12,0}$	$= 2029,998$
$w_{L+13,0}$	$= w_{L+14,0} = \dots = w_{M-14,0} = 2030,000$
$w_{M-13,0}$	$= 2029,999$
$w_{M-12,0}$	$= 2029,996$
$w_{M-11,0}$	$= 2029,980$
$w_{M-10,0}$	$= 2029,921$
$w_{M-9,0}$	$= 2029,715$
$w_{M-8,0}$	$= 2029,088$
$w_{M-7,0}$	$= 2027,400$
$w_{M-6,0}$	$= 2023,389$
$w_{M-5,0}$	$= 2014,961$
$w_{M-4,0}$	$= 1999,318$
$\bar{v}_{M-3,0}$	$= 1893,457$
$\bar{v}_{M-2,0}$	$= 1385,834$
$\bar{v}_{M-1,0}$	$= 735,721$
$\bar{v}_{M,0} = z_0$	$= u_{0,0} = 85,086$
$u_{1,0} = u_{2,0}$	$= \dots = u_{N,0} = 0$
$\bar{\xi}_0$	$= \alpha_1 \sqrt{t^*} = 2,205\ 452$
$\bar{\xi}_0$	$= \alpha_{II} \sqrt{t^*} = 0,137\ 885$

3. TÁBLÁZAT

$$p_1 = 0,0625 \ 0000 \cdot 2^n$$

$$p_2 = 0,0639 \ 9423 \cdot 2^n$$

$$q = 0,1764 \ 113 \cdot 4^n$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

n	0	1	2	3	4	5
α	0,976 4894	0,952 9788	0,905 9576	0,811 9153	0,623 8305	0,247 6611
β	0,014 16098	0,028 32195	0,056 64390	0,113 2878	0,226 5756	0,453 1512
γ	0,009 349616	0,018 69923	0,037 39846	0,074 79693	0,149 5939	0,299 1877
δ	0,998 0381	0,996 0839	0,992 1984	0,984 5177	0,969 9074	0,940 8194
η	$2,248 \ 379 \cdot 10^{-6}$	$8,993 \ 516 \cdot 10^{-6}$	$3,597 \ 406 \cdot 10^{-5}$	$1,438 \ 963 \cdot 10^{-4}$	$5,755 \ 850 \cdot 10^{-4}$	$2,302 \ 340 \cdot 10^{-3}$
A	4272,566	ua.	ua.	ua.	ua.	ua.
B	19203,91	ua.	ua.	ua.	ua.	ua.
C	0,0036 88505	0,029 50804	0,236 0644	1,888 515	15,108 12	120,8649
D	0,0017 18058	0,013 74447	0,109 9557	0,879 6459	7,037 168	56,297 34
E	135,9731	271,9461	543,8923	1087,785	2175,569	4351,138
F	89,77460	179,5492	359,0984	718,1968	1436,1968	2872,787
G_5	123,9420	247,8840	495,7681	991,5361	1983,072	3966,144
G_{10}	163,6072	327,2144	654,4289	1308,858	2617,715	5235,431
G_{40}	517,0519	1034,104	2068,20	4136,416	8272,831	16545,66

$$G = G_5, \quad \text{ha } b = 5$$

$$G = G_{10}, \quad \text{ha } b = 10$$

$$G = G_{40}, \quad \text{ha } b = 40$$

4. TÁBLÁZAT
(Szilárd mag nélküli öntés)

b	n	j	t
5	0	0— 17	1,4113— 4,4103*
	1	17— 36	4,4103— 17,818
	2	36— 57	17,818 — 77,092
	3	57— 82	77,092 — 359,35
	4	82—2037	359,35 —88 650,
10	0 } 1 }	ugyanaz, mint $b = 5$ esetén	
	2	36— 57	17,818— 77,092
	3	57— 82	77,092— 359,35
	4	82—1926	359,35 — 83 637,
40	0 } 1 } 2 }	ugyanaz mint $b = 10$ esetén	
	3	57— 82	77,092— 359,35
	4	82—650	369,35 —26 011,
	5	650—941	26 011, —78 579,

* Emlékeztetünk arra, hogy a differencia-képletekkel történő számítások kiindulási időpontjául a $t^* = 1,411290$ időpontot választottuk és ennek felel meg a $j = 0$ időindex.

5. TÁBLÁZAT
(szilárd—magos öntés)

$$R_m = 8,1913$$

b	n	j	t
5	0	0— 97	1,4113— 18,523
	1	97— 187	18,523 — 82,031
	2	187— 292	82,031 — 378,40
	3	292— 410	378,40 — 1 710,7
	4	410—2206	1710,7 —82 820,
40	0 } 1 }	Ugyanaz, mint $b = 5$ esetén	
	2	187— 292	82,031 — 378,40
	3	292— 408	378,40 — 1 688,1
	4	408—1517	1688,1 —51 772,
$R_m = 10,239$			
5	0	0— 97	2,1169— 18,523
	1	97— 187	18,523 — 82,031
	2	187— 292	82,031 — 378,40
	3	292— 409	378,40 — 1 699,4
	4	409—2462	1699,4 —94 416,
40	0 } 1 }	Ugyanaz, mint $b = 5$ esetén	
	2	187— 292	82,031 — 378,40
	3	292— 407	378,40 — 1 676,8
	4	407—1433	1676,8 —48 012,

5. TÁBLÁZAT (folytatás)

$R_m = 14,335$			
5	0	0 — 17	1,4113 — 4,4103
	1	17 — 36	4,4103 — 17,818
	2	36 — 160	17,818 — 189,99
	3	160 — 303	189,99 — 1 982,3
	4	303 — 1751	1982,3 — 67 376,
10	0 }	ugyanaz, mint $b = 5$ esetén	
	1 }		
	2 }	36 — 160	17,818 — 189,99
	3	160 — 298	189,99 — 1925,8
	4	298 — 1611	1925,8 — 61 223,
40	0 }	ugyanaz, mint $b = 10$ esetén	
	1 }		
	2 }	160 — 276	189,99 — 1 677,4
	3	276 — 1394	1677,4 — 52 168,
	4		

6. TÁBLÁZAT

t	$b = 5$		
	H_1	H_2	H_3
2,1169	0,00124	0,00213	0,00130
2,9990	0,00230	0,00777	0,05330
4,4103	0,00330	0,01202	0,07215
7,9385	0,00606	0,02531	0,19209
12,172	0,00814	0,03067	0,15709
17,818	0,00979	0,03333	0,13175
31,930	0,01342	0,04877	0,20474
51,689	0,01688	0,05545	0,16050
77,092	0,01952	0,05866	0,13217
108,14	0,02159	0,05992	0,11271
144,83	0,02341	0,06025	0,09847
189,99	0,02498	0,05996	0,08664
240,80	0,02635	0,05932	0,07705
300,08	0,02753	0,05840	0,06856
367,82	0,02858	0,05734	0,06118
514,59	0,02491	0,06179	0,08188
1 112,9	0,03029	0,06307	0,03915
1 372,6	0,03201	0,06341	0,03234
1 677,4	0,03168	0,06381	0,02757
1 812,9	0,03148	0,06396	0,02610
2 072,6	0,01386	0,06521	0,02425
2 388,7	0,01354	0,06743	0,01911
2 930,6	0,01335	0,06894	0,01406
3 879,0	0,01354	0,06900	0,01147
5 956,4	0,01463	0,06601	0,01367
9 795,2	0,01707	0,05975	0,01984
14 266	0,01971	0,05404	0,02510
19 234	0,02237	0,04920	0,02917
24 698	0,02504	0,04512	0,03236
30 795	0,02773	0,04158	0,03495
37 795	0,03043	0,03854	0,03707
45 879	0,03314	0,03578	0,03893
55 498	0,03580	0,03342	0,04041
67 376	0,03861	0,03124	0,04176

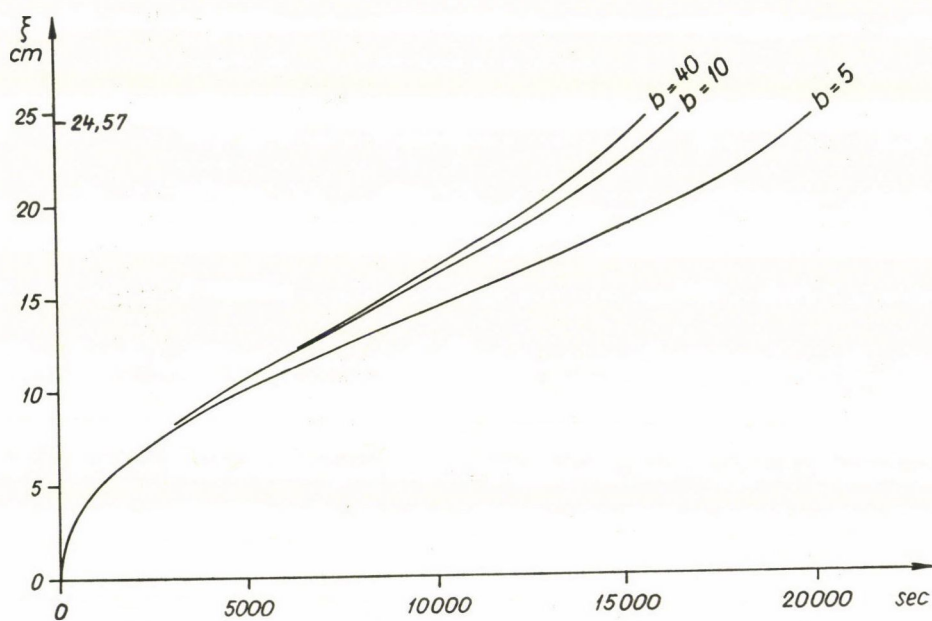
6. TÁBLÁZAT (folytatás)

 $b = 10$

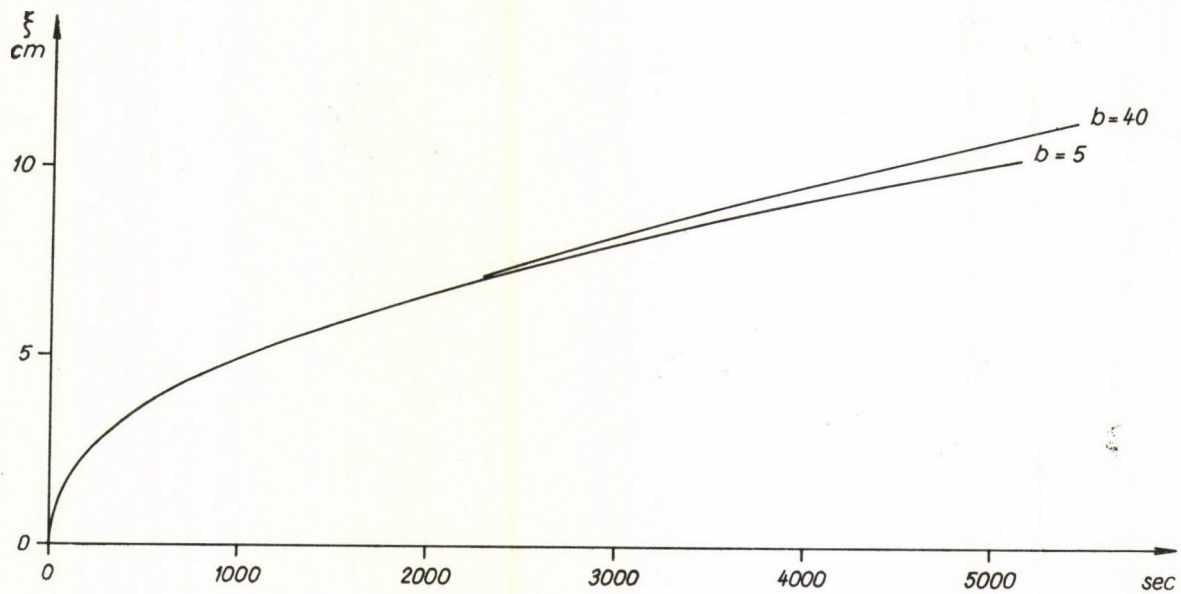
t	H_1	H_2	H_3
31,930	0,01342	0,04877	0,20474
51,689	0,01688	0,05545	0,16050
77,092	0,01952	0,05866	0,13217
108,14	0,02159	0,05992	0,11284
144,83	—	0,06025	0,09909
189,99	0,02498	0,05996	0,08844
240,80	0,02635	0,05932	0,08064
300,08	0,02753	0,05840	0,07480
367,82	0,02858	0,05734	0,06968
514,59	0,02491	0,06056	0,10930
695,24	0,02733	0,06166	0,09657
887,17	0,02911	0,06167	0,08738
1 112,9	0,03069	0,06111	0,07941
1 361,3	0,03261	0,06029	0,07383
1 666,1	0,03301	0,05922	0,06673
1 801,6	0,03294	0,05875	0,06453
2 016,1	0,01700	0,05877	0,08778
2 332,3	0,01726	0,05892	0,07764
2 738,7	0,01778	0,05790	0,06957
3 280,6	0,01868	0,05625	0,05799
4 048,4	—	0,05433	0,04934
5 267,7	0,02101	0,05242	0,04243
7 164,5	0,02237	0,05099	0,03912
10 326	0,02387	0,04958	0,04010
15 113	0,02583	0,04730	0,04458
21 390	0,02825	0,04420	0,05030
28 887	0,03089	0,04109	0,05575
37 694	0,03367	0,03826	0,06042
48 216	0,03640	0,03567	0,06457
61 223	0,03908	0,03336	0,06799

 $b = 40$

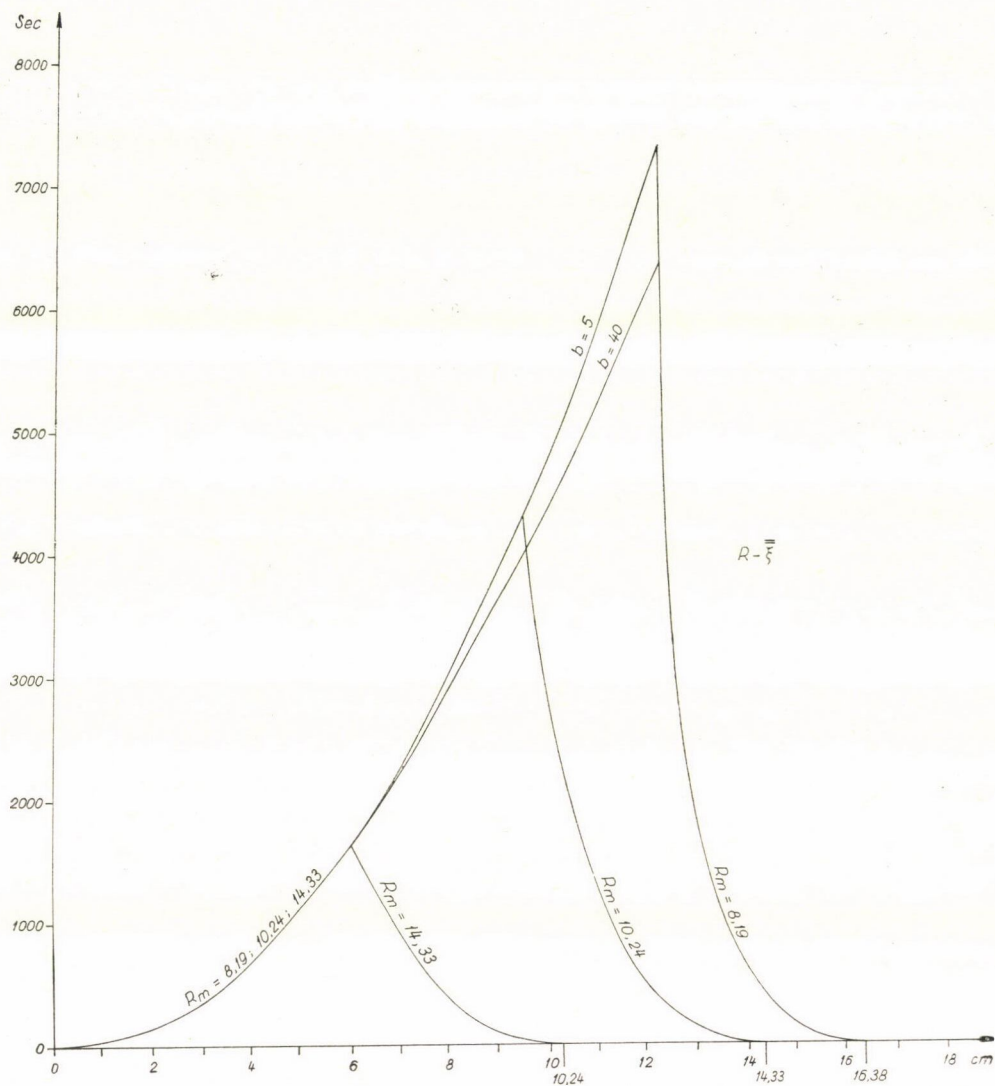
t	H_1	H_2	H_3
514,59	0,02491	0,06056	0,10976
695,24	0,02727	0,06166	0,09858
887,17	0,03365	0,06167	0,09099
1 112,9	0,03069	0,06113	0,08566
1 361,3	0,03261	0,06029	0,08201
1 666,1	0,03294	0,05919	0,07929
1 812,9	0,01700	0,06032	0,12221
2 038,7	0,01668	0,06110	0,11779
2 309,7	0,01720	0,06081	0,11333
2 716,1	0,01791	0,05935	0,10831
3 258,1	0,01894	0,05694	0,10390
4 025,8	0,02042	0,05382	0,10040
5 064,5	0,02211	0,05056	0,09816
6 464,5	0,02406	0,04752	0,09786
8 316,1	0,02602	0,04491	0,09869
10 619	0,02806	0,04277	0,10031
13 510	—	0,04084	0,10236
17 213	0,03234	0,03906	0,10473
21 910	0,03454	0,03726	0,10751
28 277	0,03694	0,03557	0,11107
38 400	0,03921	0,03382	0,11566
52 168	0,04191	0,03218	0,12238



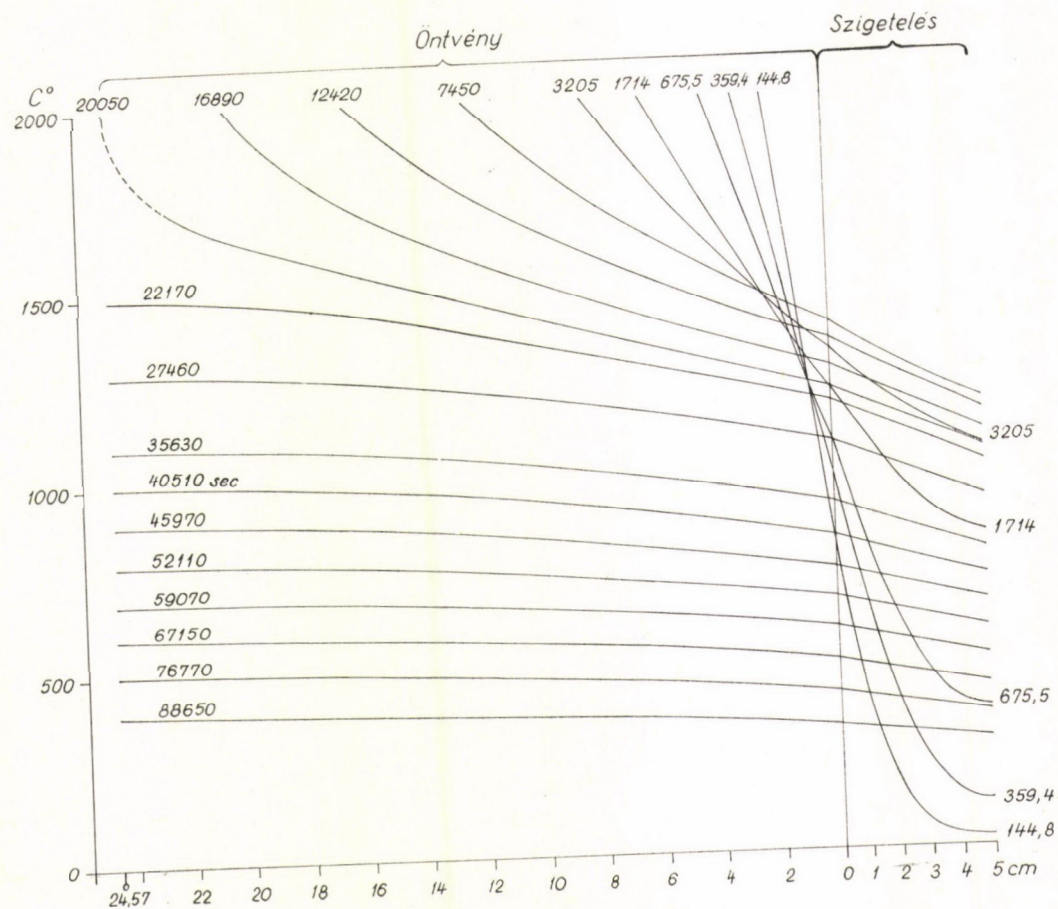
1. grafikon



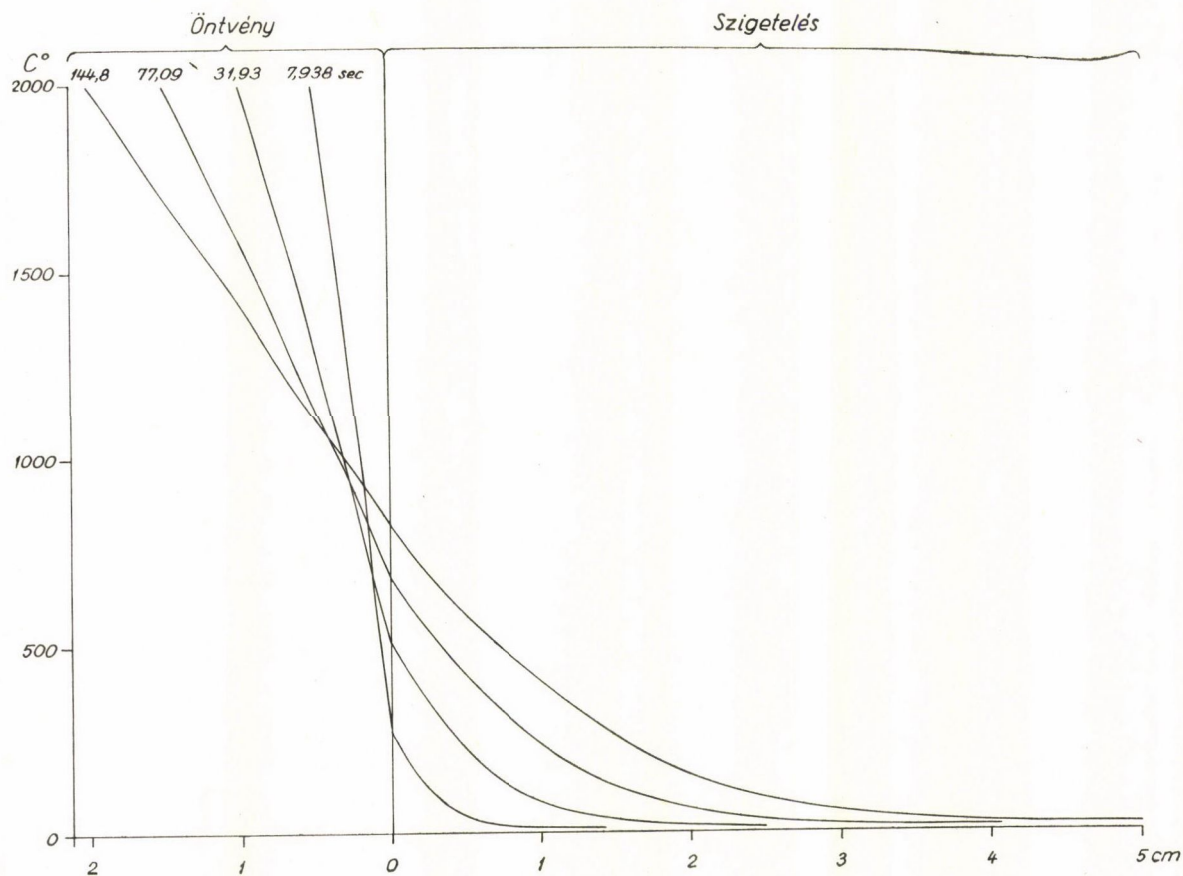
1.a grafikon



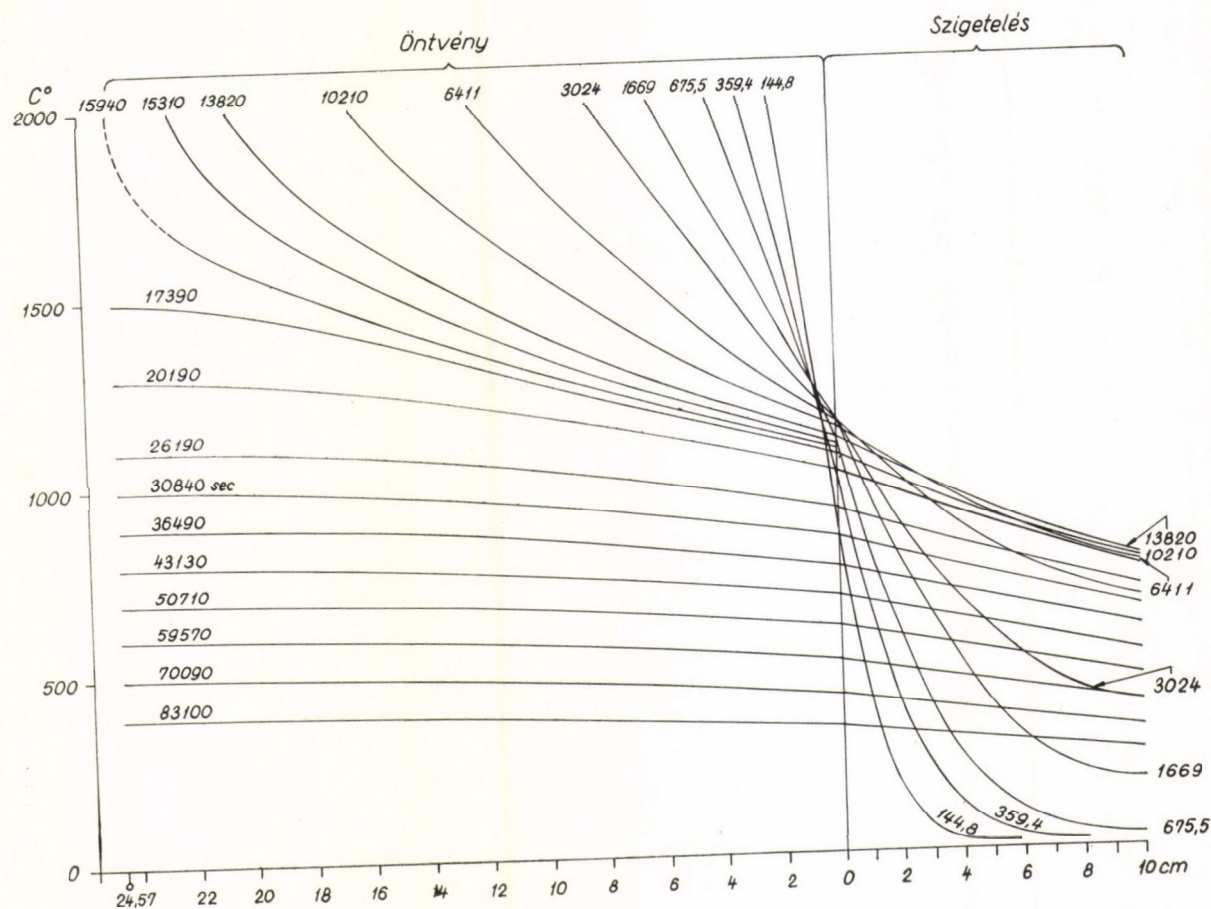
2. grafikon.



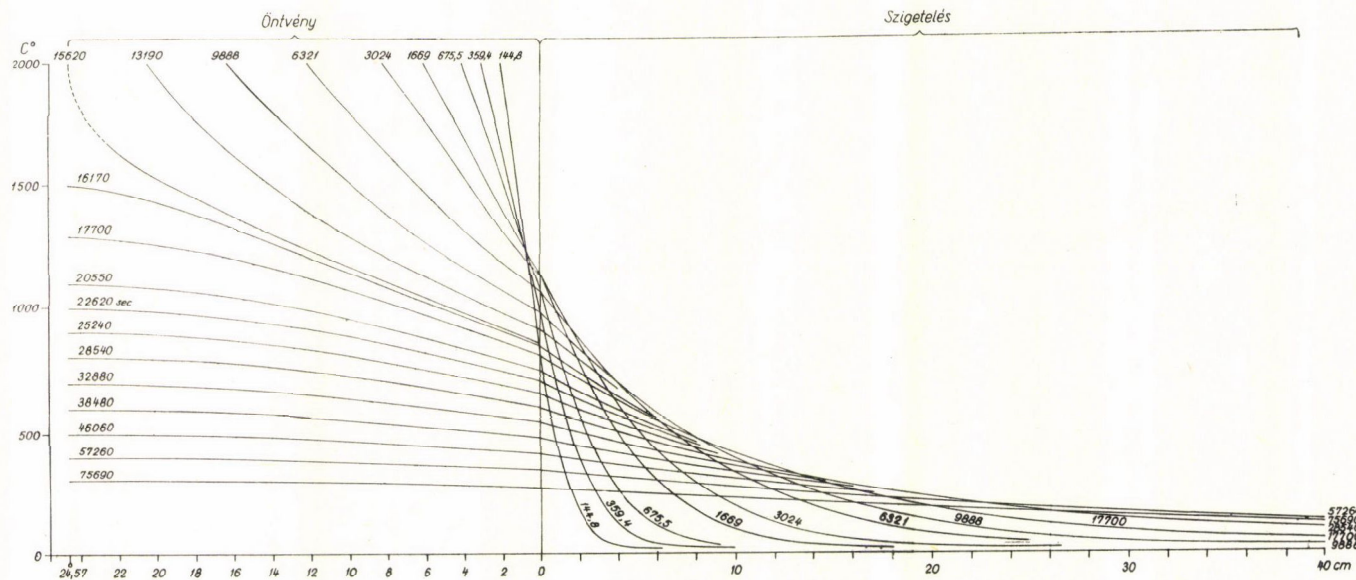
3. grafikon



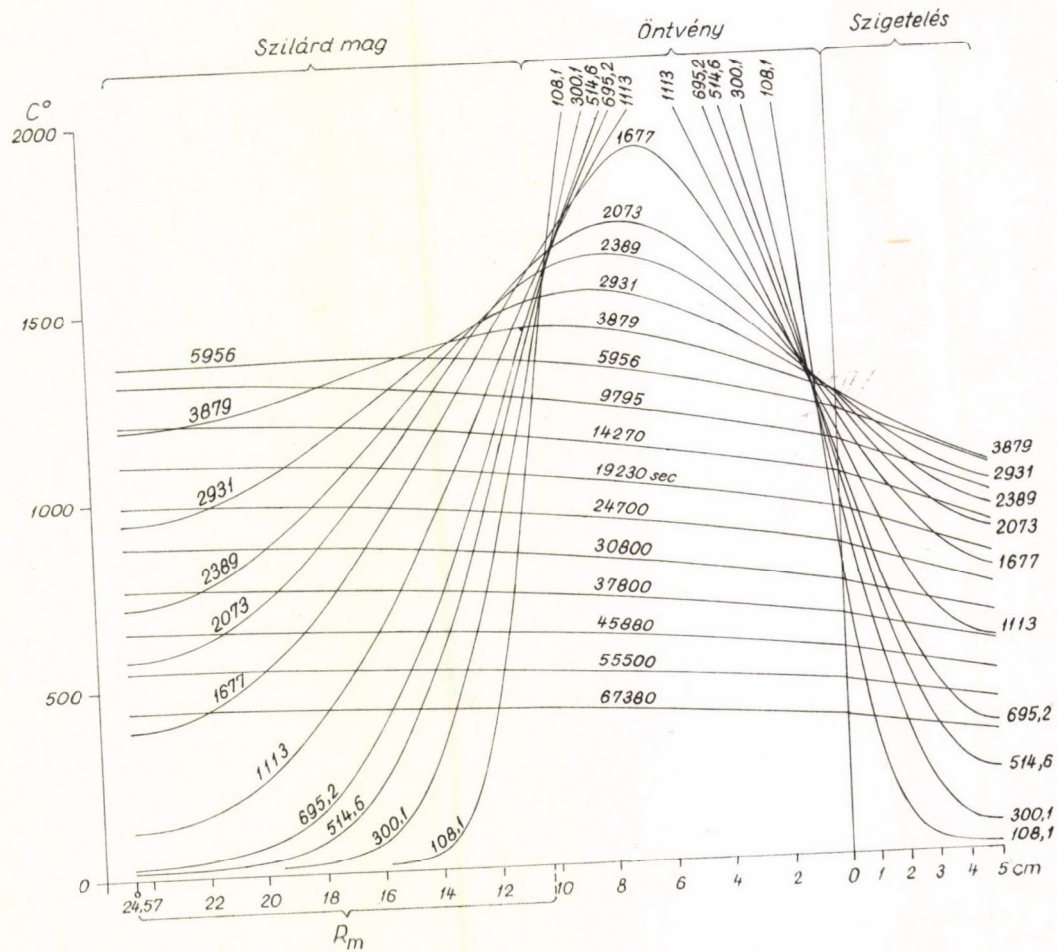
3. a grafikon.



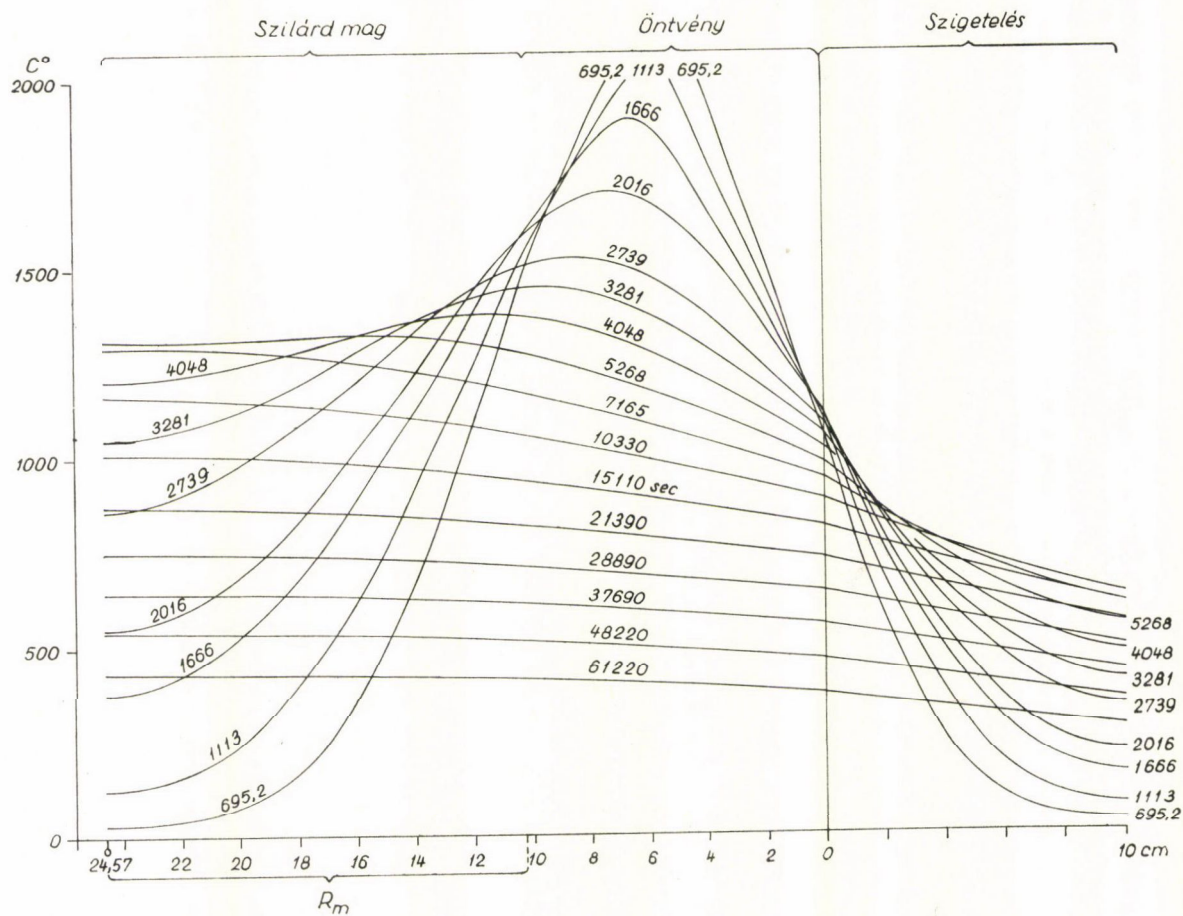
4. grafikon.



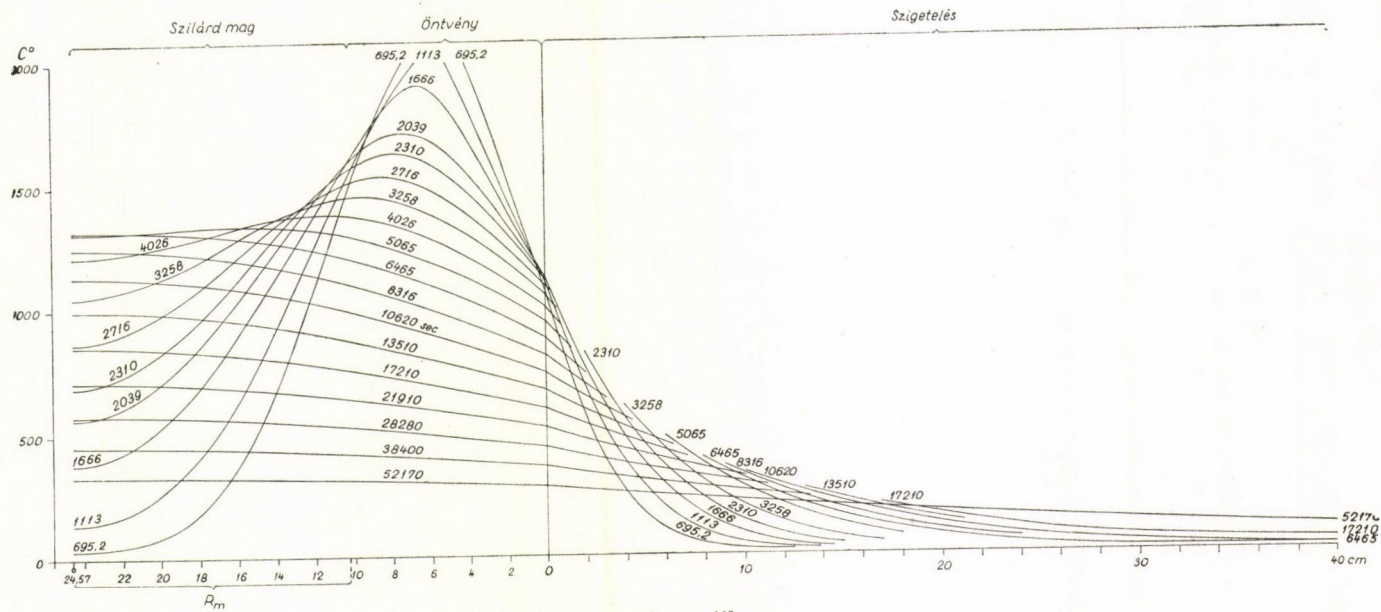
5. grafikon.



6. grafikon.



7. grafikon.



ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОХЛАЖДЕНИЯ ШАРОВИДНЫХ ОТЛИВОК

GY. ADLER

Резюме

В работе даётся численный метод решения двух способов литья шарообразных отливок в формы с толстой изоляционной прокладкой. Два процесса литья отличаются друг от друга тем, что в одном случае литьё происходит при наличии в отливке твердого, из того же материала, что и отливка, в ней концентрически расположенного шарообразного ядра.

Расположение отдельных теплопроводных сред (в случае литья при наличии твердого ядра) показано на рис. 1. Температура, преобладающая на отдельных стадиях, изображена на рис. 2 (также в случае литья при наличии твердого ядра).

В случае литья без твердого ядра температуры должны удовлетворять дифференциальным уравнениям (1), (2), (3) с краевыми условиями (4), (5), (6), (7), (8), (9) и (10). Функция $\xi(t)$ (толщина затвердевшей сплавки), входящая в краевые условия, так же неизвестна, она определяется из написанных уравнений.

Температуры литья при наличии ядра должны удовлетворять уравнениям (1), (2), (3) и условиям (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10) и (10).

В качестве метода решения был использован так называемый метод сеток (метод конечных разностей). Разностные формулы, соответствующие уравнениям и условиям (1)–(10) можно найти в § 4 под соответствующими номерами, обозначенными римскими цифрами (I), ..., (X). В целях наглядности эти разностные формулы показаны на рис. 5 и 5а, формулы, соответствующие литью при наличии твердого ядра, представлены на рис. 6 и 6а. Эти формулы не пригодны для вычислений начальной стадии процесса охлаждения ($t = 0$). Для определения процессов на начальной стадии сделана упрощенная модель, решение которой может быть получено точным методом.

В § 5 даются формулы для определения погрешности вычисления.

Работа с математической точки зрения содержит одну новую идею: разностную формулу (IX), соответствующую условию затвердевания (9).

Метод имеет применение и в других случаях (например, в случае цилиндрично-симметрического или линейного расположения).

ÉTUDE DU PROCESSUS DE REFROIDISSEMENT D'UN MOULAGE DE FORME SPHÉRIQUE

par
GY. ADLER

Résumé

Dans ce travail est présentée une méthode numérique pour la détermination de la température d'un moulage de forme sphérique, le coulage s'effectuant dans un moule entouré d'une large couche isolatrice. Cette méthode se réfère à deux procédés de coulage. Les deux procédés diffèrent l'un de l'autre par le fait que dans l'un des cas un noyau solide de forme sphérique, de matière identique à celle du moulage et concentriquement colloqué, vient s'insérer dans le moulage pendant la fonte, et ce noyau entre dans la construction du moulage. Dans l'autre cas la fonte s'effectue sans le noyau solide.

La collocation des milieux conducteurs de la chaleur (dans le cas de la fonte avec le noyau solide) est indiquée sur la figure 1. On a indiqué (également dans le cas du noyau solide) les températures correspondantes aux parties différentes sur la figure 2.

Dans le cas exempt de noyau solide les températures doivent satisfaire aux équations différentielles (1), (2), et (3) avec les conditions aux limites (4), (5), (6), (7), (8), (9) et (10). La fonction $\xi(t)$ (la largeur du moulage déjà consolidé) qui figure dans les conditions est aussi inconnue et peut être déterminée à partir des équations données.

Dans le cas du noyau solide les températures satisfont aux équations (1), (2), (2), (3) et aux conditions aux limites (4), (5), (6), (6), (7), (8), (9), (9), (10) et (10).

Comme méthode de solution nous avons appliqué la méthode des différences finies. Les formules de différences finies correspondant aux équations et aux conditions (1)–(10) se trouvent dans le § 4, indiquées en chiffres romains (I), . . . , (X)) respectifs. Pour plus de clarté, ces formules sont aussi indiquées sur les figures 5 et 5a; les formules relatives au moulage sans noyau peuvent se lire sur les figures 6 et 6a.

Ces formules ne conviennent pas aux calculs de la phase initiale ($t \approx 0$) du processus. Pour la détermination de cette phase initiale nous avons édifié dans le § 3 un modèle plus simplifié, pour lequel la solution peut être calculée d'une manière exacte.

Dans le § 5 nous avons établi des formules pour la détermination des erreurs de calcul, considérés dans un certain sens.

L'ouvrage, du point de vue mathématique, contient une seule idée modeste, à savoir la formule des différences finies correspondant à la condition de congélation (IX).

La méthode, mutatis mutandis, s'applique aussi à d'autres cas (p. e. dans le cas d'une collocation avec symétrie cylindrique ou bien d'une collocation linéaire).



EGY SZABADSÁGFOKÚ LENGŐ RENDSZER REZONANCIA VIZSGÁLATA FŰRÉSZFOGALAKÚ PERIODIKUS GERJESZTŐERŐK ESETÉN

FÉNYES TAMÁS, MEITZEN NÁNDOR¹ és TÓTH KÁROLY

Bevezetés

A jelen dolgozatban egy, a bányászati jövesztőgépek méretezésével kapcsolatban felmerült probléma során az egy szabadságfokú lengő rendszer differenciálegyenletének megoldását tárgyaljuk. A továbbiakban a méretezéshez szükséges rezonanciavizsgálat analóg számológéppel való végrehajtását mutatjuk be.

1. A kőzetforgácsolás dinamikai hatásainak vizsgálatához szükséges matematikai modell felállítása

A bányászat gépesítésének egyik legfőbb problémája a természetben található kőzetek, ásványi anyagok forgácsoló szerszámokkal, gépi úton történő leválasztása. A gépiparban általánosan használatosak a fémforgácsoló szerszámok különböző típusai. A bányászati jövesztőgépeken használatos maró-fűrőgyalu munkaszerszámok vágási folyamatának fizikai törvényszerűségei igen sokban különböznek a fémek forgácsoló megmunkálásánál ismert törvényszerűségektől.

Ezek a különbségek részben már a jövesztőberendezéseken alkalmazott vágószerszámok geometriai formáinak eltéréséből erednek. Ezen túlmenően fontos jelentősége van a vágóerőben mutatkozó periodikus jellegű egyenlőtlenségek szerepének is. Jelen tanulmány lüktető erőhatások által okozott gerjesztett lengések kialakulásával foglalkozik. Ezen hatások főképpen a nagy fogásmélységű szénjövesztés folyamatának kapcsán keletkeznek.

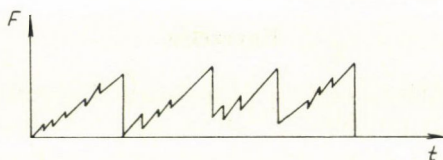
Az 1. ábrán bemutatunk TOPCSIEV [1] alapján egy szénforgácsolási kísérletnél felvett diagramot. A görbe az F vágóerőnek időbeli változását mutatja állandó haladási sebesség és vágási mélység esetén. Láthatóan az erőingadozás csaknem szabályos háromszög alakú ismétlődő lüktetést mutat, gyakran igen egyenletes lefutású periódusok alakulnak ki. A jelenség fizikai magyarázatát a 2. ábrán az alábbiakban világíthatjuk meg.

A forgácsolandó kőzet a vágókéssel az I. pontban találkozódik. Ha a kés bizonyos v sebességgel továbbhalad, a kőzetben először úgy mozoghat előre, hogy a vágóél homlokfelülete mentén az anyagot apró részecskékre töri. Ez az erősen törött anyaghalmoz a vágóél elején halmozódik fel. A felhalmozódás alatt a kés egyre mélyebben halad, a késre ható F vágási erő egyre növekszik.

¹ Bányászati Kutató Intézet.

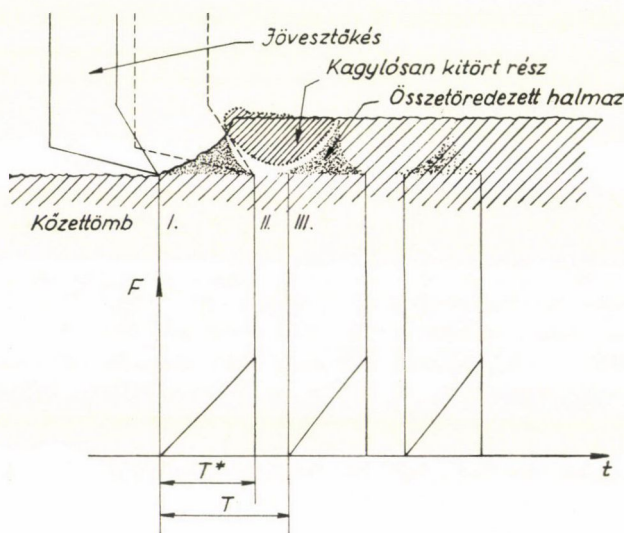
A II. helyzetben a kés már olyan nagy vágóerőt kell felvegyen, ami az anyagnak a megnövekedett felületen történő aprózódása helyett úgy hat, hogy legyőzi az ép közet nyírási szilárdságát és az anyag nagy darabban kagylósan kitörik a kés előtt. Ezután a kés lényegében tehermentesülve halad, egészen a III. pontig, és ettől kezdve a folyamat periodikusan ismétlődhet, ahogyan az előzőekben láttuk.

Az egyes vágási szakaszokban ébredő erőhatásokat ábrázolva eredményül az 1. ábra oszcillogramjához hasonló diagramot nyerünk.



1. ábra.

Azerőhatás ingadozása az ábra szerint T időtartamú periódusokban ismétlődik. Egy perióduson belül a terhelt és terheletlen szakasz relatív nagysága a közet fizikai jellegétől és a kés geometriai viszonyaitól függ. A folyamat kialakulására számos változó hat. Általában a közet ridegségével és a vágási



2. ábra.

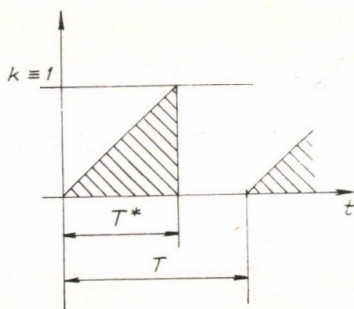
mélységgel nő a kagylósan kitört rész relatív nagysága, ugyanilyen nagyságban csökken a $\frac{T^*}{T}$ arány értéke és ugyanígy nő az F forgácsoló erő.

A forgácsoló erő nagysága a fogásmélységgel jó közelítéssel lineárisan nő és nagysága igen kevésbé függ a kés v haladási sebességétől. A rideg kőzeteknél, ha a fogásmélység kicsiny és a kés csak éppen „karcol” az F erő oszcillo-

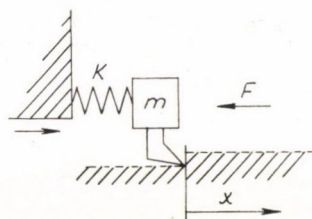
gramja szabálytalan alakú, de ha a fogásmélységet növeljük, az ismertetett háromszögalakú periódusos ingadozás egyre inkább előtűnik és uralkodóvá válik.

A fent leírt fizikai folyamat tehát a forgácsolás jelenségében egy rejtett periodikus hatást mutat. Felvetődik a kérdés, milyen gerjesztett lengés alakul ki a forgácsolószerszám rugalmas rendszerében e lüktető erőhatás következtében.

A fémforgácsoló szerszámgépeken a forgácsolószerszám rugalmas megfogása miatt találkozunk öngerjesztett lengések kialakulásával [2]. Ezek a lengések azonban a kés hosszirányú és keresztirányú merevségétől függenek elsősorban és egészen más fizikai folyamat következtében lépnek fel.



3. ábra.



4. ábra.

K. MAGNUS [3] foglalkozik nem szinuszos gerjesztő hatások vizsgálatával; különböző négyszöghullám jellegű periodikus erőhatásokat vizsgál.

Feladatul tűzzük ki, hogy az előzőekben ismertetett fizikai folyamat kapcsán egy adott lengőrendszer rezonancia-görbéinek alakulását különböző geometriai alakú, háromszög-formájú lüktetőhatások figyelembevételével vegyük vizsgálat alá.

A folyamat matematikai tárgyalásánál a 3. ábra szerint a lineárisan emelkedő erőhatású szakasz időtartamát T^* -gal, a teljes periódus időtartamát T -vel jelöljük. A maximális erőhatás nagyságát mindig az egységgel vesszük egyenlőnek. Változónak tekintjük a $\frac{T^*}{T}$ arány és külön vizsgáljuk a $T = T^*$ értéket, mint a gyakorlat számára a szénjövésztés műveletében a legfontosabb esetet.

A jövésztőszerszámot szimbolizáló egyszabadságfokú lengőrendszerben a 4. ábra szerint a következő jelöléseket használjuk: m a szerszám redukált tömege, K a rendszer rugóállandója $\frac{kp}{cm}$ dimenzióval).

A mozgásegyenlet általános alakja

$$m \frac{d^2 x}{d\tau^2} + d \frac{dx}{d\tau} + Kx = F(\tau).$$

A csillapítatlan rendszer sajátfrekvenciája $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$. A mozgásegyenletet $t = \omega\tau$ új változó bevezetésével egyszerű dimenzió nélküli alakra hozzuk, ekkor

a mozgásegyenlet a következő alakú lesz:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2D \frac{dx}{dt} + x = F(t).$$

Az egyenletben az első derivált együtthatójában $D = \frac{d}{2\sqrt{Km}}$, a LEHR-féle csillapítási tényező, dimenzió nélküli mennyiség. Előjele a rendszer stabilitását fejezi ki, esetünkben csak stabilis lengésekkel foglalkozunk, ezeknél $D \geq 0$.

2. A differenciálegyenlet periodikus megoldásának meghatározása

Írjuk fel ismét az

$$(1) \quad y'' + 2Dy' + y = F(t) \quad (0 \leq t < \infty)$$

differenciálegyenletet, melynek egy periodikus partikuláris megoldását kívánjuk meghatározni, ha $F(t)$ egy T periódusú függvény, és

$$(2) \quad F(t) = \begin{cases} \frac{t}{T^*}, & \text{ha } 0 \leq t \leq T^*, \\ 0, & \text{ha } T^* < t \leq T. \end{cases} \quad (T^* \leq T)$$

azonkívül $0 < D < 1$.

Ilyen feladatok megoldásánál szokás a Fourier-módszert alkalmazni, vagy előírt kezdeti feltételek esetén a Laplace-transzformációt vagy a Mikusiński-féle operátormódszert. Mi jelen dolgozatban nem követjük egyik módszert sem. Előzőt azért nem, mert a Fourier-módszerrel a megoldás csak végtelen sor alakjában kapható meg, utóbbiakat azért nem, mert csak (1) periodikus megoldását kívánjuk meghatározni, az operátorszámítás alkalmazása viszont ekkor nem látszik célszerűnek.

Az alábbiakban igen elemi módon fogjuk a keresett periodikus megoldást megkapni.

Mivel $D < 1$, az (1)-hez tartozó homogén egyenlet általános megoldása

$$(3) \quad ce^{-Dt} \cos \beta t + de^{-Dt} \sin \beta t,$$

itt $\beta = \sqrt{1 - D^2}$, c és d pedig tetszőleges állandók.

Mivel periodikus megoldást keresünk, ezért a $0 \leq t \leq T$ intervallumra szorítkozhatunk, vagyis a szóbanforgó periodikus megoldást elegendő erre az intervallumra meghatározni. Tekintsük tehát a $(0, T)$ intervallumot. Ennek (T^*, T) részintervallumán (1) általános megoldása nyilvánvalóan (3)-mal egyezik meg. A $(0, T^*)$ intervallumon viszont (1)-nek egy partikuláris megoldását keresve tegyünk kísérletet

$$(4) \quad y_p(t) = At + B$$

alakú megoldással. (4)-et (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy

$$2DA + At + B = \frac{t}{T^*} \quad (0 \leq t \leq T^*),$$

és az együttthatók összehasonlításával

$$A = \frac{1}{T^*}, \quad B = -\frac{2D}{T^*},$$

vagyis egy a $(0, T^*)$ intervallumra szóló partikuláris megoldás

$$y_p = \frac{t - 2D}{T^*},$$

amelyből az erre az intervallumra érvényes általános megoldás

$$(5) \quad y(t) = \frac{t - 2D}{T^*} + ae^{-Dt} \cos \beta t + be^{-Dt} \sin \beta t,$$

ahol a, b tetszőleges állandók. Az elmondottakból tehát következik, hogy (1) általános megoldása

$$(6) \quad y(t) = \begin{cases} \frac{t - 2D}{T^*} + ae^{-Dt} \cos \beta t + be^{-Dt} \sin \beta t, & \text{ha } 0 \leq t \leq T^*, \\ ce^{-Dt} \cos \beta t + de^{-Dt} \sin \beta t, & \text{ha } T^* \leq t \leq T. \end{cases}$$

(6)-tal tehát leírtuk (1) általános megoldását külön-külön a $(0, T^*)$, illetve a (T^*, T) intervallumon. Az egész $(0, T)$ szakaszon (6) csak akkor megoldása (1)-nek, ha a $t = T^*$ pontban is folytonosan differenciálható. Ez a követelmény az addig szabadon választhatóaknak tekintett a, b, c, d paraméterekből kettőt megköt és ekvivalens a következő két egyenlettel:

$$1 - \frac{2D}{T^*} + ae^{-DT^*} \cos \beta T^* + be^{-DT^*} \sin \beta T^* = ce^{-DT^*} \cos \beta T^* + de^{-DT^*} \sin \beta T^*,$$

$$\frac{1}{T^*} - aDe^{-DT^*} \cos \beta T^* - a\beta e^{-DT^*} \sin \beta T^* - bDe^{-DT^*} \sin \beta T^* + b\beta e^{-DT^*} \cos \beta T^* =$$

$$= -cDe^{-DT^*} \cos \beta T^* - c\beta e^{-DT^*} \sin \beta T^* - dDe^{-DT^*} \sin \beta T^* + d\beta e^{-DT^*} \cos \beta T^*. \quad (7)$$

(7) teljesülése esetén tehát (6) előállítja (1) egyenletnek általános megoldását a $(0, T)$ intervallumon. Ez az általános megoldás két szabadon választható állandót tartalmaz, amelyek megfelelő választásával kaphatjuk meg a keresett periodikus megoldást. Mivel a $(0, T)$ intervallumon kapott megoldást a $t = T$ ponton túl periodikusan folytatjuk, a $T, 2T, 3T, \dots, kT$ ($k = 1, 2, \dots$) pontokban folytonosan differenciálhatónak kell lennie, ami azt jelenti, hogy a periodikus megoldásra nézve fenn kell állnia annak, hogy a $t = 0$ illetve $t = T$ pontokban mind a függvényértékek, mind a differenciáhányadosok

értékei megegyeznek. Ez a követelmény a még szabadon választható állandókat is meghatározza és ekvivalens az alábbi két egyenlettel:

$$(8) \quad \begin{aligned} -\frac{2D}{T^*} + a &= ce^{-DT} \cos \beta T + de^{-DT} \sin \beta T, \\ \frac{1}{T^*} - aD + b\beta &= -cDe^{-DT} \cos \beta T - c\beta e^{-DT} \sin \beta T - \\ &\quad - Dde^{-DT} \sin \beta T + \beta de^{-DT} \cos \beta T. \end{aligned}$$

(7) és (8) tehát az a, b, c, d mennyiségekre nézve egy négyismeretlenes lineáris algebrai egyenletrendszer, melyet megoldva megkapjuk azokat az együtt-hatókat, amelyeket a (6) általános megoldásba behelyettesítve előáll a keresett partikuláris, periodikus megoldás. Az egyenletrendszert egyszerűen megoldva adódik, hogy

$$(9) \quad \begin{aligned} a = P(T) \Big\{ &M(T - T^*) [QN(T) + RM(T) - R] + \\ &+ N(T - T^*) [RN(T) - QM(T) + Q] - UN(T) - \frac{2D}{T^*} M(T) + \frac{2D}{T^*} \Big\}, \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} b = P(T) \Big\{ &M(T - T^*) [RN(T) - QM(T) + Q] - \\ &- N(T - T^*) [QN(T) + RM(T) - R] - \frac{2D}{T^*} N(T) + UM(T) - U \Big\}, \end{aligned}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} c = P(T) \Big\{ &RM(T + T^*) e^{2DT^*} + QN(T + T^*) e^{2DT^*} - \\ &- \frac{2D}{T^*} M(T) - UN(T) - RM(T^*) - QN(T^*) + \frac{2D}{T^*} \Big\}, \end{aligned}$$

$$(12) \quad \begin{aligned} d = P(T) \Big\{ &RN(T + T^*) e^{2DT^*} - QM(T + T^*) e^{2DT^*} + \\ &+ UM(T) - \frac{2D}{T^*} N(T) + QM(T^*) - RN(T^*) - U \Big\}, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} M(T) &= e^{-DT} \cos \beta T, & N(T) &= e^{-DT} \sin \beta T, \\ P(T) &= \frac{1}{1 + e^{-2DT} - 2e^{-DT} \cos \beta T}, & Q &= \frac{D}{\beta} + \frac{1 - 2D^2}{\beta T^*}, \\ R &= \frac{2D}{T^*} - 1, & U &= \frac{1 - 2D^2}{\beta T^*}. \end{aligned}$$

Műszaki szempontból fontos speciális eset, amikor $T^* = T$. Ekkor (6), az

$$(13) \quad y(t) = \frac{t - 2D}{T} + a e^{-Dt} \cos \beta t + b e^{-Dt} \sin \beta t \quad (0 \leq t \leq T)$$

alakra redukálódik, a periodikus megoldást adó a, b együtthatók pedig (9) és (10)-ből $T^* = T$ helyettesítéssel

$$(14) \quad a = \frac{1 - e^{-DT} \cos \beta T + \frac{D}{\beta} e^{-DT} \sin \beta T}{1 - 2 e^{-DT} \cos \beta T + e^{-2DT}},$$

$$b = \frac{\frac{D}{\beta} (1 - e^{-DT} \cos \beta T) - e^{-DT} \sin \beta T}{1 + e^{-2DT} - 2 e^{-DT} \cos \beta T}.$$

Igen fontos a periodikus megoldás maximumának, illetve minimumának ismerete. Ehhez a periodikus megoldás szélső értékének helyeit is ki kell számítani, ami transzcendens egyenletek gyökeinek meghatározását teszi szükségessé. Ezt elkerülendő igen célszerű az egész feladatnak analóg számológéppel való megoldása is, ami tetemes numerikus számítási munkát takarít meg.

3. Az (1) differenciálegyenlet rezonanciagörbéinek előállítás analóg számológéppel

A 2.-ban bemutatott elméleti megoldás alapján az 1.-ben vázolt feladatot tehát csak hosszas numerikus munkával tudjuk megoldani. Az alábbiakban bemutatjuk, hogy analóg számológép alkalmazásával az (1) differenciálegyenlet rezonanciagörbéi gyorsan, a gyakorlatnak megfelelő pontossággal ábrázolhatók.

A feladatot MN-7 típusú analóg számológépen oldottuk meg, de az alább vázolt módon bármely más — megfelelő vezérlő berendezést tartalmazó — analóg gépen megoldható az (1) differenciálegyenlet. Elvileg megkaphatjuk a megoldást pl. függvénygenerátor alkalmazásával is. Azonban az általánoságban használt diódás függvénygenerátorok nem előnyösek erre a célra, mert az analóg gép gyorsaságából származó előnyök a paraméterváltoztatás kényelmetlenségei miatt elvesznek.

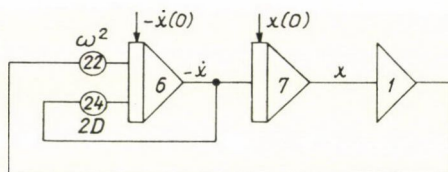
Az (1) differenciálegyenlet homogén alakjának megoldása nem jelent problémát. Egy ilyen, ún. csillapított harmonikus oszcillátor vázlatos programját láthatjuk az 5. ábrán. Itt 6 és 7 integráló, 1 előjelfordító erősítő. A csillapítási tényező értékét a 24-es, a sajátfrekvenciát a 22-es potenciométeren állítjuk be. Az inhomogén egyenlet programvázlata ettől csak annyiban tér el, hogy a 6-os integráló erősítőre bemenőjelként még — a megfelelő módon előállított — $F(t)$ gerjesztő függvényt is rácsatoljuk (6. ábra).

Az alábbiakban külön tárgyaljuk a $\frac{T^*}{T} = 1$ esetet, amelynek a programozása egyszerűbb, majd ebből további bővítéssel nyerjük a $\frac{T^*}{T} \neq 1$ esetet.

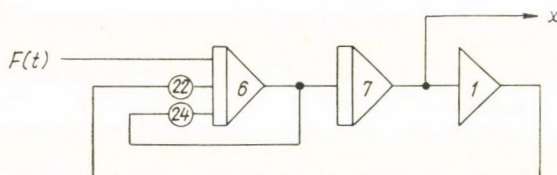
A program elkészítése során a gerjesztő függvényt az előbbi esetben $F(t)$ -vel, utóbbiban $G(t)$ -vel jelöljük a továbbiakban

Az $F(t)$ függvény előállítását az MN 7 analóg számológépen legcélszerűbben programvezérlés segítségével történhet. A gép 17-es erősítője programvezérlő kapcsolásban — többek között — a következő feladatot tudja elvégezni: az erősítő B_1 és B_2 bemenetére vitt jeleket a kapcsolás összehasonlítja. Az erősítő kimenetén feszültség jelenik meg, ha

$$(15) \quad B_1 + B_2 \geq 0.$$



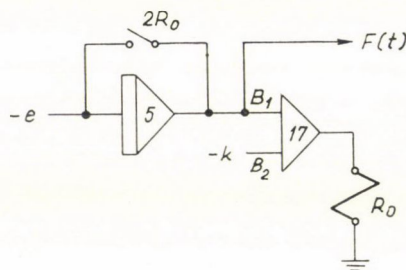
5. ábra.



6. ábra.

A kimeneten jelentkező feszültséggel az R_0 jelfogót tudjuk működtetni, amelynek érintkezőpárjait a program vezérlésére használhatjuk fel (7. ábra).

Analóg számológépeken a megoldás konstansszorosát is megoldásnak tekinthetjük, ha a konstans értéke ismert. Az általánosság csorbitása nélkül

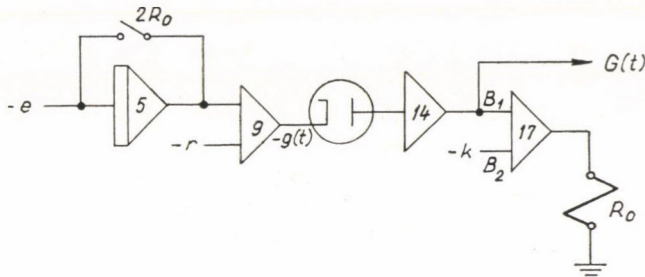


7. ábra.

az előző pontban egységnyire választott fűrészfog magasságot a továbbiakban k -val jelöljük. k értéke nem választható meg tetszőlegesen, nagyságát a kapcsolás elemeinek lineáritási tartománya korlátozza.

Célunk tehát egy T periódusú, k csúcsmagasságú fűrészfog alakú függvény előállítása. Ha az 5-ös integráló erősítő bemenetére $-e$ konstans feszültséget adunk, az erősítő kimenetén $f(t) = et$ alakú egyenest fogunk kapni. Adott k csúcsmagasság, valamint rögzített T periódus esetén e értékét úgy kell megválasztanunk, hogy az $eT = k$ egyenlőség teljesüljön. Ezáltal az $f(t)$

egyenes a (T, k) ponton fog átmenni. Ha a fűrészfog alakú függvény első periódusát $f(t)$ -ből meg akarjuk kapni, az integrálás folyamatát T idő elteltével le kell állítanunk, majd a további periódusok előállítására céljából $f(t)$ -t $t = 0$ idővel újra kell kezdenünk. Ez nyilván nem oldható meg a gépi kezdőértékre való visszatéréssel, mert ezáltal a teljes differenciálegyenlet megoldása a kezdeti értékre állna vissza. A programvezérlés segítségével a differenciálegyenlet programfutásától függetlenül vissza tudjuk állítani az $f(t)$ függvényt a $t = 0$ időnek megfelelő kezdőértékre. E célból az 5-ös erősítő kimenetén kapott



8. ábra.

$f(t)$ függvényt a 17-es erősítő B_1 bemenetére kapcsoljuk, a B_2 bemenetre pedig $-k$ konstans feszültséget juttatunk. Ha $f(t)$ eléri a k értéket, tehát a (15) feltétel teljesül, akkor a 17-es erősítő kimenetére kapcsolt R_0 jelfogó meghúz. A jelfogó egyik kontaktusának $(2R_0)$ segítségével rövidre zárjuk az 5-ös erősítő integráló kondenzátorát (7. ábra). R_0 ugyanakkor elenged, ugyanis az integráló kondenzátor gyakorlatilag azonnal kisül, s így $f(t)$ értéke is zérusra csökken. A folyamat most automatikusan ismétlődik. A feladat megoldása során k értékét konstansnak kell vennünk, a T periódus megadása pedig a $T = \frac{k}{e}$ arány alapján történhet, e értékének dekadikus osztón való beállításával.

A 6. és 7. ábrán vázolt programrészek összekapcsolásával tehát az (1) differenciálegyenletet meg tudjuk oldani $F(t)$ gerjesztő függvény esetén.

A $G(t)$, vagyis a $(0, T^*)$ szakaszon k magasságú fűrészfog, (T, T^*) szakaszon azonosan zérus-függvény előállítása céljából a 7. ábrán bemutatott kapcsolást egy kissé módosítjuk (8. ábra). Szükségünk lesz egy $g(t) = et - r$ alakú függvényre. Az r paraméter segítségével tudjuk majd a $\frac{T^*}{T}$ arányt

változtatni. r értékét potenciométeren állítjuk be. A periodikus ismétlődést itt is a programfutástól független vezérléssel érjük el. $g(t)$ zérustól eltérő kezdeti értékét összeadó erősítővel tudjuk megvalósítani. Az 5-ös integráló erősítő kimenetén kapott $f(t)$ függvényhez a 9-es összeadó erősítőn $-r$ értéket adunk hozzá. Ha a kimeneten kapott $-g(t) = -et + r$ egyenes pozitív részét dióda segítségével levágjuk, majd a 14-es előjelfordító erősítőre visszük (8.

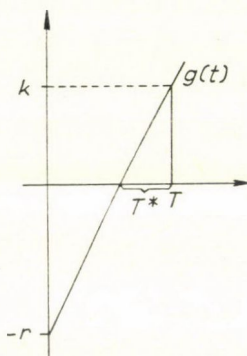
ábra), akkor az utóbbi kimenetén $g^*(t) = \frac{g(t) - |g(t)|}{2}$ alakú függvényt

kapunk. g^* tehát a $T - T^*$ értékig azonosan zérus, innen pedig et alakban folytatódik. Vezessük ezt a 17-es erősítő B_1 bemenetére, B_2 -re ismét $-k$ értéket adunk. A vezérlés folytán 14 kimenetén a $G(t - T + T^*)$ függvényt

fogjuk megkapni. Feladatunk megoldását a koordinátaeltolódás nem befolyásolja, így $G(t)$ helyett tulajdonképpen elegendő a $G(t - T + T^*)$ függvényt programozni. Szükség esetén az eltolás kiküszöbölhető, ha $f(0) = +r$ kezdőértéket adunk az 5-ös erősítőre. A T periódus értékét most $T = \frac{k+r}{e}$

összefüggés alapján állíthatjuk be (9. ábra). k és r rögzített értékei mellett T az e -nek dekadikus osztón történő beállításával könnyen változtatható.

A $\frac{T^*}{T}$ arány a $\frac{T^*}{T} = \frac{k}{k+r}$ összefüggés alapján állítható be.



9. ábra.

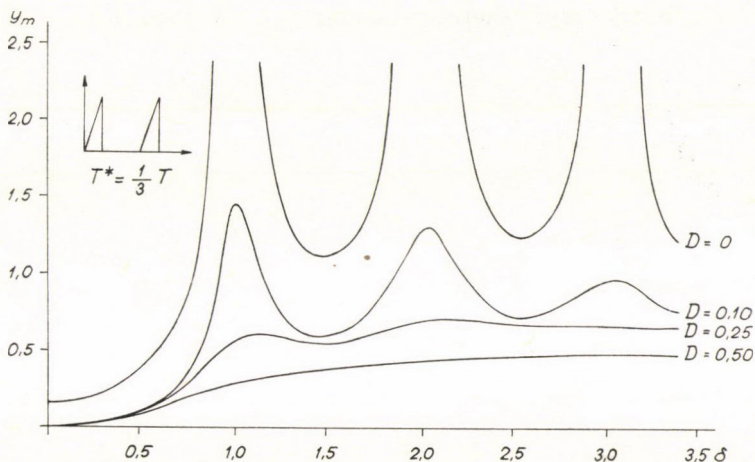
k értéke nem választható teljesen tetszőlegesen. Az $F(t)$ fűrészrezgés előállításánál a gépi egység, tehát 100 V választható k maximális értékeként, ha ezt az értéket a megoldás sem haladja meg. A $G(t)$ függvény esetén azonban k maximális értékét az 5-ös erősítő linearitási tartománya is korlátozni fogja. Esetünkben az 5-ös erősítőn maximálisan 160 V feszültséget engedtünk meg, ugyanis a kimenetet elektromotoros erő nem terheli, így a 160 V-os maximum a $+190$ V, -170 V linearitási tartományon belül marad. Ha k értékét 40 V-ra vesszük fel, a fentebbiek alapján $\frac{T^*}{T}$ legfeljebb $3/4$ lehet. k értékét nem célszerű

kisebbre választani, mert nagyobb csillapítási tényező, pl. $D = 0,5$ esetén a maximális és minimális amplitúdók nagysága, valamint különbsége is kicsinyre adódik, ezáltal a relatív hiba jelentősen megnövekszik. Szükség esetén a linearitási tartományt még jobban ki lehet használni.

A rezonanciagörbe felvétele tehát a következőképpen történik az analóg gép segítségével:

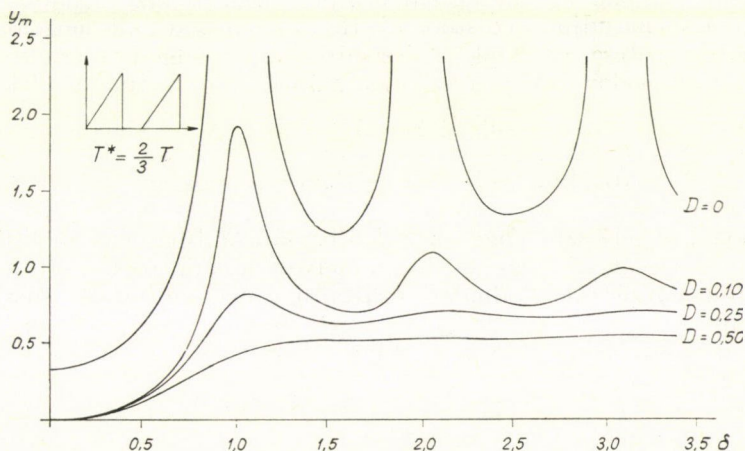
A fentebb ismertetett programvázlat alapján programozzuk a gépet. k ill. r értékét, valamint a kívánt D csillapítási tényezőt beállítjuk, T értékét pedig a dekadikus osztón e beállításával adjuk be a gépbe. Ezután a megoldás tranzien্স részének lefutása után a maximum és minimum értékeket műszerrel lemérjük. A T periódus megfelelően (a rezonanciapontok környezetében lehetőleg sűrűn) felvett értékei mellett a kapott értékeket k -val, a gépi egységgel elosztva tabellázzuk. Függőlegesen a maximális és minimális előjeles amplitúdók különbségének felét (y_m) mérjük fel, a hozzátartozó $\delta = \frac{T}{2\pi}$ abszcissza-értéknél.

A 10., 11. és 12. ábrákon néhány rezonanciagörbét mutatunk be, amelyeket a $T^* = \frac{1}{3}T$, $\frac{2}{3}T$, T értékek mellett vettünk fel $D = 0; 0,1; 0,25; 0,5$ csillapítási tényezők felhasználásával. Egy-egy rezonanciagörbe felvételéhez szükséges gépi idő — előkészített program esetén — 30—50 perc.



10. ábra.

A végzett mérések pontosságát a 2.-ban ismertetett elméleti megoldás felhasználásával numerikusan számított értékekkel összehasonlítva határoztuk meg. A relatív hiba $D = 0,25$ értékig az 1%-ot, $D = 0,5$ -nél a 2,5%-ot nem

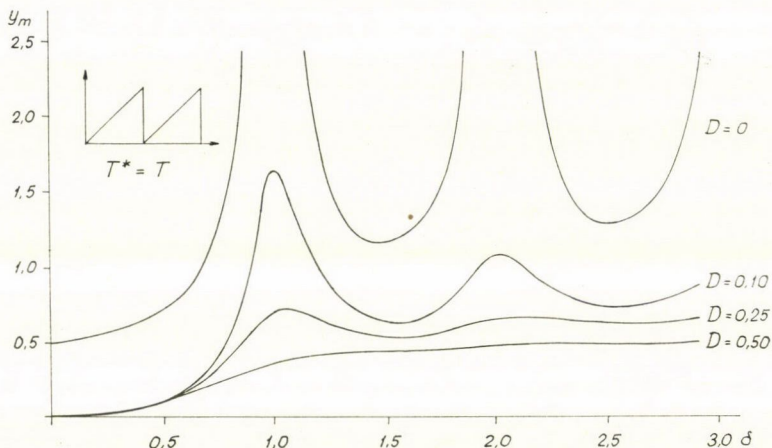


11. ábra.

haladta meg. Fel kell azonban hívnunk a figyelmet arra, hogy a megoldás fázishibája meglehetősen nagy, ugyanis a fűrészrezgés periódusának relével történő vezérlése bizonyos pontatlansággal jár. Ennek oka részben a relé tehetetlensége, részben az integráló kondenzátor tökéletlen kisülése, amely

a relékontaktus ellenállásának ingadozásával függ össze. Ez a fázisingadozás a tárgyalt fizikai jelenségnél is fennáll, esetünkben azonban a rezonanciagörbe felvételéhez szükséges mérésekben nem okoz hibát.

Amennyiben a megoldás pontos idő szerinti lefolyásának rögzítésére is szükségünk van, a következőképpen járhatunk el: $\omega = 1$ helyett a $\frac{2\pi}{n} \cdot t$ -t (ahol $n = 1, 2, 3, \dots$ stb. lehet) választjuk sajátfrekvenciának. ω értékét



12. ábra.

tehát úgy állítjuk be, hogy a kívánt hosszúságú időintervallumon a beépített szinkronmotor által szolgáltatott időjellel vagy többszörösével egyezzék a periódushossz. A relé kontaktellenállásából származó fázisingadozás okozta hibát azonban nem tudjuk kiküszöbölni. Ha azonban a stabilis megoldás $(0, T)$ szakaszának rögzítése a célunk, a fázishibát a megengedett értékre tudjuk csökkenteni oly módon, hogy a szinkronmotor szolgáltatata időjelek helyett a fűrészjel $\frac{1}{k}$ -szorosát vesszük időkoordinátának. A maximális amplitúdóra

vonatkoztatott relatív hiba ebben az esetben a fentiekben említett értékeket nem haladhatja meg.

Periodikus gerjesztő függvény előállítására a függvények differenciálegyenlet megoldásaként való előállítása helyett mindig célszerűbb a fentebb említett típusú vezérlést alkalmazni, ezáltal ugyanis az erősítők csúszása nem növeli a hibát.

A kapott eredmények gyakorlati következtetéseit az alábbiakban foglalhatjuk össze:

Hasonlóan az irodalomban (K. MAGNUS [3]) idézett vizsgálatokhoz, a rezonanciagörbék esetünkben is — egyirányú periodikus gerjesztésről lévén szó — rezonanciát mutatnak δ egész értékei körül. A káros berezgéseket tehát csak $\delta \ll 1$ esetre hangolt rugalmas rendszerrel lehet elkerülni.

δ nagymértékű növelésével a berezgési amplitúdó-maximumok csökkenő tendenciájúak. Megfelelően biztonságos üzemelés $D = 0,1$ -nél is csak $\delta > 3$ -nál érhető el. A teljes tartományon legalább $D = 0,25$ értékű csillapítás szükséges ahhoz, hogy a berezgést megfelelő értékre lehessen csökkenteni.

Látható, hogy a rezonanciagörbék alakja nem függ nagymértékben a fűrészrezgések alakját kifejező $\frac{T^*}{T}$ értéktől, noha az egy periódusra eső impul-

zus nagysága erősen csökken ennek értékével. A berezgési hajlam tehát valószínűen nem nagyon változhat a forgácsolt közetek ridegségi tulajdonságaival.

Összefoglalóan megállapítható az analóg számológép használatának előnye egy, a numerikus számítási módszerrel alig elérhető olyan területen, amely a gyakorlati mérések és megfigyelések számára is csak igen nehezen ad módot. Választ kaphatunk néhány olyan kérdésre, amelyek a gyakorlati üzemelés során felvetődve meg nem határozható kellemetlen kihatású jelenségeként szerepeltek. Az analóg gép által szolgáltatott pontosság ilyenformán bőven kielégíti a várakozást.

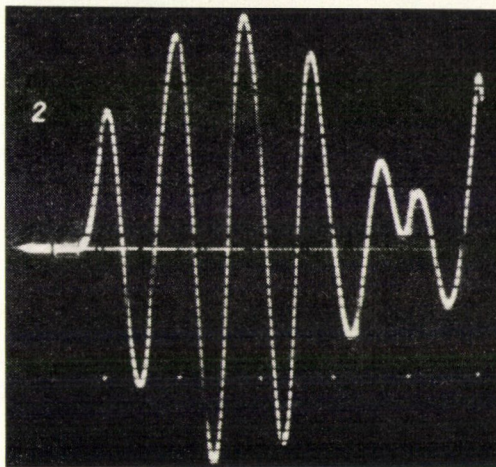
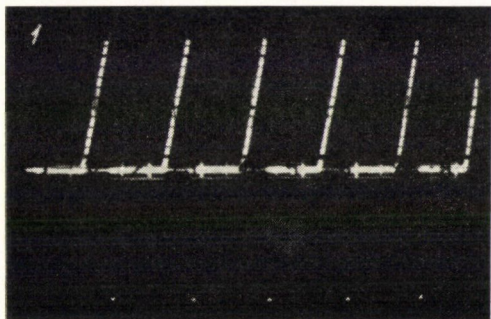
Természetesen a kapott eredményeket mint extrémumokat tekintjük és korántsem tartjuk azokat az általános gyakorlatban mértékadónak. A továbbiak során — a gyakorlat számára sokkal realisabb feltételezéssel — tervbe vettük egy olyan vizsgálat lefolytatását, ahol a gerjesztő rezgést mind T -ben, $\frac{T^*}{T}$ -ben, mind az erőmaximum k nagyságában is egy adott tartományban szto-

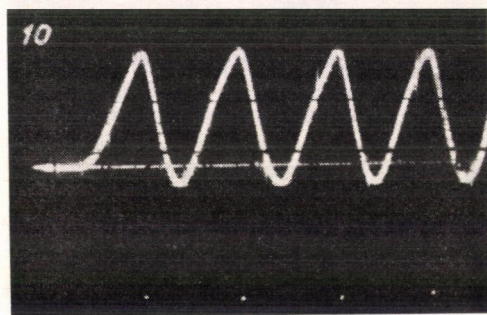
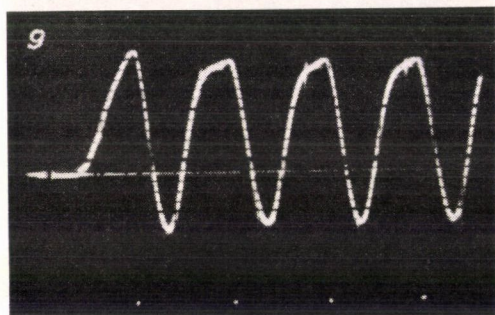
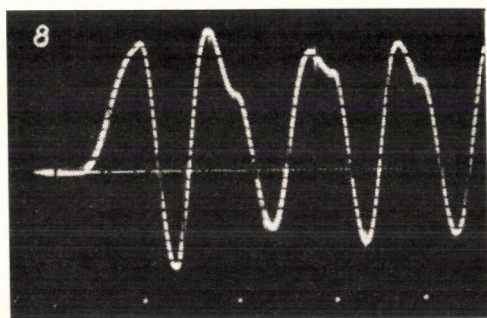
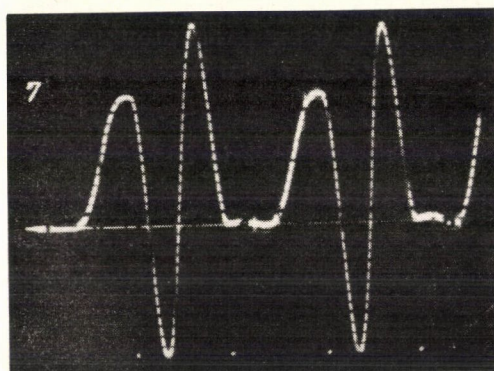
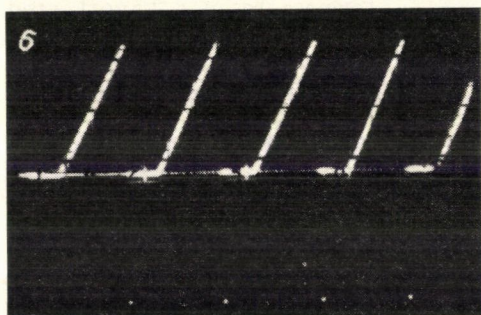
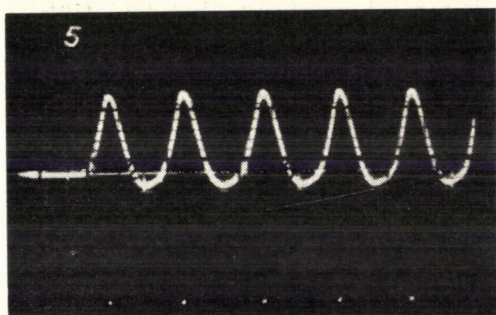
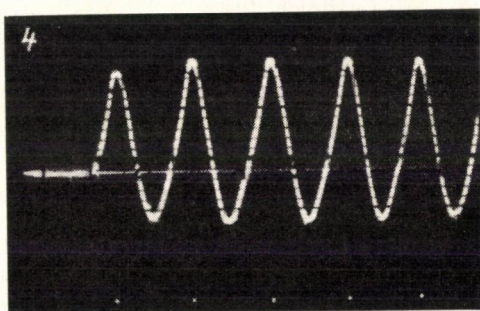
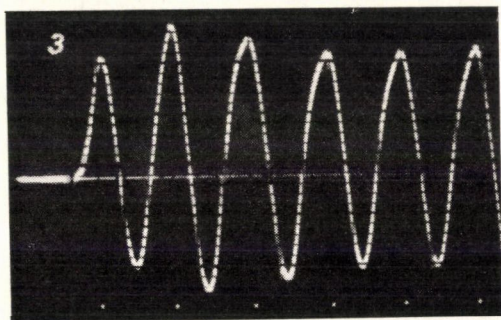
chasztikusan változó háromváltozós mennyiségnek tekintjük és a rezgési amplitúdók eloszlási függvényeit határozzuk meg. Ezek az értékek a gyakorlatban a jövesztőszerszám egyes részeinek az élettartamméretezéséhez jól használható értékeket szolgáltathatnak. Az ilyen jellegű feladatokat programvezérlés helyett célszerűbb katódsugaras vagy valamilyen követőrendszeres elven működő függvénygenerátorral előállított gerjesztő függvényvel megoldani, amellyel a megoldás reprodukálhatóságát biztosítani tudjuk.

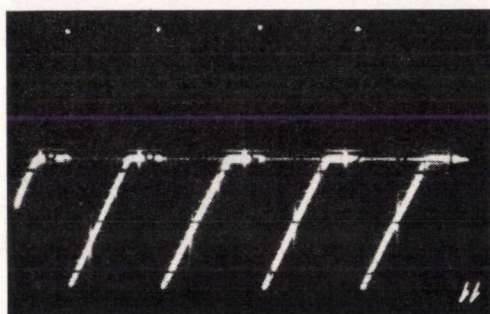
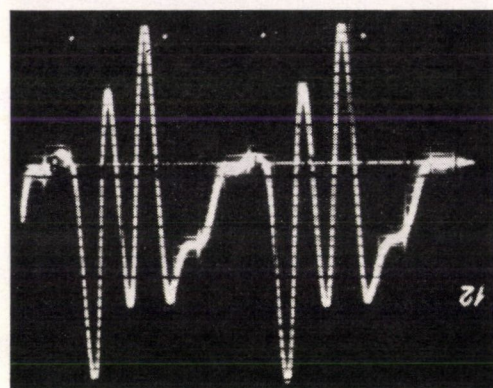
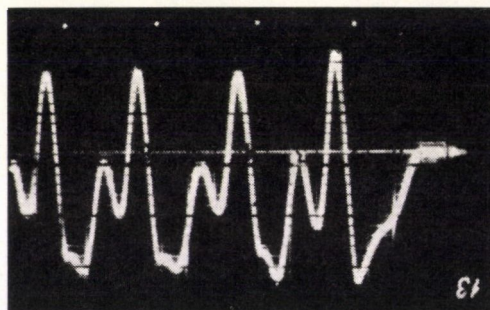
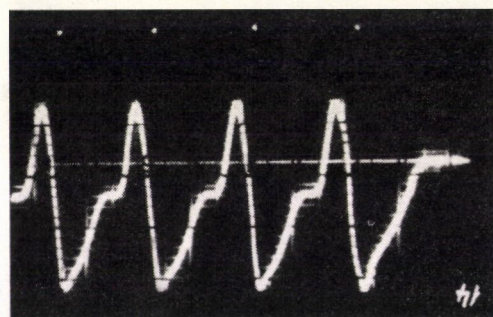
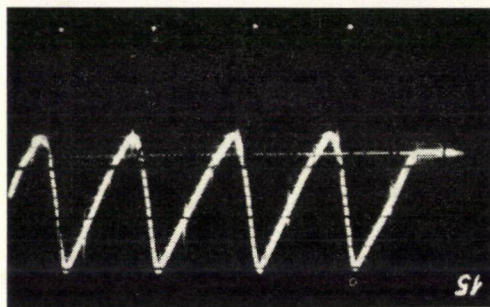
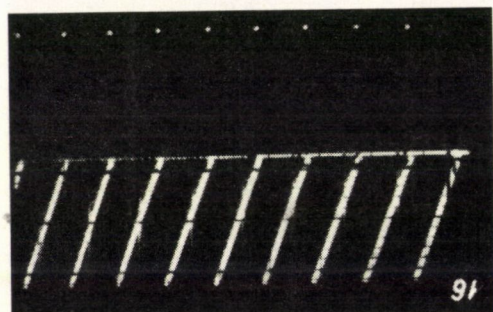
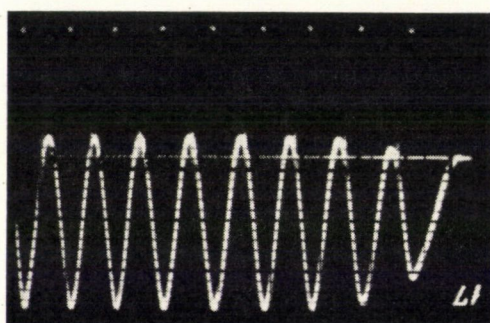
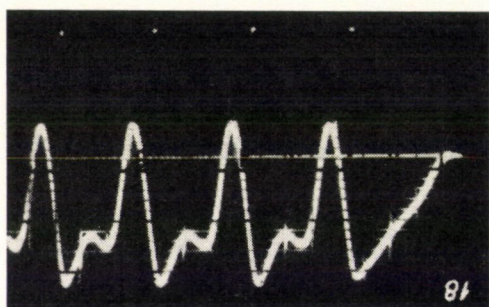
Az itt közölt vizsgálatnak a metodikai fontosságát külön is ki kell emelnünk; úgy véljük, példaként szolgálhat a későbbiekben olyan hasonló vizsgálatokhoz, amelyek a fizikai jellegükből kifolyólag eddig megoldhatónak nem látszóttak.

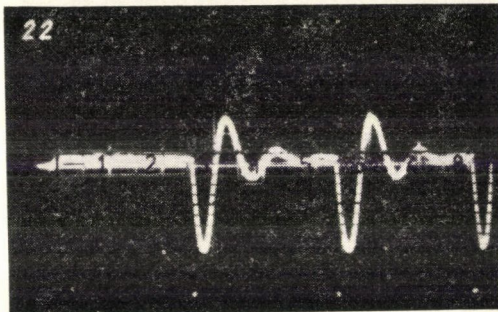
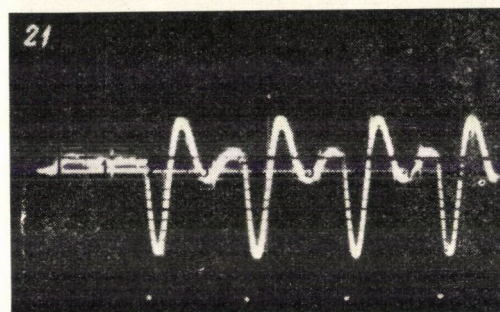
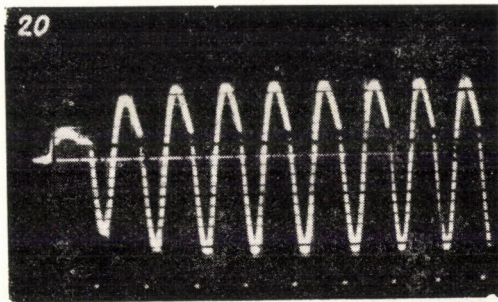
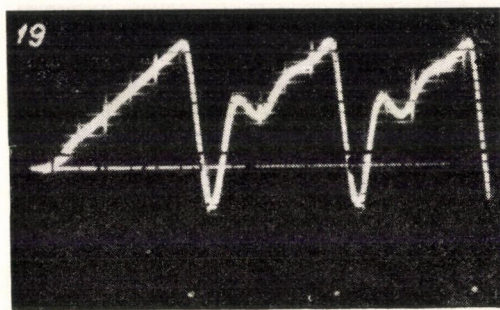
Végül néhány megoldásgörbe indikátoron nyert képét is bemutatjuk, amelyeken a tranziens jelenségek lefutása, ill. az egyes paraméterek hatása jól látható (13. ábra).

13. ábra.









Paraméteradatok a 13. ábra diagramjaihoz

Sorszám	$\frac{T^*}{T}$	D	δ	függvény megnevezése
1	1/3	—	1,2	fűrészfog
2	1/3	0	1,2	y
3	1/3	0,1	1,2	y
4	1/3	0,25	1,2	y
5	1/3	0,5	1,2	y
6	2/3	—	1,5	fűrészfog
7	2/3	0	1,5	y
8	2/3	0,1	1,5	y
9	2/3	0,25	1,5	y
10	2/3	0,5	1,5	y
11	2/3	—	2,5	fűrészfog
12	2/3	0	2,5	y
13	2/3	0,1	2,5	y
14	2/3	0,25	2,5	y
15	2/3	0,5	2,5	y
16	1	—	1	fűrészfog
17	1	0,25	1	y
18	1	0,25	2	y
19	1	0,25	3	y'
20	1	0,25	1	y'
21	1	0,25	2	y'
22	1	0,25	3	y'

(Beérkezett: 1963. október 11.)

IRODALOM

- [1] ТОПЧИЕВ, А. Б.—ХОРН, В. Н.: *Основы расчета сопротивляемости угля резанию*. Кафедра горных машин. Москва, МГ. И. 1957.
- [2] DANEK, O.—POLÁSEK, M.—SPACEK, L.—FLUSTY, J.: *Selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen*. VEB Verl. Technik, Berlin, 1962.
- [3] MAGNUS, K.: „Erzwungene Schwingungen des linearen Schwingers bei nichtharmonischer Erregung”. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **31** (1951) No. 10.

**ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСА КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С
ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ В СЛУЧАЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
ВОЗБУЖДАЮЩИХ СИЛ, ИМЕЮЩИХ ПИЛООБРАЗНЫЙ ВИД**

T. FÉNYES, N. MEITZEN и K. TÓTH

Резюме

Работа содержит исследование резонанса колебательной системы. Проблема возникает при конструкции добывающих машин, употребляемых в шахтах. В работе представлен метод решения дифференциального уравнения (1) в случае внешней возбуждающей функции, имеющей пилообразный вид. Во избежание большого объема вычислений, т. е. в целях облегчения работы статья содержит решение задачи с помощью аналоговой вычислительной машины MN-7.

**ÜBER DIE RESONANZUNTERSUCHUNG EINES LINEAREN SCHWINGERS
BEI EINER PERIODISCHEN SÄGEZAHNFÖRMIGEN ERREGUNGS-
FUNKTION**

T. FÉNYES, N. MEITZEN und K. TÓTH

Zusammenfassung

Die Arbeit handelt um die Resonanzuntersuchung eines linearen Schwingers. Dieses Problem tauchte bei der Planung einer Abbaumaschine auf. Die Verfasser geben die Lösung der Differentialgleichung (1), wenn die Erregungsfunktion eine periodische Sägezahnfunktion ist. Zur Vermeidung oder zur eventuellen Erleichterung der langwierigen numerischen Rechnungen legt die Arbeit die Lösung der Aufgabe mit dem Analogrechner MN-7 dar.

KÖTÉLPÁLYA ÍVEK MEGHATÁROZÁSA AZ ÍV GEOMETRIAI ADATAIBÓL

BÉKÉSSY ANDRÁS, BIHARI IMRE és MEGYERI JENŐ¹

1. Bevezetés

A kötélpályán való szállítás az utóbbi években más szállítási ágazatokhoz viszonyított előnyei révén jelentősen fellendült. A felszabadulás óta eltelt időszakot tekintve, Magyarországon a teherszállító kötélpályák összhossza megkétszereződött, teljesítőképességük pedig még nagyobb arányban növekedett. Úgy a hazai, mint hasonló külföldi eredmények — az utóbbiak főleg a személyszállítás területén — fokozottan megkívánják a kötélpályákkal kapcsolatos egyes elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt fontos problémák tisztázását.

A kötélerő és más geometriai, ill. mechanikai adatok meghatározására szolgáló eddig ismert eljárásoknál a pontosságot a feszítősúllyal feszített tartókötélű pályáknál a feszítősúly ismeretén kívül főleg a súrlódás hatásának figyelembevétele (súrlódási tényező felvétele) befolyásolja, míg a mindkét végén rögzített tartókötélű sodronykötélpálya esetében a kötélerő meghatározása még nehezebben kezelhető és körülményesebb feladat.

Az általunk kidolgozott eljárás segítségével a kötélvív három pontjának bemérése útján lehetőség nyílik mind a feszítősúlyos, mind a rögzített tartókötélű sodronykötélpályák hossz-szelvényeinek tetszés szerinti helyén a geometriai, valamint erőtani (kötélerő, stb.) mennyiségek egyszerű, gyors és pontos meghatározására. A jelen tanulmányban az erőtani adatok meghatározására azonban nem térünk ki, mivel ezek a kötélgörbe paramétereinek ismeretében a szokásos módon számíthatók.

Jelöljük az A és B kötélpálya-állványok közötti kötélvív három, egymástól h vetületi távolságra fekvő pontját P_1, P_2, P_3 -mal (1. ábra).

A h távolság felvétele után geodéziai szögmérő műszer (teodolit), illetve hossz mérés segítségével a h_1 , ill. h_2 magasság-különbségek meghatározhatók. A feladat tehát adott h, h_1, h_2 értékekhez a kötélgörbe jellemzőinek, elsősorban is a kötélgörbe paraméterének meghatározása.

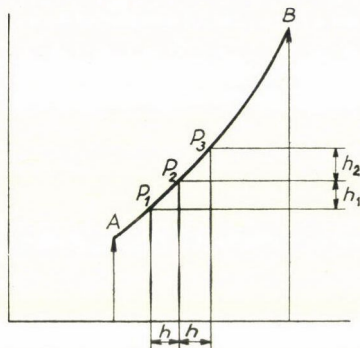
2. A kötélgörbe-paraméter meghatározására szolgáló képlet levezetése

A pálya két szomszédos állvány közé eső ívének az egyenlete alkalmas koordináta-rendszerben

$$(1) \quad y = c \left(\operatorname{ch} \frac{x}{c} - 1 \right).$$

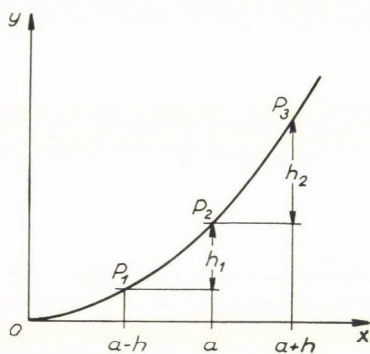
¹ Közlekedés- és Postaügyi Minisztérium.

A feladat a c paraméter meghatározása. A felvett három, — vízszintesen ekvivalens pont legyen P_1, P_2, P_3 és legyen P_2 abszcisszája a . A P_i ($i = 1, 2, 3$) pont vetületét P'_i -vel jelölve legyen $P'_1 P'_2 = P'_2 P'_3 = h$ és a P_2 -höz viszonyított relatív magasságok h_1 , ill. h_2 . A P_i pontok egymáshoz viszonyított helyzete

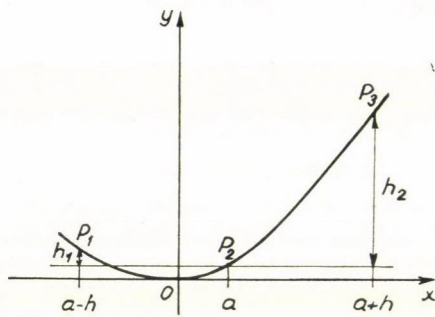


1. ábra.

akár a 2a ábra, akár a 2b ábra szerinti lehet. Megállapodunk azonban abban, hogy P_2 mindig a középső pontot jelentse, P_3 legyen az a pont (vagy a kettő közül az egyik olyan pont), amely P_2 -nél magasabban fekszik, és amennyiben P_1 is magasabban lenne mint P_2 , akkor a h_1 értékét negatív előjellel vesszük.



2a. ábra.



2b. ábra.

Meghatározandó h, h_1, h_2 ismeretében a c paraméter és az ugyancsak ismeretlen a abszcissza.

A 2. ábra szerint e mennyiségek között (1) figyelembevételével a

$$(2) \quad \begin{aligned} c \operatorname{ch} \frac{a+h}{c} &= c \operatorname{ch} \frac{a}{c} + h_2 \\ c \operatorname{ch} \frac{a-h}{c} &= c \operatorname{ch} \frac{a}{c} - h_1 \end{aligned}$$

egyenletek állnak fenn, amelyekből c -t és a -t kell meghatároznunk. A (2) egyenletekből összeadással ill. kivonással a

$$(3) \quad \frac{h_2 - h_1}{2c \left(\operatorname{ch} \frac{h}{c} - 1 \right)} = \operatorname{ch} \frac{a}{c}, \quad \frac{h_2 + h_1}{2c \operatorname{sh} \frac{h}{c}} = \operatorname{sh} \frac{a}{c}$$

összefüggésekre jutunk, amelyekből a $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ összefüggés felhasználásával az a paramétert kiküszöbölve az egyetlen ismeretlent tartalmazó

$$(4) \quad \frac{(h_2 - h_1)^2}{4c^2 \left(\operatorname{ch} \frac{h}{c} - 1 \right)^2} - \frac{(h_2 + h_1)^2}{4c^2 \operatorname{sh}^2 \frac{h}{c}} = 1$$

egyenletet kapjuk. Ebből azonban c nem fejezhető ki elemi függvények segítségével.

A c paraméter meghatározására ezek után két lehetőség kínálkozik: a) numerikus egyenletmegoldó módszer; b) nomogram. Mindkét lehetőséget tárgyaljuk, mivel önmagában egyik módszer sem teljesen kielégítő; a numerikus számítás némileg fáradságos, a nomogram viszont, amely gyors és kényelmes, nem mindig ad elég pontos eredményt.

Mielőtt rátérnénk a felvázolt módszerek kidolgozására, a (4) képletet új változók bevezetésével kissé egyszerűbb alakra hozzuk: legyen

$$(5) \quad \begin{cases} \gamma = \frac{h}{c}, \\ u = \frac{h_1 + h_2}{h}, \quad v = \frac{h_2 - h_1}{h}. \end{cases}$$

Igy a (4) alapegyenlet a

$$(6) \quad \frac{v^2 \gamma^2}{4(\operatorname{ch} \gamma - 1)^2} - \frac{u^2 \gamma^2}{4 \operatorname{sh}^2 \gamma} = 1$$

alakot ölti, ebben u és v ismert mennyiségek, γ ismeretlen.

Ha a γ mennyiség már számszerűen meg van határozva, akkor például a (3) egyenletpár második képletéből, amely

$$\frac{u \gamma}{2 \operatorname{sh} \gamma} = \operatorname{sh} \frac{a}{c}$$

alakba írható át, kiszámíthatjuk az a ismeretlent is:

$$(7) \quad a = \frac{h}{\gamma} \operatorname{arsh} \frac{u \gamma}{2 \operatorname{sh} \gamma}.$$

3. Nomogramok tervezése γ kiszámításához

Mint látható, a (6) háromváltozós kapcsolat nomográfiai rendszáma négy, típusa pedig Cauchy-típus. Ennélfogva egyszerűen ábrázolható két egyenes és egy görbe tartójú pontsoros nomogrammal [1]. Soreau-determinánsa, tehát az a determináns, amely egyenértékű a (6) egyenlettel, lehet például

$$\begin{vmatrix} 0 & v^2 & 1 \\ 1 & u^2 & 1 \\ -\gamma^2 & 4 \operatorname{sh}^2 \gamma & \frac{2 \gamma^2}{\operatorname{ch} \gamma - 1} \end{vmatrix} = 0,$$

vagy némi átalakítással

$$(8) \quad \begin{vmatrix} 0 & v^2 & 1 \\ 1 & -u^2 & 1 \\ \gamma^2 & 4 \operatorname{sh}^2 \gamma & \frac{2 \gamma^2 \operatorname{ch} \gamma}{\operatorname{ch} \gamma - 1} \end{vmatrix} = 0.$$

Az utóbbi determinánsból vezethető le olyan nomogramalak, amelynél a γ eredményváltozó skálája a két adatváltozó skálája között helyezkedik el. Általában ezt az utóbbi alakot szokás használni, mi is ezt terveztük meg, azonban csak bizonyos fenntartással, mert úgy tűnik, hogy az adatok bizonyos kombinációinál ez az alak volna előnyösebb, amelynél az eredményskála az u ill. v skáláin kívül van.

A (8) alapterminánsból adódó nomogram még nem volna megfelelő, ezt az alakot a szokásos módon projektív transzformációnak alávetve végül is a következő skálaegyenletek adódnak:

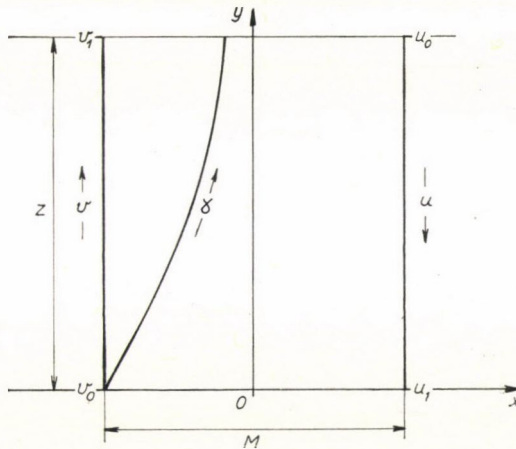
$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \text{ skála:} \\ \quad x_u = \frac{M}{2}, \quad y_u = N \frac{u_1^2 - u^2}{u_1^2 - u_0^2}; \\ v \text{ skála:} \\ \quad x_v = -\frac{M}{2}, \quad y_v = N \frac{v^2 - v_0^2}{v_1^2 - v_0^2}; \\ \gamma \text{ skála:} \\ \quad x_\gamma = \frac{M}{2} \frac{(u_1^2 - u_0^2) \operatorname{th}^2 \gamma/2 - (v_1^2 - v_0^2)}{(u_1^2 - u_0^2) \operatorname{th}^2 \gamma/2 + (v_1^2 - v_0^2)}, \\ \quad y_\gamma = N \frac{\left(u_1^2 + 4 \frac{\operatorname{sh}^2 \gamma}{\gamma^2}\right) \operatorname{th}^2 \gamma/2 - v_0^2}{(u_1^2 - u_0^2) \operatorname{th}^2 \gamma/2 + (v_1^2 - v_0^2)}, \end{array} \right.$$

ahol M a nomogram szélessége, N a magassága, u_0, u_1 az u skálának, v_0, v_1 pedig a v skálának adott szélső értékei (3. ábra). Behelyettesítéssel könnyen

meggyőződhetünk arról, hogy a (7) kifejezésekkel vett

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & 1 \\ x_v & y_v & 1 \\ x_\gamma & y_\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet valóban egyenértékű a (6) egyenlettel.

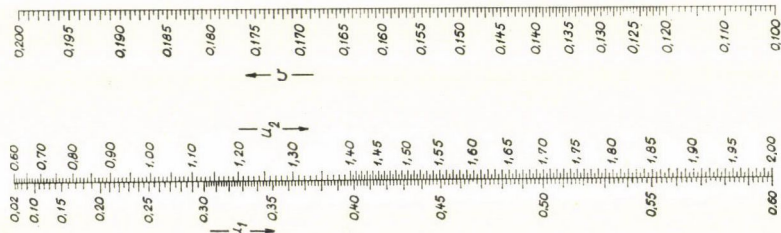
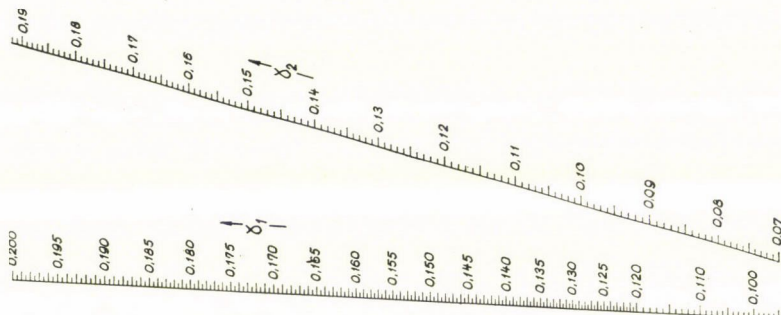
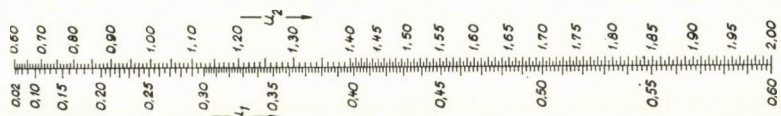


3. ábra.

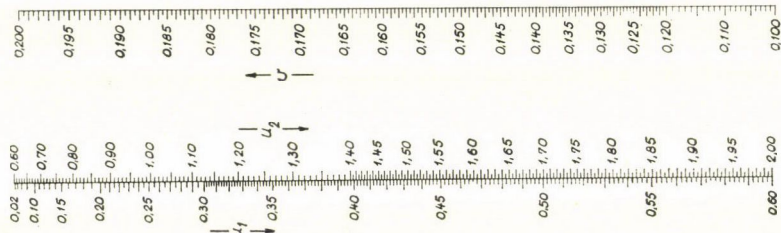
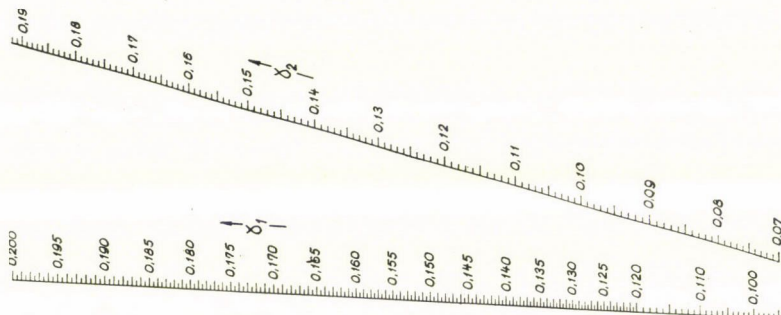
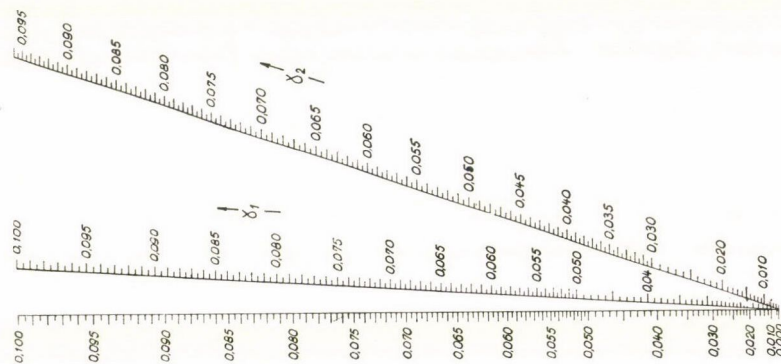
A méréseknél előforduló adatok elemzéséből kitűnik, hogy az u ill. v értékhatárai gyanánt a következőket érdemes venni:

$$0 \leq v \leq 0,7, \quad 0 \leq u \leq 2.$$

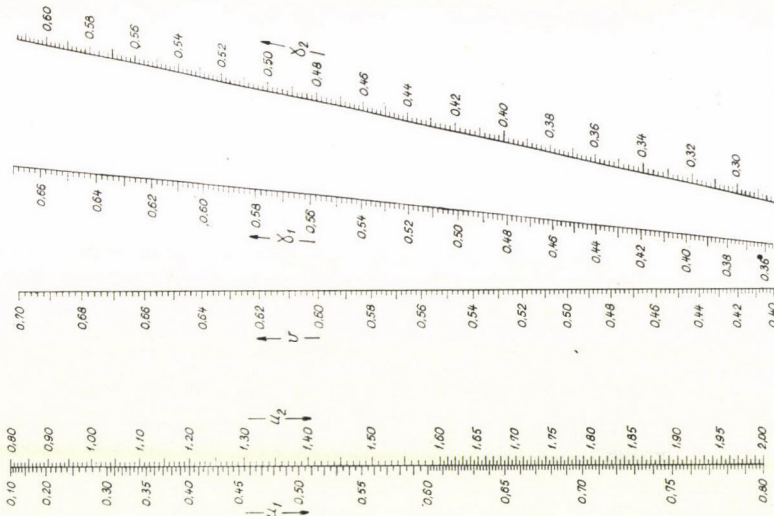
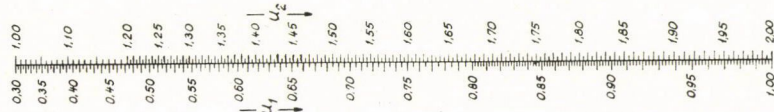
Ilyen értékhatárok mellett azonban egyetlen nomogrammal nem tudtunk a meghatározandó γ számára megfelelő leolvasási pontosságot biztosítani és a nomogram további transzformálása sem hozott megfelelő eredményt. Ezért a jelzett értéktartományt *nyolc* részre bontottuk, más szóval tulajdonképpen nyolc nomogramot terveztünk, de olyan módon, hogy kettő-kettő v skálája azonos, u skálája pedig közös tartójú. Így például az első nomogram-páron $0 \leq v \leq 0,1$ (ez közös skála), az egyiken $0 \leq u \leq 0,6$, a másikon $0,6 \leq u \leq 2$ (a tartójuk közös), a γ skálatartók különbözőek, a befelé vonalkázott u értékekhez a baloldali, a kifelé vonalkázott u értékekhez pedig a jobboldali γ skálatartó tartozik. Hasonlóképpen van megtervezve a másik három nomogram-pár. E nomogram-párok típusa azonos, pontos kivitelben láthatók a 4–7. ábrán. Megnéztük, hogy az egyes résznomogramok külön-külön való transzformálása nem javítaná-e a skálák osztásviszonyait, arra az eredményre jutottunk azonban, hogy az elérhető javulás nem számottevő.



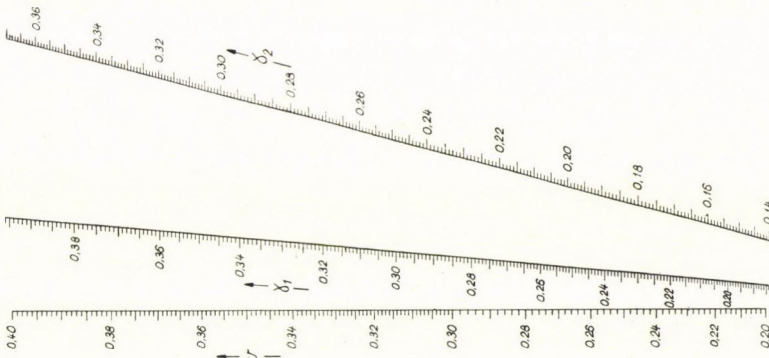
4. ábra.



5. ábra.



7. ábra.



6. ábra.

4. A γ számítása numerikus közelítő eljárással

Az első nomogram pár semmilyen kiviteli formájában sem teljesen kielégítő, mert kicsiny v és u értékek mellett beállított vonalzó a skálát igen lapos szög alatt metszi, ez pedig a leolvasási pontosság erős romlásával jár, és ezen még az sem segít teljes mértékben, hogy a γ skála a résznomogramokra való bontás következtében kicsiny v értékeknél erősen nyújtott. A kicsiny γ értékek nagy pontossággal való meghatározása viszont azért fontos, mert γ általában éppen akkor kicsiny, ha c nagy.

Ha a nomogramok nyújtotta pontosság nem elegendő, akkor γ megfelelő pontosságú kiszámítása némi numerikus számolás árán az alábbi módszerrel lehetséges.

Először is megmutatjuk, hogy a

$$(10) \quad \gamma_0 = \frac{v}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} u^2}}$$

képlet kicsiny v értékeknél igen jó közelítést jelent — ilyen közelítő értéket természetesen a nomogramokról is leolvashatunk —, azután pedig megmutatjuk, hogy amennyiben akár a (10) képlettel kapott eredmény, akár a nomogramokról leolvasható eredmény nem volna elegendően pontos, akkor hogyan lehet igen gyorsan konvergáló iteratív eljárással a kapott közelítés pontosságát fokozni.

A. A (10) képlet elemzése. A pontos (6) összefüggésből

$$v = \frac{2(\operatorname{ch} \gamma - 1)}{\gamma} \sqrt{1 + \frac{u^2}{4} \left(\frac{\gamma}{\operatorname{sh} \gamma} \right)^2},$$

és felhasználva a $(\operatorname{ch} \gamma - 1)/2 = \operatorname{sh}^2 \gamma/2$ azonos összefüggést,

$$v = \gamma \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma/2}{\gamma/2} \right)^2 \sqrt{1 + \frac{u^2}{4} \left(\frac{\gamma}{\operatorname{sh} \gamma} \right)^2};$$

ebből pedig

$$(11) \quad \gamma = \frac{v \left(\frac{\gamma/2}{\operatorname{sh} \gamma/2} \right)^2}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{4} \left(\frac{\gamma}{\operatorname{sh} \gamma} \right)^2}}.$$

Ha azonban $(0 \leq) \gamma \ll 1$, akkor

$$\frac{\gamma}{\operatorname{sh} \gamma} \approx 1,$$

és így γ -ra jó közelítéssel a (10) érték adódik.

Kérdés, hogy mekkora γ_0 hibája. A (11) egyenletből $\gamma \leq \operatorname{sh} \gamma$, $\gamma/2 \leq \operatorname{sh} \gamma/2$ figyelembevételével adódik, hogy

$$\gamma \leq v$$

(elhagytuk ugyanis (11) nevezőjét), és hasonlóképpen (11)-ből

$$\gamma \geq \frac{v}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}} \left(\frac{\gamma/2}{\operatorname{sh} \gamma/2} \right)^2 = \gamma_0 \left(\frac{\gamma/2}{\operatorname{sh} \gamma/2} \right)^2,$$

de $\gamma/\operatorname{sh} \gamma$ a γ változónak csökkenő függvénye, tehát $\gamma < v$ lévén

$$(12) \quad \gamma \geq \gamma_0 \left(\frac{v/2}{\operatorname{sh} v/2} \right)^2, \quad \text{illetőleg} \quad \frac{\gamma_0}{\gamma} \leq \left(\frac{\operatorname{sh} v/2}{v/2} \right)^2.$$

Továbbá (10) és (11) szerint

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_0}{\gamma} &= \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma/2}{\gamma/2} \right)^2 \sqrt{\frac{1 + u^2/4 \cdot (\gamma/\operatorname{sh} \gamma)^2}{1 + u^2/4}} \geq \\ &\geq \sqrt{\frac{1 + u^2/4 \cdot (\gamma/\operatorname{sh} \gamma)^2}{1 + u^2/4}} \geq \sqrt{\frac{1 + u^2/4(v/\operatorname{sh} v)^2}{1 + u^2/4}} \end{aligned}$$

(mert — ismételve — $\gamma/\operatorname{sh} \gamma$ csökkenő függvény és $\gamma < v$), de ez így is írható:

$$(13) \quad \frac{\gamma_0}{\gamma} > \frac{v}{\operatorname{sh} v} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\operatorname{sh} v}{v} \right)^2 + \frac{u^2}{4}}}{\sqrt{1 + \frac{u^2}{4}}} > \frac{v}{\operatorname{sh} v},$$

tehát összefoglalva a (12) és (13) becslést:

$$(14) \quad \frac{v}{\operatorname{sh} v} \leq \frac{\gamma_0}{\gamma} \leq \left(\frac{\operatorname{sh} v/2}{v/2} \right)^2.$$

Ha például $v < 0,24$, akkor (az u értékétől függetlenül) γ relatív hibája kisebb mint 1%. ($0,99 < \gamma_0/\gamma < 1,01$), ha pedig $v < 0,1$, akkor kisebb mint 0,2% ($0,998 < \gamma_0/\gamma < 1,001$).

B) Iteratív javítás. A (10) közelítő képletből (vagy a nomogramokról) nyert γ_0 közelítés pontossága a következő, (iteratív használható) képlet alapján javítható:

$$(15) \quad \gamma_{n+1} = \frac{v}{\left(\frac{\operatorname{sh} \gamma_n/2}{\gamma_n/2} \right)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{u}{2} \cdot \frac{\gamma_n}{\operatorname{sh} \gamma_n} \right)^2}}.$$

Ez a képlet a (11) összefüggésből származik. A (15) jobboldalán álló kifejezés γ_n szerinti deriváltja kis v értékekre kicsiny, tehát az iterációnak igen gyorsan kell konvergálnia, minél kisebb v , annál gyorsabban. Emellett rögzített v értékekre az iteráció annál gyorsabban konvergál, minél nagyobb az u . Illusztrációul szolgáljanak a következő példák (1. táblázat). (Az első közelítő értéket, — a γ_0 -at — a (10) képlet szolgáltatatta). A γ_n közelítések egységesen 6

tizedesjegyre voltak kiszámítva. Avégett, hogy jól áttekinthető legyen, miként helyezkednek el az egymásutáni γ_n közelítések a pontos γ érték körül, a táblázaton a pontos értéktől való eltéréseket, a

$$\Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma$$

értékeket tüntettük fel. „Pontos” értéknek itt a hat tizedes jegyre pontos értékeket tekintettük.

1. TÁBLÁZAT

	$u =$ 0,2	1,0	2,0
$v =$	$\gamma = 0,099\ 423$	$\gamma = 0,089\ 407$	$\gamma = 0,070\ 711$
0,2	$\Delta\gamma_0 = 0,000\ 080$ $\Delta\gamma_1 = 0,000\ 000$	$\Delta\gamma_0 = 0,000\ 036$ $\Delta\gamma_1 = 0,000\ 000$	$\Delta\gamma_0 = 0,000\ 000$
0,4	$\gamma = 0,393\ 028$ $\Delta\gamma_0 = 0,004\ 987$ $\Delta\gamma_1 = -0,000\ 126$ $\Delta\gamma_2 = 0,000\ 003$	$\gamma = 0,355\ 491$ $\Delta\gamma_0 = 0,002\ 280$ $\Delta\gamma_1 = -0,000\ 053$ $\Delta\gamma_2 = 0,000\ 001$	$\gamma = 0,282\ 826$ $\Delta\gamma_0 = 0,000\ 016$ $\Delta\gamma_1 = 0,000\ 000$
0,8	$\gamma = 0,759\ 491$ $\Delta\gamma_0 = 0,036\ 539$ $\Delta\gamma_1 = -0,003\ 494$ $\Delta\gamma_2 = 0,000\ 327$ $\Delta\gamma_3 = -0,000\ 031$ $\Delta\gamma_4 = 0,000\ 003$	$\gamma = 0,697\ 588$ $\Delta\gamma_0 = 0,017\ 953$ $\Delta\gamma_1 = -0,000\ 962$ $\Delta\gamma_2 = 0,000\ 051$ $\Delta\gamma_3 = -0,000\ 003$	$\gamma = 0,565\ 176$ $\Delta\gamma_0 = 0,000\ 509$ $\Delta\gamma_1 = -0,000\ 002$

A táblázatból látható például, hogy ha $v \leq 0,2$, akkor (u értékétől függetlenül) a γ értékét hat tizedesnyi pontossággal megadja a γ_1 , tehát e pontosság eléréséhez elegendő a (15) képlet egyszeri használata. v növelésével a konvergencia gyorsasága rohamosan romlik, de még $v = 0,8$ -nál is minden iteráció egy-egy újabb értékes jegyet ad meg.

6. A mérési hibák kihatása a paraméterek értékére

A γ paraméter $\Delta\gamma$ hibája az u, v mennyiségek hibájától függ, ezek viszont a h_1, h_2, h mennyiségek mérésének pontosságától függnnek. A (6) képletből megállapítható az összefüggés $\Delta u, \Delta v$ és $\Delta\gamma$ között; feltéve, hogy $v > 0$, és alkalmazva a hibaszámításban szokásos eljárást,

$$\Delta\gamma = \frac{\frac{\gamma^2 v \Delta v}{(\operatorname{ch} \gamma - 1)^2} + \frac{\gamma^2 u \Delta u}{\operatorname{sh}^2 \gamma}}{\frac{\gamma^2 v^2 \operatorname{sh} \gamma}{(\operatorname{ch} \gamma - 1)^3} + \frac{u^2 \gamma}{\operatorname{sh}^2 \gamma} - \frac{v^2 \gamma}{(\operatorname{ch} \gamma - 1)^2} - \frac{\gamma^2 u^2 \operatorname{ch} \gamma}{\operatorname{sh}^3 \gamma}}$$

adódik, majd a (6) összefüggés felhasználásával egyszerűsítve

$$\Delta\gamma = \frac{\frac{\gamma^2 v \Delta v}{(\operatorname{ch} \gamma - 1)^2} + \frac{\gamma^2 u \Delta u}{\operatorname{sh}^2 \gamma}}{\frac{4}{\gamma} \left(\frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma}{\operatorname{sh} \gamma} - 1 \right) + \frac{v^2 \gamma^2}{\operatorname{sh} \gamma (\operatorname{ch} \gamma - 1)^2}}.$$

Itt a nevező két nem-negatív tag összegéből áll, tehát a becslésnél elhagyhatjuk az első tagot. A becslést ezáltal nem rontjuk nagyon, mert ha v kicsiny, akkor

$$\frac{4}{\gamma} \left(\frac{\gamma \operatorname{ch} \gamma}{\operatorname{sh} \gamma} - 1 \right) \sim \frac{4}{3} \gamma < \frac{4}{3} v,$$

$$\frac{v^2 \gamma^2}{\operatorname{sh} \gamma (\operatorname{ch} \gamma - 1)^2} \sim \frac{4 v^2}{\gamma} > \frac{4}{v},$$

tehát az első tag sokkal kisebb a másodiknál. Az első tag elhagyásával és ismét a (6) képletnek egyszerűsítésre való alkalmazásával a következő becslést kapjuk:

$$\Delta\gamma < \operatorname{sh} \gamma \frac{\Delta v}{v} + \operatorname{sh} \gamma \frac{u}{4 + u^2} \Delta u,$$

és $u/(4 + u^2) \leq 1/4$ miatt még egyszerűbben

$$(16) \quad \Delta\gamma < \operatorname{sh} \gamma \left(\frac{\Delta v}{v} + \frac{\Delta u}{4} \right).$$

Ha γ kicsiny, akkor nem tévedünk veszélyesen sokat, ha a (16) egyenlőtlenségben $\operatorname{sh} \gamma$ helyébe γ kerül és γ hibakorlátjának a $\gamma(\Delta v/v + \Delta u/4)$ értékét tekintjük. Ha $v < 0$ volna, akkor v helyébe $|v|$ -et írunk. Feltehető továbbá, hogy $\Delta u = \Delta v$, úgyhogy végül is

$$(17) \quad \Delta\gamma \sim \gamma \Delta u \left(\frac{1}{|v|} + \frac{1}{4} \right), \quad (\gamma \ll 1).$$

Ehhez járul még leolvasási hiba, ha γ értékét valamelyik nomogramról vettük.

A Δu hibakorlátot ($\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h$ feltételezés mellett) a

$$(18) \quad \Delta u = \frac{\Delta h}{h} (2 + u)$$

kifejezés adja, amely az $u = (h_1 + h_2)/h$ egyenlőségből adódik, és végül a $c = h/\gamma$ összefüggésből

$$(19) \quad \Delta c = c \left(\frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \right).$$

Valamivel jobb becslést kapnánk c hibakorlátjára, ha ennek megállapítására független mérési adatokat tartalmazó képletekből indulnánk ki. A Δc meghatározására szolgáló képletek azonban bonyolultabbak lennének, az elérhető javulás pedig nem nagyon jelentős. Megjegyzendő még, hogy itt is, mint

általában, a tényleges hiba rendszerint jóval kisebb a (17), (18), (19) képletekkel becsült hibakorlátnál, mert ezek a képletek a mérési hibáknak lehető leg-szerencsétlenebb kombinációját feltételezve adódnak, és ezenfelül, az egyszerűségük kedvéért durvábbak a kelleténél.

Példa. Legyen $h = 250,00$ m,

$$h_1 = 56,88 \text{ m},$$

$$h_2 = 123,59 \text{ m},$$

$$\Delta h_1 = \Delta h_2 = \Delta h = 1 \text{ cm}.$$

A c kiszámítására szolgáló képletek alapján

$$u = \frac{h_1 + h_2}{h} = 0,7219,$$

$$v = \frac{h_2 - h_1}{h} = 0,2668,$$

$$\gamma_0 = \frac{v}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{2}\right)^2}} = 0,25$$

majd a (15) iterációs képletet alkalmazva

$$\gamma_1 = 0,2499,$$

$$c = \frac{h}{\gamma_1} = 1000,2 \text{ m},$$

Alkalmazzunk hibaszámítást:

$$\Delta u = \Delta v = 2,72 \cdot \frac{0,01}{250} = \frac{0,027}{250}$$

$$\Delta \gamma = 0,25 \cdot \frac{0,027}{250} \left(\frac{1}{0,27} + \frac{1}{4} \right) = \frac{0,026}{250}$$

$$\Delta c = 1000 \cdot \left(\frac{0,01}{250} + \frac{0,026}{0,25} \cdot \frac{1}{250} \right) = 0,47 \text{ m}.$$

7. Összefoglalás

Szemben az irodalomban ismert meghatározási eljárásokkal [2], [3], [4], [5], amelyek kötélpálya-tervezés szempontjainak felelnek meg, a jelen dolgozatban azzal a problémával foglalkoztunk, hogy egy már megépített pálya geometriai ill. mechanikai jellemzőit kell meghatározni. Ilyen esetben, mint látható, a kötélív tényleges alakját jellemző geometriai mennyiségeknek megmérése és a fentebb ismertetett módszer segítségével mód van a kötélív

geometriai és mechanikai jellemzőinek az irodalomból ismert módszerek adta lehetőségeknél pontosabb meghatározására. A tényleges alak figyelembevételével kiküszöbölhetjük azokat a bizonytalanságokat, amelyek valamennyi, az irodalomból ismert eljárást terhelnek (mint amilyen például a támaszponti kötél erő nagyságát felhasználó módszernél a súrlódás hatása).

Köszönetnyilvánítás. A nomogrampontok kiszámításánál PULITU KULA működött közre, a kivitelezési munkákat pedig MESZLÉNYI MÁRIA és SÓLYOM IMRE végezték el. Ezúton fejezzük ki nekik köszönetünket.

(Beérkezett: 1963. november 5.)

IRODALOM

- [1] PENTKOVSKIJ, M. V.: *Nomográfia*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.
- [2] FINDEIS, R.: *Rechnerische Grundlagen des Baues von Drahtseilbahnen*. Deuticke, Wien, 1923.
- [3] STEPHAN, P.: *Die Drahtseilbahnen*. Berlin, Springer 1926.
- [4] D'ARMINI: „La configurazione delle funi metalliche nel caso particolare delle funivie.” *Trasporti Pubblici* **3** (1955) 90—102.
- [5] AMMENDOLA, L.: „La configurazione delle funi delle funivie per trasporto di persone”. *Ingegneria Ferroviaria* **10** (1948) 1—7.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВЫХ ПОДВЕСНОЙ ДОРОГИ ИЗ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ДУГ

A. BÉKÉSSY, I. BINARI и J. MEGYERI

Резюме

В работе рассматривается вопрос о том, как путём измерений трёх с одинаковыми абсциссами ординат цепной линии можно определить параметры кривой. Эта проблема приводит к одному трансцендентному уравнению, решать которое можно разными способами: а) с помощью приближённой формулы и оценки ошибок; б) приближённым итерационным методом; в) задавая номограмму и исследуя границы ошибок измерения, т. е. давая оценку для верхней границы неустраняемых погрешностей.

В связи с этим возникает вопрос о том, каким путём можно определить динамические характеристики уже построенной подвесной дороги.

В произвольно выбранной системе координат уравнение цепной линии имеет вид:

$$y = c \left(\operatorname{ch} \frac{x}{c} - 1 \right).$$

Измерим в трёх точках $a - h$, a , $a + h$ ординаты y_1 , y_2 , y_3 и образуем их разности. Они определяют параметры кривой C (4). Пусть $h_1 = y_2 - y_1$, $h_2 = y_3 - y_2$

$$u = \frac{h_1 + h_2}{h}, \quad v = \frac{h_2 - h_1}{h}, \quad \gamma = \frac{h}{c},$$

тогда по известной паре значений u и v из номограммы можем определить величину γ , из которой легко вычисляется C (рис. 4—7). Кроме того для вычисления γ даётся приближенная формула (10) и формула для оценки погрешности (14). Для более точных вычислений предлагаем быстро сходящийся итерационный метод (15), для оценки нестранимой погрешности, получающейся в результате неточности измерений, приводятся формулы (16), (18) и (19).

SOME METHODS FOR FINDING THE PARAMETERS OF A GIVEN CATENARY BY MEASURING ORDINATES

by

A. BÉKÉSSY, I. BIHARI and J. MEGYERI

Abstract

The problem considered is: how to compute the parameters of a catenary by measuring its ordinates in three equidistant abscissas. For solving the equation deduced, we give (i) an approximation with error estimate, (ii) a numerical method (iteration), and (iii) nomograms. The equation of inherent errors is also treated.

The problem arose in connection with cable-railways.

In a certain Cartesian system of coordinates let the equation of a catenary be

$$y = c \left(\operatorname{ch} \frac{x}{c} - 1 \right)$$

and let y_1, y_2, y_3 be the ordinates measured at the abscissas $x_1 = a - h_1$, $x_2 = a$, $x_3 = a + h$ respectively. The quantities a and h are supposed to be known. Putting

$$\begin{aligned} h_1 &= y_2 - y_1, & h_2 &= y_3 - y_2 \\ u &= \frac{h_1 + h_2}{h}, & v &= \frac{h_2 - h_1}{h}, & \gamma &= \frac{h}{c}, \end{aligned}$$

the unknown quantity will be γ . As to the computation of γ , formula (10) may eventually be used as an approximation, whereas the quantities figuring in (14) are given as error bounds. For more accurate computations equation (15) is recommended. γ can be also read off from the nomograms (figs. 4—7), if the accuracy happens to be sufficient. Formulae (16), (18) and (19) give upper bounds for inherent errors caused by errors in measuring h_1 , h_2 and h .

A NEMPERMANENS SZABADFELSZÍNŰ VÍZMOZGÁS KARAKTERISZTIKUS EGYENLETEINEK NOMOGRAMJAI

TARNAY GYULA és TÓTH KÁROLY

A Vízügyi Tervező Iroda megbízásából Intézetünk foglalkozott a nempermanens vízmozgás számítására szolgáló eljárások közül a karakterisztikus módszer számításainak egyszerűsítésével. A nempermanens vízmozgás egyszerű, megfelelően pontos számítási eljárásai a vízierőművek kezelési utasításainak kidolgozásához nyújtanak nagy segítséget. A feladat lényege az ún. karakterisztikus egyenletek nomografikus ábrázolása volt. Jelen dolgozatban az elkészített nomogramok szerkesztési elveit ismertetjük.

Bevezetés

Nempermanensnek nevezzük a vízmozgást akkor, ha annak két főbb hidraulikai jellemzője, vízhozama (Q) és nedvesített szelvénye (F) bármely keresztmetszetben (l) változik az idő (t) függvényében. A nempermanensmozgás számításánál feladatunk a vízhozam és a nedvesített szelvény meghatározása a szelvény helye és az idő függvényében. Két, hiperbolikus típusú parciális differenciálegyenlettel írhatjuk le a nempermanens vízmozgás törvényszerűségeit. Ezek egyike a dinamikai egyenlet:

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{2g} \frac{\partial(v^2)}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v^2}{c^2 R} = 0,$$

a másik pedig a vízmozgás kontinuitási egyenlete:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Itt a szokásos jelöléseknek megfelelően

- Q a vízhozamot,
- F a nedvesített keresztmetszeti területet,
- R a hidraulikus sugarat,
- v a középsebességet,
- c a Chézy tényezőt,
- t az időt,
- s az utat,
- z a vízszint tengerszint feletti magasságát jelenti.

A vízmozgás dinamikai és kontinuitási egyenletének megoldása közelítő integrálással lehetséges. A közelítő megoldások közül a közvetlen differenciák módszere (lásd pl. [1]) pontatlanabb, a karakterisztika módszer — a hidraulikai jellemzők reális felvétele mellett — pontosabb eredményt szolgáltat.

A karakterisztika módszert V. A. ARHANGELSZKIJ dolgozta ki a legalkalmasabb formában a nempermanens vízmozgás számítására. A karakterisztika módszer levezetéséhez szükséges alapvető feltevések ismertetését, valamint a számítás alapjául szolgáló egyenletek részletes levezetését mellőzzük. Utalunk itt részben ARHANGELSZKIJ fentebb említett munkájára, részben KOZÁK M. [3] dolgozatára, amelyekben a részletes levezetések megtalálhatók.

A számítás céljára szolgáló végleges összefüggések a következők:

$$(1) \quad s_m - s_a = w_c(t_m - t_a),$$

$$(2) \quad s_m - s_b = \Omega_c(t_m - t_b),$$

$$(3) \quad z_m - z_a = \left[\left(\frac{1}{B \Omega_c} \right) - \left(Q_a + \frac{Q_m - Q_a}{3} \right) \frac{s_m - s_a}{K_c^2} \right] (Q_m - Q_a) - \frac{Q_a^2}{K_c^2} (s_m - s_a),$$

$$(4) \quad z_m - z_b = \left[\left(\frac{1}{B w_c} \right) - \left(Q_b + \frac{Q_m - Q_b}{3} \right) \frac{s_m - s_b}{K_c^2} \right] (Q_m - Q_b) - \frac{Q_b^2}{K_c^2} (s_m - s_b),$$

ahol

s_a az úthossz (vízfolyással azonos irányban mérve) az a szelvényig m-ben,

s_b az úthossz a b szelvényig m-ben,

s_m az úthossz az m szelvényig m-ben,

t_a az a szelvényhez tartozó idő sec-ban,

t_b a b szelvényhez tartozó idő sec-ban,

t_m az m szelvényhez tartozó idő sec-ban,

w_c a vízfolyással azonos irányban mozgó hullámél terjedési sebessége m/sec-ban,

Ω_c a vízfolyással ellentétes irányban mozgó hullámél terjedési sebessége m/sec-ban,

z_a a vízszint tengerszint feletti magassága az a szelvényben m-ben,

z_b a vízszint tengerszint feletti magassága a b szelvényben m-ben,

z_m a vízszint tengerszint feletti magassága az m szelvényben m-ben,

B_c a mederszélesség m-ben,

Q_a a vízhozam az a szelvényben m³/sec-ban,

Q_b a vízhozam a b szelvényben m³/sec-ban,

Q_m a vízhozam az m szelvényben m³/sec-ban,

K_c a fajlagos vízszállítási tényező m³/sec-ban. A c indexek az $s_m - s_{a,b}$ szakaszok közepén vett értékeket jelentik. A B , w és Ω változók c indexét a dolgozat további részében elhagyjuk.

A feladat az (1)–(4) összefüggések alapján a karakterisztikák megszerkesztése, tehát az s_m és t_m meghatározása, valamint az (s_m, t_m) karakterisztika ponthoz tartozó vízszint (z_m) és vízhozam (Q_m) kiszámítására. Az összefüggések alapján számolni meglehetősen bonyolult és hosszadalmas eljárás. Egy vízi-erőmű tervezésénél a várható vízhozam megbecslésére igen sok karakterisz-

tikát kell kiszámítani, így az (1)—(4) összefüggéseket sokszor kell alkalmazni. Célszerűnek látszott tehát az (1)—(4) összefüggések nomografikus ábrázolása.

A feladatot két részre bonthatjuk. Így az alábbi 1. §-ban az (1), (2) összefüggések alapján az s_m , t_m meghatározására készült nomogramot ismer-tetjük, a 2. §-ban pedig a (3), (4) összefüggések felhasználásával a z_m , Q_m számítására alkalmas nomogram szerkesztését mutatjuk be.

1. §. Az s_m , t_m karakterisztikapont meghatározására készült nomogram szerkesztése

Az (1)—(4) egyenletekből láthatjuk, a keresett négy ismeretlen érték (s_m , t_m , z_m , Q_m) közül az (1), (2) egyenletben csak kettő, a (3), (4) egyenletben azonban három szerepel. Világos, hogy s_m az (1), (2) egyenletekből meghatározható, tehát az (1)—(4) egyenletrendszer két kétismeretlenes egyenlet-rendszerre bontható.

Az (1), (2) egyenletrendszer nomogramjának tervezésénél a következő szempontokat vettük figyelembe: A karakterisztika hálózat szerkesztésekor általában lépésről-lépésre haladunk, így az s , t koordinátarendszer lerögzítése nem szükséges. A nomogram tervezése szempontjából ez annyit jelent, hogy az a alapszelvény és a b alapszelvény között vizsgált folyószakasz egyik alapszelvényének — célszerűen az a alapszelvénynek — idő és helykoordinátáit zérusnak választhatjuk. Ha tehát $s_a = t_a = 0$, az (1), (2) egyenletrendszerben eredetileg szereplő nyolc nomografikus változó száma hatra csökken. Az (1), (2) egyenletrendszer az $s_a = t_a = 0$ feltétel mellett

$$(5) \quad s_m = wt_m,$$

$$(6) \quad s_m - s_b = \Omega(t_m - t_b)$$

alakban írható fel. Az itt szereplő változók jelentése megegyezik a bevezetésben említettekkel. A nomogramot tehát az (5), (6) egyenletek alapján készítjük el. Az egyes változók értékhatárait a hazai folyók vízienergiájának kihasználására számba vehető vízierőmű tervek és adatok alapján állapította meg a Vízierőmű Tervező Iroda. A megadott határok a következők:

$$0 \leq s_m \leq 25\,000, \quad 5 \leq w \leq 15, \quad 0 \leq t_m \leq 1800,$$

$$0 \leq s_b \leq 30\,000, \quad -15 \leq \Omega \leq -4, \quad -1200 \leq t_b \leq 1200,$$

Az (5), (6) egyenletrendszer többféleképpen ábrázolható nomogrammal. Készíthető pl. olyan mozgólapos nomogram, amely s_m , t_m egyidejű leolvasását lehetővé teszi, de ez a csekély előny nem indokolja a mozgólapos típus alkalmazását. Legcélszerűbbnek látszott az egyenletrendszert két nomogrammal ábrázolni. Ennek érdekében küszöböljük ki t_m -et az (5), (6) egyenletrendszerből, és írjuk fel s_m -et a következő alakban:

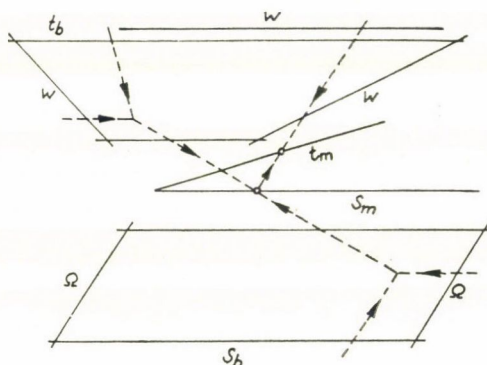
$$s_m = \frac{\frac{s_b}{\Omega} - t_b}{\frac{1}{\Omega} - \frac{1}{w}}.$$

Ez a kapcsolat az

$$f_3 = \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2}$$

ötödrendű kapcsolatnak ötváltozós, pontmezős változata. Ha ugyanis s_b , Ω ill. t_b , w változókat egy-egy pontmező paramétereiként fogjuk fel, a kapcsolatnak az

$$f_5 = \frac{f_{12} + f_{34}}{g_{12} + g_{34}}$$



1. ábra.

kanonikus alak felel meg. A kanonikus alak Soreau-determinánsába az s_b , Ω , t_b , megfelelő függvényeit beírva kapjuk a nomogram alapideterminánsát:

$$\begin{vmatrix} \frac{s_b}{\Omega} & \frac{1}{\Omega} & 1 \\ t_b & \frac{1}{w} & 1 \\ s_m & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Amint látjuk, az egyes paramétereket egyenesseregek reprezentálják, míg s_m — az eredményskála — egyenes tartójú egyenletes beosztású skála. Utóbbi önként kínálja a lehetőséget, hogy az (5) kapcsolat alapján t_m -et egyszerű osztónomogrammal határozzuk meg, amelynek egyik skálája az előbbi pontmezős nomogram eredményskála lehet. Így egy változóismétlés árán az (5), (6) egyenletrendszer kapcsolt nomogrammal ábrázolható. A megfelelő projektív transzformáció elvégzésével a nomogramot az 1. ábrán látható alakra hoztuk. A projektív transzformációt szükségtelen részleteznünk, az

alábbi skálaegyenletek az érdeklődő számára elegendő tájékoztatást nyújtanak.

$$\begin{aligned}x &= 0,012 w t_b + 20 \left(\frac{w}{3} + 5 \right), & y &= 10 w + 150, \\x &= 0,012 s_b + 20 \left(\frac{\Omega}{3} + 5 \right), & y &= 10 \Omega + 150, \\x &= 0,012 s_m + 100, & y &= 150, \\x &= -36 w + 600, & y &= 310, \\x &= \frac{300 + 0,600 t_m}{3 + 0,001 t_m}, & y &= \frac{450 + 0,310 t_m}{3 + 0,001 t_m}\end{aligned}$$

A fenti skálaegyenletekből az x, y értékeket mm-ben kapjuk meg.

2. §. A z_m, Q_m értékek meghatározására készült nomogram ismertetése

A (3), (4) egyenletrendszerből z_m nem fejezhető ki a független változókkal, Q_m meghatározására azonban implicit egyenlet írható fel. Ha bevezetjük a $z_a - z_b = \zeta$, $\frac{s_m - s_a}{K_c^2} = \sigma_a$, $\frac{s_m - s_b}{K_c^2} = \sigma_b$ jelöléseket, és a (3), (4) egyenletrendszerből z_m -et kiküszöböljük, Q_m -re a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$(7) \quad Q_m^2 \left(\frac{\sigma_a + |\sigma_b|}{3} \right) + Q_m \left[\frac{1}{Bw} + \frac{1}{B|\Omega|} + \frac{\sigma_a Q_a}{3} + \frac{|\sigma_b| Q_b}{3} \right] + \\ + \frac{\sigma_a Q_a^2}{3} + \frac{|\sigma_b| Q_b^2}{3} + \frac{Q_a}{B|\Omega|} + \frac{Q_b}{Bw} - \zeta = 0,$$

A (7) egyenletben a mindig negatív σ_b és Ω változók helyett célszerűbb volt abszolút értéküket bevezetni, természetesen a megfelelő tagok előjelének megváltoztatásával.

Jelöljük (7) együtthatóit rendre α, β és γ -val. Így az egyenlet

$$\alpha Q_m^2 + \beta Q_m + \gamma = 0$$

alakba írható. Ez négyváltozós kapcsolat, amely Cauchy-típusú pontmezős nomogrammal ábrázolható. A Q_m megoldás mindig a pontmező egyik paraméterserege lesz. Másik paraméterként az α, β és γ együtthatók bármelyikét választhatjuk. A nehézkesen számítható együtthatók meghatározására is célszerű nomogramokat készíteni. A β együttható számítására a következő kapcsolat alapján készíthetünk nomogramot:

$$\beta = \frac{1}{B|\Omega|} + \frac{\sigma_a Q_a}{3} + \frac{1}{Bw} + \frac{|\sigma_b| Q_b}{3}.$$

A $B|\Omega|$ és Bw változó párokat egy-egy változónak tekintettük, így a kapcsolat hét változót tartalmaz. Csak kapcsolt nomogrammal oldható

meg. Célszerű a jobboldal első két tagjának összegét nomogrammal ábrázolni. Így — az abszolút értékek bevezetésének eredményeként — lényegében egy Cauchy-típusú pontmezős nomogram kétszeri használatával kaphatjuk meg a jobboldal első két, illetve utolsó két tagját, és a kapott eredményeket pontosos nomogrammal összeadva kapjuk meg β értékét.

A γ együttható kapcsolata

$$\gamma = \frac{\sigma_a Q_a^2}{3} - \frac{Q_a}{B|\Omega|} + \frac{|\sigma_b| Q_b^2}{3} - \frac{Q_b}{Bw} - \zeta$$

nyolc változót tartalmaz. Jelöljük a jobboldal első-második, illetve harmadik-negyedik tagjának összegét γ_1 -el, illetve γ_2 -vel. Látható, hogy γ_1 -et és γ_2 -t ugyanazzal a nomogrammal, egy Cauchy-típusú pontmezős nomogrammal ábrázolhatjuk. A kapott γ_1 és γ_2 , valamint az adott ζ értékekből kapcsolt pontosos nomogram segítségével határozhatjuk meg γ értékét.

Az eddigieket összegezve Q_m értékének a meghatározásához a következő nomogramok szükségesek:

- 1 pontosos összeadó nomogram α meghatározásához;
- 1 Cauchy-típusú pontmezős (kétszer alkalmazva) és
- 1 pontosos összeadó β meghatározásához;
- 1 Cauchy-típusú pontmezős (kétszer alkalmazva) és
- 1 kapcsolt pontosos összeadó γ meghatározásához;
- 1 Cauchy-típusú pontmezős Q_m meghatározásához.

Q_m ismeretében z_m értéke akár a (3), akár a (4) egyenletből meghatározható, mégpedig vagy az előbbiekhöz hasonlóan nomogramsorozat segítségével, vagy — ha a skálaismétléseket el akarjuk kerülni — mozgólapos nomogrammal. Vizsgáljuk meg az utóbbi lehetőséget. Hozzuk e célból a (3) egyenletet — a már korábban bevezetett jelölésekkel — a következő alakra:

$$(8) \quad \zeta_a = -\frac{Q_m - Q_a}{B|\Omega|} - \frac{\sigma_a}{3} \frac{Q_m^3 - Q_a^3}{Q_m - Q_a}$$

Itt $\zeta_a = z_m - z_a < 0$. Ezt a kapcsolatot, mint ismeretes, kis átalakítás révén párhuzamos eltolású mozgólapos nomogrammal ábrázolni tudjuk. (V.ö. [2]) Az átalakítás után (8)-at az

$$1 = 10^{\log(Q_m - Q_a) - \log B|\Omega| - \log|\zeta_a|} + \frac{1}{3} 10^{\log \sigma_a + \log(Q_m^3 - Q_a^3) - \log(Q_m - Q_a) - \log|\zeta_a|}$$

alakban írhatjuk fel. Válasszuk meg a skálaegyenleteket célszerűen az alábbi módon:

$$\begin{aligned} x_1 &= \log(Q_m - Q_a), & y_1 &= \log(Q_m^3 - Q_a^3) - \log(Q_m - Q_a), \\ x_2 &= \log B|\Omega|, & y_2 &= -\log \sigma_a, \\ x_3 &= -\log|\zeta_a|, & y_3 &= -\log|\zeta_a|, \end{aligned}$$

Így a leolvasógörbe egyenlete

$$1 = 10^x + \frac{1}{3} 10^y$$

lesz. Ez a mozgólapos nomogram a következő illeszkedési feltételek teljesülése esetén adja meg ζ_a értékét:

$$P'_{Q_m, Q_a} | \equiv | P_{B|\Omega|, \sigma_a}; \quad I'_{\sigma_a} | \equiv | L_{\sigma_a}; \quad P'_{\zeta_a} \leftarrow | I_{\zeta_a}.$$

A feltételekből látható, hogy a nomogram használatánál csak a mozgólap és alaplap párhuzamosan tartására, és a két pontmező megfelelő pontjainak illesztésére van szükség (lásd 2. ábrát).

A többváltozós kapcsolatok mozgólapos nomogrammal való ábrázolása szemmel láthatóan előnyökkel jár. Felmerül a kérdés, hogy a (7) függvénykapcsolatra készíthető-e alkalmas mozgólapos nomogram Q_m meghatározására. A vizsgálatok mindeddig nem vezettek a kívánt eredményre, azonban sikerült a gyakorlat számára kielégítő megoldást találni. Az alábbiakban ezt a megoldást fogjuk ismertetni.

Alakítsuk át (4) egyenletet is (8)-hoz hasonló alakra:

$$(9) \quad \zeta_b = - \frac{Q_b - Q_m}{Bw} + \frac{|\sigma_b|}{3} \frac{Q_b^3 - Q_m^3}{Q_b - Q_m},$$

ahol $\zeta_b = z_m - z_b > 0$. Ezt a kapcsolatot ugyanúgy ábrázolhatjuk párhuzamos eltolású mozgólapos nomogrammal, mint a (8) kapcsolatot. A skálaegyenleteket most a következőképpen választjuk meg:

$$\begin{aligned} x_1 &= \log (Q_b - Q_m), & y_1 &= \log (Q_b^3 - Q_m^3) - \log (Q_b - Q_m) \\ x_2 &= \log Bw, & y_2 &= -\log |\sigma_b|, \\ x_3 &= -\log \zeta_b, & y_3 &= -\log \zeta_b. \end{aligned}$$

Ennek alapján a leolvasógörbe egyenlete:

$$1 = -10^x + \frac{1}{3} 10^y.$$

A (8) és (9) kapcsolat skálaegyenleteit összehasonlítva láthatjuk, hogy — a skálaegyenletek fenti megválasztásából kifolyólag — a két nomogram megfelelő skáláit, illetve görbeseregeit azonos egyenletek írják le, következésképpen a két nomogram a leolvasógörbék kivételével megegyezik. Így a két nomogram helyett lényegében elegendő egyiket megrajzolni, a másik nomogram ebből a leolvasógörbe és a kóták megfelelő megváltoztatásával származik.

A (8) és (9) kapcsolatra a fenti skálaegyenletek felhasználásával készült nomogramokra a következő illeszkedési feltételeknek kell teljesülniök:

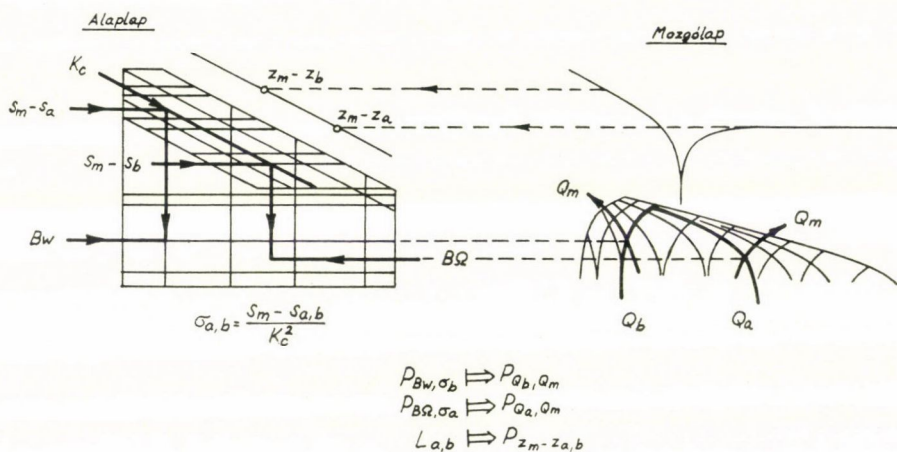
$$\begin{aligned} P'_{Q_m, Q_a} \leftarrow | P_{B|\Omega|, \sigma_a}; & \quad I'_{\sigma_a} | \equiv | L_{\sigma_a}; & \quad I'_a | \rightarrow P_{|\zeta_a|}, \\ P'_{Q_m, Q_b} \leftarrow | P_{Bw, |\sigma_b|}; & \quad I'_{|\sigma_b|} | \equiv | L_{|\sigma_b|}; & \quad I'_b | \rightarrow P_{\zeta_b}. \end{aligned}$$

E feltételekből látható, hogy a két nomogram egymástól függetlenül nem használható, mindegyik két szabad paramétert tartalmaz. A keresett Q_m és z_m meghatározása céljából tehát a következőképpen kell eljárunk:

1. Előzetesen kiszámítjuk (pl. logarléccel) $B\Omega$ és Bw értékeit.

2. $s_m, s_a (= 0)$, s_b és K_c ismeretében az alaplapon elhelyezett egyenessereges nomogramrész segítségével meghatározzuk σ_a és σ_b értékeit, majd $B|\Omega|$ és Bw bemenő adatok felhasználásával az alaplapon $\sigma_a, B|\Omega|$, ill. $|\sigma_b|, Bw$ pontmezőjén bejelöljük a megfelelő pontokat.

3. A mozgólapon Q_a paramétergörbéjét a $\sigma_a, B|\Omega|$ pontra, illetve a másik nomogram Q_b görbéjét a $|\sigma_b|, Bw$ pontra illesztjük, majd a mozgólapon úgy toljuk el, hogy az illeszkedési pontokhoz tartozó Q_m értékek megegyezzenek.



2. ábra.

4. Megnézzük, hogy a leolvasógörbék által kimetszett $|\zeta_a|$ és ζ_b értékek kiegészítik-e egymást $z_a - z_b$ -re. ($|\zeta_a| + \zeta_b = z_a - z_b$ kell legyen.) Első illesztésre ez általában nem sikerül. Ezután mindkét mozgólapon — ügyelve Q_a illetve Q_b illeszkedésére és a Q_m azonos értékű változtatására — eltoljuk mindaddig, amíg a $|\zeta_a| + \zeta_b = z_a - z_b$ összefüggés nem teljesül. Az így kapott Q_m és z_m értékek a (3), (4) egyenletrendszer megoldásai.

A végleges nomogram elkészítésénél a változók határait itt is a hazai vízierőmű tervek alapján vettük figyelembe. σ_a és σ_b könnyebb számítása érdekében az alaplapon vonalsereges nomogramot kapcsoltunk σ_a és $|\sigma_b|$ paraméteregyeneseihez. A nomogram transzformációit nem részletezzük. Tájékoztatásul az alábbi skálaegyenletek szolgálhatnak:

$$X = 45 \log (Q_m - Q_a) - 45,00, \quad Y = 90 \log \frac{Q_m^3 - Q_a^3}{Q_m - Q_a} - 270,00,$$

$$X = 36 \log (s_m - s_{a,b}) + 94,00, \quad Y = 2,5 X + 180 \log K_c - 260,00$$

$$X = 45 \log (B|\Omega|, Bw) - 72,00, \quad Y = -90 \log \sigma_{a,b} - 495,00,$$

$$X = 45 \log (2100 - 10^{Y/90}) + 61,03, \quad (|\zeta_a| \text{ leolvasógörbe}),$$

$$X = 45 \log (10^{Y/90} - 2100) + 61,03, \quad (\zeta_b \text{ leolvasógörbe})$$

$$X = -45 \log |\zeta_a| + 183,53, \quad Y = -90 \log |\zeta_a| + 31,06.$$

A fentebb említett skálaegyenletek, valamint az 1. §-ban felírt skálaegyenletek is az eredeti — tehát 360×480 mm-es — nomogramméretre vonatkoznak. Az (1), (2) és (3), (4) kapcsolatokra készült nomogramok kicsinyített ábrái a betétlapon találhatók.

(Beérkezett: 1963. november 4.)

IRODALOM

- [1] AGROSZKIN, I. I.: *Hidraulika*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.
- [2] LUCKEY, P.: *Nomographie*. Teubner, Leipzig 1949.
- [3] KOZÁK M.: „Nempermanens vízmozgás számítása.” *Hidrológiai Közlöny*, **36** (1956) 17—32.

НОМОГРАММЫ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ С НЕПОСТОЯННОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

GY. TARNAY и К. TÓTH

Резюме

Рассматриваемая в работе проблема с математической точки зрения представляет собой решение с помощью номограмм уравнений (1)—(4).

Система делится на пары уравнений, каждая из которых содержит два неизвестных. Из уравнений (1)—(2) определяются величины s_m и t_m , а из пары уравнений (3)—(4) величины z_m и Q_m .

Два из восьми переменных первой системы уравнений могут быть исключены после определенных возможных упрощений. Решение получается из номограмм связанного точечного поля (рис. 1).

Вторая часть задачи могла бы быть решена только с помощью ряда номограмм. Однако более целесообразнее кажется применение номограмм движущейся плоскости. Схему такой изготовленной номограммы можно видеть на рис. 2. Искомые величины z_m и Q_m могут быть получены с помощью итерационного метода многократным применением номограмм.

NOMOGRAPHISCHE LÖSUNG DER CHARAKTERISTISCHEN GLEICHUNGEN VON NICHTPERMANENTER WASSERBEWEGUNG MIT FREIER OBERFLÄCHE

von

GY. TARNAY und K. TÓTH

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Lösung des aus der Hydrodynamik hergeleiteten Gleichungssystems (1)—(4) mittels Nomogramme dargestellt.

Das System zerfällt in zwei Gleichungspaare je mit zwei Unbekannten. Aus den Gleichungen (1)—(2), bzw. (3)—(4) lassen sich die Veränderlichen s_m und t_m , bzw. z_m und Q_m bestimmen.

Was das erste Gleichungssystem betrifft, dies kann — nach gewissen Vereinfachungen — für beiden Unbekannten gelöst werden. Die Lösungen können von einem — zu diesem Zweck dienenden — zusammengesetzten Nomogramm abgelesen werden (Fig. 1).

Der zweite Teil der Aufgabe wäre nur durch eine Nomogrammreihe lösbar, so dass die Verfertigung eines Schiebeblattnomogramms viel zweckmässiger scheint. Fig. 2 zeigt die beiden Platten des entworfenen Nomogramms. Zur Bestimmung der Unbekannten z_m und Q_m muss dieses Nomogramm *iteriert* angewendet werden.

POLINOM APPROXIMÁCIÓK AZ $F_a(x) = \int_0^x e^{-y^a} dy$ FÜGGVÉNY SZÁMÍTÁSÁHOZ

NÉMETH GÉZA¹

Polinom approximációkat készítettünk az $F_a(x) = \int_0^x \exp(-y^a) dy$ függvény számításához. Ez a függvény gyakran szerepel a matematika elméletében és alkalmazásaiban, pl. [1]. Az $a = 2$ speciális eset a valószínűségszámításban a normális eloszlással kapcsolatos.

Tekintsük először a $0 \leq x \leq 4^{\frac{1}{a}}$ intervallumot. A $t = x/4^{\frac{1}{a}}$ jelöléssel az $F_a(x)$ függvényt az alábbi alakban állíthatjuk elő:

$$F_a(x) = x \int_0^1 e^{-4t^a \eta^a} d\eta.$$

Mármost az approximációt úgy nyerjük a „faktor módszer” szerint [2], hogy az e^{-4s} függvénynek

$$\sum_{n=0}^{12} a_n s^n + h_{12}$$

polinomközelítést helyettesítjük az integrandusba az $s = t^a \eta^a$ helyen és η szerint integrálunk; így az alábbi kapjuk:

$$(1) \quad F_a(x) = x \left\{ \sum_{n=0}^{12} a_n \varrho_n^{(a)} t^{na} + H_{12} \right\}; \quad \varrho_n^{(a)} = \frac{1}{n a + 1}, \quad 0 \leq t = \frac{x}{4^{\frac{1}{a}}} \leq 1.$$

Az a_n együtthatók az I. táblázatban találhatók, a hiba

$$\bar{H}_{12} = \max_{0 \leq t \leq 1} |H_{12}(t)| \sim 5 \cdot 10^{-11}.$$

Az $x > 4^{\frac{1}{a}}$ intervallumban $F_a(x)$ lassan változik és $x \rightarrow \infty$ esetén konvergál a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_a(x) = \int_0^{\infty} e^{-y^a} dy = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right)$$

¹ Központi Fizikai Kutató Intézet, Számítástechnikai Osztály.

határértékhez. Ezért (és más szempontok miatt is) $F_a(x)$ helyett célszerűbb a

$$G_a(x) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) - F_a(x)$$

függvényre keresni megfelelő approximációt. A $G_a(x)$ függvényt a következő alakban állíthatjuk elő (néhány elemi átalakítás után):

$$G_a(x) = \frac{4}{a x^{a-1}} e^{-x^a} \int_0^\infty e^{-4\eta} \frac{1}{(1 + \sigma\eta)^{1-\frac{1}{a}}} d\eta,$$

ahol $\sigma = 4/x^a$, $0 \leq \sigma \leq 1$. További átalakítás céljából alkalmazni fogjuk az alábbi képletet ($x > 1$):

$$\frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{a}\right) \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)} \int_0^1 \omega^{-\frac{1}{a}} (1 - \omega)^{\frac{1}{a}-1} \frac{1}{1 + \omega\sigma\eta} d\omega = \frac{1}{(1 + \sigma\eta)^{1-\frac{1}{a}}}.$$

Ezzel $G_a(x)$ a következő alakra hozható:

$$G_a(x) = \frac{e^{-x^a}}{a x^{a-1}} \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{a}\right) \Gamma\left(\frac{1}{a}\right)} \int_0^1 \omega^{-\frac{1}{a}} (1 - \omega)^{\frac{1}{a}-1} \left[4 \int_0^\infty e^{-4\eta} \frac{1}{1 + \sigma\omega\eta} d\eta \right] d\omega.$$

A belső integrált $\sigma\omega \leq 1$ esetére Csebisev-polinomsor segítségével $\sigma\omega$ hatványai szerint haladó polinommal approximáltuk. Alkalmazzuk most ezt az approximációt:

$$4 \int_0^\infty e^{-4\eta} \frac{1}{1 + s\eta} d\eta = \sum_{n=0}^{13} b_n s^n + k_{13},$$

ahol a b_n együtthatók a II. táblázatban vannak feltüntetve. Elvégezve az $s = \sigma\omega$ helyettesítést, továbbá az ω szerinti integrálást, megkapjuk $G_a(x)$ („faktor módszer” szerinti) polinom-közelítését:

$$(2) \quad G_a(x) = \frac{e^{-x^a}}{a x^{a-1}} \left\{ \sum_{n=0}^{13} b_n \varrho_n^{(a)} \sigma^n + K_{13} \right\}, \quad |K_{13}| < 3 \cdot 10^{-11},$$

ahol

$$\varrho_n^{(a)} = \frac{\alpha n - 1}{\alpha n} \varrho_{n-1}^{(a)}, \quad \varrho_0^{(a)} = 1, \quad 0 \leq \sigma = \frac{4}{x^a} \leq 1, \quad \alpha \geq 1.$$

Az (1) és (2) képletek igen alkalmasak az $F_a(x)$ függvény elektronikus számológéppel történő generálására. Egy ilyen gépi programban az a_n és b_n számokat tárolni kell, a $\varrho_n^{(a)}$ faktorokat a gép elszámíthatjuk ki.

TÁBLÁZATOK

I.		II.	
n	a_n	n	b_n
0	0,999999 999950	0	0,999999 999976
1	— 3,999999 982819	1	—0,249999 986416
2	7,999999 023469	2	0,124999 049056
3	— 10,666644 813853	3	—0,093723 572928
4	10,666411 749824	4	0,093357 196288
5	— 8,531555 418061	5	—0,113566 686720
6	5,680877 384294	6	0,153036 574720
7	— 3,226371 799450	7	—0,202889 650176
8	1,573695 284838	8	0,236419 088384
9	— 0,645461 626061	9	—0,221368 156160
10	0,208407 520870	10	0,154645 037056
11	— 0,046159 573811	11	—0,074417 438720
12	0,005117 889741	12	0,021810 380800
		13	—0,002919 235584

(Beérkezett: 1963. november 20.)

IRODALOM

- [1] ABRAMOWITZ, M.: „Table of the Integral $\int_0^x e^{-u^2} du$ ”. *Journ. Math. and Phys.* **3** (1951) 162.
 [2] NÉMETH, G.: „Construction of Approximations to Functions by the Factor Method.” *Mathematics of Computation* (sajtó alatt).

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ $F_a(x) = \int_0^x e^{-y^a} dy$ МНОГОЧЛЕНАМИ

G. NÉMETH

Резюме

Статья содержит формулы приближения функции $F_a(x) = \int_0^x e^{-y^a} dy$, дающие возможность вычислить эту функцию с точностью до 10 десятичных знаков в промежутке $0 \leq x \leq 4^{\frac{1}{a}}$, а также функцию $G_a(x) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) - F_a(x)$ в интервале $4^{\frac{1}{a}} \leq x < \infty$.

POLYNOMAPPROXIMATION DER FUNKTION $F_a(x) = \int_0^x e^{-y^a} dy$

von

G. NÉMETH

Zusammenfassung

Die Arbeit enthält bis auf 10 Stellen genaue Approximationsformeln für die oben definierte Funktion $F_a(x)$ für $0 \leq x \leq 4^{\frac{1}{a}}$ und für $G_a(x) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) - F_a(x)$ für $4^{\frac{1}{a}} \leq x < \infty$.

HULLÁMOS LEMEZ DEFORMÁCIÓJA ADOTT TERHELÉS MELLETT II

BIHARI IMRE

Bevezetés

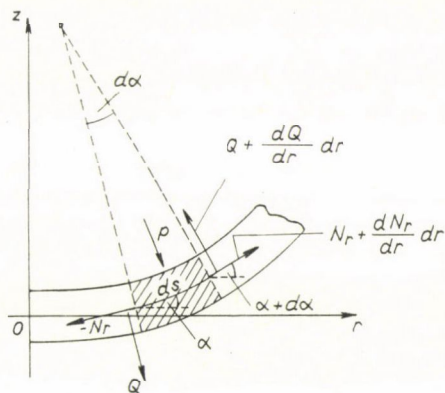
A hasonló című első részben (I. [1]) lapos hullámokkal rendelkező lemez kis kitéréseit tárgyaltuk. A dolog természetének és a lineáris egyenletnek megfelelően a kitérést az (egyenletes) terheléssel arányosnak találtuk. Köralakú lemez esetére a nagy kitérés problémájával is foglalkozni kezdtünk. Az első rész jelöléseit használva megjegyezzük, hogy a nyíróerőnek a 3. pontban adott képlete korrekcióra szorul és a (74) egyenlet pedig nincs levezetve. E hiányokat most fogjuk pótolni. Ezek után az erősen hullámos lemez kis, majd nagy kihajlásával fogunk foglalkozni. — A numerikus eredmények a III. részben következnek.

1.1. A nyíróerő meghatározása

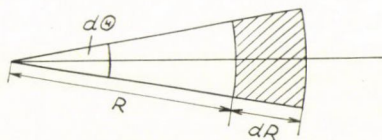
Vegyünk egy elemet a lemezből, mint az I. rész 548. oldalán és írjuk fel a ráható erőknek a lemez felületére merőleges komponenseit, majd ezek összegét tegyük egyenlővé zérussal. Persze mindez a deformált lemezre vonatkozik.

A p nyomásból származó erő $pRd\theta ds$ (ti. a lemez hossza ds és nem dr), a Q nyíróerőből származó rész

$$QRd\theta - \left(Q + \frac{dQ}{dr} dr \right) (R + dR) d\theta,$$



1a. ábra.

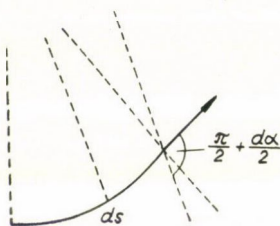


1b. ábra.

az N_r húzóerőből származó rész $\left(N_r \text{ a középnormálissal } \frac{\pi}{2} + \frac{d\alpha}{2} \text{ szöget zár be} \right)$

$$N_r R d\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{d\alpha}{2}\right) - \left(N_r + \frac{dN_r}{dr} dr\right) (R + dR) d\theta \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{d\alpha}{2}\right),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{d\alpha}{2}\right) = -\sin\frac{d\alpha}{2} = -\frac{d\alpha}{2}.$$



2. ábra.

Ezek összege a harmad és magasabbrendű kicsiktől eltekintve

$$\left(pR ds - R \frac{dQ}{dr} dr - QdR\right) d\theta = \left(pR ds - \frac{d(RQ)}{dr} dr\right) d\theta = 0$$

(érdekes, hogy az N_r -ből nem származik számbajövő, felületre merőleges erő, ellentétben a [2] 331. oldalán közölt eredménnyel, mely csak hibás lehet; l. még [3] 250. o.), melyből

$$(1) \quad pR ds - \frac{d(RQ)}{dr} dr = 0 \quad \text{ill.} \quad pR = \frac{d(RQ)}{ds},$$

vagyis

$$(2) \quad Q = \frac{1}{R} \int_0^s pR ds = \frac{1}{R} \int_0^R pR \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{Z}}{\dot{R}}\right)^2} dR.$$

Ha pl. $p = p(r) = \text{const}$ és a hullámok laposak $\left(1 + \left(\frac{\dot{Z}}{\dot{R}}\right)^2 \approx 1\right)$, akkor $Q = \frac{pR}{2}$, egyébként nem. — Meg kell jegyeznünk azt is, hogy N_r mást jelent a mi esetünkben, mint az idézett helyen. Ott a *nem hullámos* lemez nagy deformációnál fellépő nyúlásából származó átlagerőt jelenti (a középben támadt feszültség szorozva a lemez vastagságával), míg itt a hullámosítás folytán nincs a közép-rétegben nyúlás és N_r a feszültség felületi integrálját jelenti (l. I. rész 569. o.). Azonban ez sem szolgálhat magyarázatul a [2]—[3]-ban számított nyíróerő értékére.

A fentiek alapján a

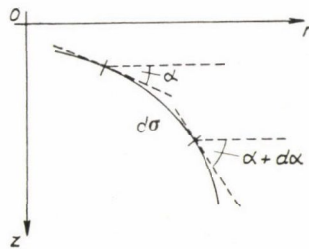
$$(3) \quad \frac{d(RM_r)}{ds} - M_t + QR = 0$$

egyenlet (I. I. rész 3. 29'') így alakul

$$(4) \quad \frac{d^2(RM_r)}{ds^2} - \frac{dM_t}{ds} + pR = 0 \quad ds = \sqrt{\dot{R}^2 + \dot{Z}^2} dr = \sqrt{1 + \left(\frac{\dot{Z}}{\dot{R}}\right)^2} dR.$$

1.2. Az I. rész 3. (74) képletének levezetése

Az erők és nyomatékok a feszültségek következményeként csak deformált lemezen lépnek fel. Az I. rész 9. ábrája csak kis kitérésekre érvényes. Nagy kihajlás esetén az ott szereplő r, dr helyébe R és $dR = \dot{R}dr$ írandó. Viszont N_r, N_t, Q (éppúgy mint M_r, M_t) az r függvényei továbbra is. Tehát



3. ábra.

az erők egyensúlyának a feltétele — minden fellépő erő radiális összetevője összegének eltűnése — most a következőképpen alakul¹ (I. a 3. ábrát is).

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & -N_r R d\theta \cos \alpha + \left(N_r + \frac{dN_r}{dr} dr\right) (R + \dot{R} dr) d\theta \cos(\alpha + d\alpha) - \\ & -N_t d\theta d\sigma \cos(\alpha + \lambda d\alpha) + \left(Q + \frac{dQ}{dr} dr\right) (R + \dot{R} dr) d\theta \cos\left(\alpha + d\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \\ & -QR d\theta \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned} \right. \quad (0 < \lambda < 1).$$

A deformált alak $w = w(R) = Z(r)$ és $w' = \frac{dw}{dR} = \frac{\dot{Z}}{\dot{R}}$. Ekkor

$$\begin{aligned} c = \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + w'^2}}, \quad c + dc = \cos(\alpha + d\alpha) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + w'^2}} + \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + w'^2}} \right) dR = \frac{1}{\sqrt{1 + w'^2}} - \frac{w'w''}{(1 + w'^2)^{3/2}} \dot{R} dr \end{aligned}$$

¹ Ebben a pontban, de csakis itt, az ívhosszat σ -val jelöljük.

$$s = \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin a = -\frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}}$$

$$s + ds = \cos\left(a + d\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(a + d\alpha) =$$

$$= -\frac{w'}{\sqrt{1+w'^2}} - \frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} \dot{R} dr.$$

Tehát az (5) $d\theta$ -val való osztás, a szorzások elvégzése és a magasabbrendű kicsinyek elhagyása után így alakul

$$-N_r Rc + \left(N_r + \frac{dN_r}{dr} dr\right) (R + \dot{R} dr) (c + dc) - N_t d\sigma(c + \lambda' dc) +$$

$$+ \left(Q + \frac{dQ}{dr} dr\right) (R + \dot{R} dr) (s + ds) - QRs = Rc \frac{dN_r}{dr} dr + \dot{R} N_r c dr +$$

$$N_r R dc - N_t c d\sigma + Rs \frac{dQ}{dr} dr + s \dot{R} Q dr + QR ds = 0$$

$$(0 < \lambda' < 1).$$

Felhasználva c, s, dc, ds fenti képletét, az első két tagot összevonva dr -rel osztva $(1+w'^2)^{1/2}$ -nel szorozva

$$\frac{d(RN_r)}{dr} - \frac{w'w''}{1+w'^2} R \dot{R} N_r - (1+w'^2)^{\frac{1}{2}} N_t \dot{R} - w' \frac{d(RQ)}{dr} - \frac{w''}{1+w'^2} R \dot{R} Q = 0$$

(6)

illetve

$$\frac{d(RN_r)}{dr} - \frac{\dot{Z}}{\dot{R}} \frac{\ddot{Z}\dot{R} - \dot{Z}\ddot{R}}{\dot{R}^2 + \dot{Z}^2} RN_r - (\dot{R}^2 + \dot{Z}^2)^{\frac{1}{2}} N_t - \frac{\dot{Z}}{\dot{R}} \frac{d(RQ)}{dr} - \frac{\ddot{Z}\dot{R} - \dot{Z}\ddot{R}}{\dot{R}^2 + \dot{Z}^2} RQ = 0$$

(6')

ami az I. rész jelöléseivel még a

$$(6'') \quad \frac{d(RN_r)}{d\sigma} + \frac{\dot{Z}}{\dot{R}} \frac{1}{r'_n} RN_r - N_t - \frac{\dot{Z}}{\dot{R}} \frac{d(RQ)}{d\sigma} + \frac{1}{r'_n} RQ = 0$$

alakba is írható (r'_n a deformált meridiángörbe görbületi sugara).

2. Kis kitérés esete tetszőleges hullámosítás esetén

2.1. A kihajlás differenciálegyenlete

Kis kitérés esetén, de talán tetszőleges kitérés esetén is — erősen hullámos lemeznél is — a radiális kitérés $\varrho(r)$ elhanyagolható az r mellett. Nem kis r -re ez világos, kis r -re viszont a $\dot{\varrho}(0) = 0$ peremfeltételből következik

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varrho(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \dot{\varrho}(r) = \dot{\varrho}(0) = 0.$$

Ezért most az I. rész (24') így alakul

$$M_r = D \left[\left(-\frac{\ddot{Z}\dot{R} - \dot{Z}\ddot{R}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{3/2}} + \frac{\ddot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{3/2}} \right) + \frac{\nu}{r} \left(-\frac{\dot{Z}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{1/2}} + \frac{\dot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{1/2}} \right) \right]$$

$$M_t = D \left[\nu \left(-\frac{\ddot{Z}\dot{R} - \dot{Z}\ddot{R}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{3/2}} + \frac{\ddot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{3/2}} \right) + \frac{1}{r} \left(-\frac{\dot{Z}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{1/2}} + \frac{\dot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{1/2}} \right) \right].$$

De

$$\dot{R} \frac{\ddot{Z}\dot{R} - \dot{Z}\ddot{R}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{3/2}} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\dot{Z}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{1/2}} \right) \quad \text{és} \quad \dot{R} = 1 + \dot{\varrho} \approx 1,$$

tehát az

$$U = U(r) = \frac{\dot{Z}}{(\dot{R}^2 + \dot{Z}^2)^{1/2}} - \frac{\dot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{1/2}} \approx \frac{\dot{\zeta}}{(1 + \dot{u}^2)^{1/2}} \quad (Z = u + \zeta)$$

jelöléssel

$$(7) \quad \begin{cases} M_r = -D \left(\dot{U} + \frac{\nu}{r} U \right) \\ M_t = -D \left(\nu \dot{U} + \frac{1}{r} U \right) \end{cases}$$

az I. (25)-höz hasonlóan. Az I. (73)-ból pedig most

$$(8) \quad \begin{cases} N_r = -D \left[\dot{U} \frac{\ddot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{3/2}} + \frac{\nu}{r^2} U \frac{\dot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{1/2}} \right] \\ N_t = -D \left[\nu \dot{U} \frac{\ddot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{3/2}} + \frac{1}{r^2} U \frac{\dot{u}}{(1 + \dot{u}^2)^{1/2}} \right]. \end{cases}$$

Ekkor a (4) így alakul

$$(9) \quad \frac{d^2(r M_r)}{ds^2} - \frac{d M_t}{ds} + pr = 0, \quad ds = \sqrt{1 + \dot{Z}^2} dr \approx \sqrt{1 + \dot{u}^2} dr.$$

Ha ezt 2π -vel szorozva s szerint integráljuk

$$(10) \quad \frac{d(r M_r)}{ds} - M_t + \frac{1}{2\pi} P_r = 0$$

egyenletre jutunk, melyben

$$P_r = P(r) = 2\pi \int_0^s pr ds.$$

Ha $p = p(r) = \text{const}$, akkor $P_r = p F_r$, ahol $F_r = F(r)$ jelenti a középső r sugarú forgásfelületrész ismert felszínét. A (10) a (7) felhasználásával az

$$(11) \quad r(r \dot{U}) + \nu r \dot{U} (1 - \sqrt{1 + \dot{u}^2}) - U \sqrt{1 + \dot{u}^2} - r F_r \varepsilon \sqrt{1 + \dot{u}^2} = 0, \quad \varepsilon = \frac{p}{2\pi D},$$

alakot veszi fel, mely az $r = e^{\varrho}$ helyettesítéssel a

$$(12) \quad \frac{d^2 U}{d\varrho^2} + \nu(1 - \sqrt{1 + \dot{u}^2}) \frac{dU}{d\varrho} - \sqrt{1 + \dot{u}^2} U - \varepsilon \sqrt{1 + \dot{u}^2} r F_r = 0$$

lineáris másodrendű egyenletbe megy át, mely

$$(13) \quad \frac{d^2 U}{d\varrho^2} + A \frac{dU}{d\varrho} + BU + C\varepsilon = 0$$

alakú. Ebben ε egy kis paraméter. Ha pl. $\nu = \frac{1}{3}$, $p \leq 5 \text{ kg/cm}^2$, $h \geq 0,08 \text{ cm}$,

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2 \text{ (acél)}, \text{ akkor } \varepsilon = \frac{6(1 - \nu^2)p}{E h^3} \leq \frac{6 \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot 5}{2 \cdot 10^6 \cdot 0,08^3 \cdot 3,14} < 0,01.$$

A (13)-ban az $U(\varrho) = \varepsilon U_1(\varrho)$ helyettesítést elvégezve $U_1(\varrho)$ -ra az

$$(14) \quad U_1'' + AU_1' + BU_1 + C = 0 \quad \left(' = \frac{d}{d\varrho} \right)$$

egyenletet kapjuk, mely az $U_1(0) = U_1(a) = 0$ peremfeltételek mellett (a a lemez sugara) oldandó meg és így az $U(\varrho) = \varepsilon U_1(\varrho)$ megoldáshoz mindössze egy egyenlet — a (14) egyenletnek — megoldásával jutunk el. Ez a III. részben fog megtörténni. — Látnivaló, hogy ebben a közelítésben pontosabb eredményt nem kaphatunk.

Megjegyzés. Talán feltűnő, hogy (14) és sok előbbi egyenlet harmadrendű, holott a lemez egyenletéről megszoktuk, hogy negyedrendű, ami négy peremfeltétel kielégítését teszi lehetővé és ez pl. a közepén lukas lemez tárgyalásánál szükséges lehet. Azonban egyenleteink mind a negyedrendű (9) egyenlet első integráljainak tekinthetők.

3. Erősen hullámos lemez nagy kitérései

3.1. A meridiángörbe „belső egyenlete”

A (6)—(6'') és a belőlük kis kitérésekre kapott egyenleteket igen komplikálttá tesszik az $\frac{1}{r_n}$, $\frac{1}{r_t}$, $\frac{1}{r_n'}$, $\frac{1}{r_t'}$ -ben levő gyökök. Ha azonban a meridiángörbe ún. „belső egyenletére” térünk rá, egyenleteink rendkívül egyszerűvé válnak, sőt egyenletrendszer helyett csak egy egyenletet, két ismeretlen függvény helyett csak egyet kapunk.

Egy görbe belső egyenletén görbülete és ívhossza közt fennálló egyenletet értünk, melynek alakja $g = f(s)$. — Mint ismeretes, ez — alkalmas kezdeti feltétellel együtt — meghatározza magát a görbét. (A belső egyenlet elnevezés arra utal, hogy az egyenlet a koordinátarendszertől független.)

Ha ti. $g = f(s)$ adva van, akkor $\frac{d\alpha}{ds} = g = f(s)$, ahonnan

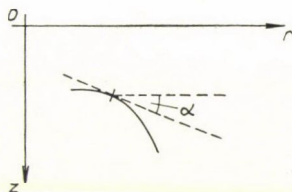
$$\alpha = \int f(s) ds = F(s)$$

és

$$\frac{dz}{dr} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} F(s) = h(s)$$

melyből

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{dz}{ds} = \frac{dr}{ds} h(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2}} h(s) = \frac{h(s)}{\sqrt{1 + h^2(s)}} = \\ = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sin \alpha = \sin F(s) \\ \frac{dr}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + h^2(s)}} = \cos \alpha = \cos F(s) \end{cases}$$



4. ábra.

ahonnan

$$(16) \quad r = \int_0^s \cos \alpha ds, \quad z = \int_0^s \sin \alpha ds, \quad \alpha = F(s) = \int f(s) ds.$$

Ez a görbe paraméteres egyenlete. Paraméter az ívhossz. — Legyen

$$\frac{1}{r'_n} = g_n, \quad \frac{1}{r_n} = g_{n_0}, \quad \frac{1}{r'_t} = g_t, \quad \frac{1}{r_t} = g_{t_0}.$$

Ezek mind ugyanazon s ívhossz függvényeinek foghatók fel, mely az $u = u(r)$ görbe mentén P -ig, $w = w(R)$ mentén P' -ig terjed. (P' az a pont, melybe P a deformáció során kerül.) Ti. a hullámosítás folytán a középrétegben nincs nyúlás és így a mondott ívhosszak egyenlők. A P és P' pontok abszcisszái, r és R , nem egyenlők.

Tekintsük ismeretlen függvénynek az

$$(17) \quad \alpha = \alpha(s) = \int_0^s g_n(s) ds$$

függvényt. Ekkor

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_n(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \alpha', \\ \frac{dZ}{dR} = \frac{\dot{Z}}{\dot{R}} = \operatorname{tg} \alpha, \\ R' = \frac{dR}{ds} = \cos \alpha, \quad R = R(s) = \int_0^s \cos \alpha \, ds, \\ Z' = \frac{dZ}{ds} = \sin \alpha, \quad Z = Z(s) = Z_0 + \int_0^s \sin \alpha \, ds, \\ g_t = -\frac{\dot{Z}}{R(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{1/2}} = -\frac{\dot{Z}/\dot{R}}{R(1 + (\dot{Z}/\dot{R})^2)^{1/2}} = -\frac{\sin \alpha}{R}. \end{array} \right. \quad \left(' = \frac{d}{ds} \right)$$

Ezek mind s függvényei és figyelemreméltó, hogy milyen egyszerű a formájuk.

Pl. a g_n görbület az α' alakot ölti a bonyolult $\frac{\ddot{Z}\dot{R} - \dot{Z}\ddot{R}}{(\dot{Z}^2 + \dot{R}^2)^{3/2}}$ alak helyett. A g_t új alakja is nagyon egyszerű. Ezenkívül a két ismeretlen függvény, $R(r)$, $Z(r)$ helyett most csak egy — az $\alpha = \alpha(s)$ — van, mellyel az $R(s)$ és $Z(s)$ kifejezhetők (l. (18)). Persze az $R(r)$ és $Z(r)$ is megkaphatók, mert az eredeti $z = u(r)$ alakból

$$(19) \quad s = \int_0^r \sqrt{1 + \dot{u}^2} \, dr = s(r).$$

Ebből *esetleg* explicite kifejezhető r az s függvényeként, mivel g_n , g_t , $u(r)$ az s függvényei formájába írhatók. — Egy másik lehetőség az, hogy az eredeti alakot is belső egyenletével adjuk meg vagy inkább az $\alpha_0 = \alpha_0(s)$ alakban

(pl. $\alpha_0 = \sin s$) és akkor $\frac{dr}{ds} = \cos \alpha_0$, $\frac{dz}{ds} = \sin \alpha_0$ (példánkban $\frac{dr}{ds} = \cos \sin s$,

$\frac{dz}{ds} = \sin \sin s$), melyből $r = r(s)$, $z = z(s)$ ($= u(r)$) adódik a meridiángörbe

eredeti alakjául. (Az $\alpha_0 = \sin s$ választásnál a görbe hullámos, középen és a széleken érintője vízszintes.) Persze akkor

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{n_0} = \alpha'_0, \quad g_{t_0} = -\frac{\sin \alpha_0}{r} \\ r' = \cos \alpha_0, \quad r = \int_0^s \cos \alpha_0 \, ds \\ \dot{u} = \operatorname{tg} \alpha_0 \\ z' = \sin \alpha_0, \quad z = \int_0^s \sin \alpha_0 \, ds \end{array} \right.$$

és

$$(21) \left\{ \begin{aligned} M_r &= D \left[(\alpha' - \alpha'_0) + \nu \left(-\frac{\sin \alpha}{R} + \frac{\sin \alpha_0}{r} \right) \right] \\ M_t &= D \left[\nu(\alpha' - \alpha'_0) + \left(-\frac{\sin \alpha}{R} + \frac{\sin \alpha_0}{r} \right) \right] \\ N_r &= -D \left[(\alpha' - \alpha'_0) \alpha'_0 - \nu \left(-\frac{\sin \alpha}{R} + \frac{\sin \alpha_0}{r} \right) \frac{\sin \alpha_0}{r} \right] \\ N_t &= -D \left[\nu(\alpha' - \alpha'_0) \alpha'_0 - \left(-\frac{\sin \alpha}{R} + \frac{\sin \alpha_0}{r} \right) \frac{\sin \alpha_0}{r} \right] \\ \frac{d(RM_r)}{ds} &= D \left[\frac{d}{ds} [R(\alpha' - \alpha'_0)] + \nu \frac{d}{ds} \left(-\sin \alpha + \frac{R}{r} \sin \alpha_0 \right) \right] = \\ &= D \left[(\alpha' - \alpha'_0) \cos \alpha + R(\alpha'' - \alpha''_0) + \nu \left(-\alpha' \cos \alpha + \frac{R}{r} \alpha'_0 \cos \alpha_0 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{r \cos \alpha - R \cos \alpha_0}{r^2} \sin \alpha_0 \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Ekkor a (4) egyenlet 2π -vel szorozva és s szerint integrálva így alakul

$$\frac{d(RM_r)}{ds} - M_t + \frac{1}{2\pi} P_r = 0,$$

ahol $P_r = P(r) = 2\pi \int_0^s p(r)R ds$ most is a lemez középső R sugarú részére ható nyomóerőt jelenti, mely $p(r) = \text{const}$ esetén $P_r = pF_s$. Itt $F_s = F(s)$ a középső r ill. R sugarú rész felszíne, ti. nem lévén nyúlás a deformált lemez felszíne ua. mint a deformálatlané. $F(s) = F_1(r) = F_2(R)$. Vagyis egyenletünk

$$\frac{d(RM_r)}{ds} - M_t + \frac{p}{2\pi} F_s = 0.$$

Ez (21) felhasználásával a következő alakot ölti

$$(22) \left\{ \begin{aligned} &R(\alpha'' - \alpha''_0) + (\cos \alpha - \nu)(\alpha' - \alpha'_0) + \nu \left[-\alpha' \cos \alpha + \frac{R}{r} \alpha'_0 \cos \alpha_0 + \right. \\ &\left. + \frac{r \cos \alpha - R \cos \alpha_0}{r^2} \sin \alpha_0 \right] + \left(\frac{\sin \alpha}{R} - \frac{\sin \alpha_0}{r} \right) + \varepsilon F_s = 0, \quad \varepsilon = \frac{p}{2\pi D}. \end{aligned} \right.$$

Itt nincs szükség az I. 3. (74) képlet hasonló átírására, mert csak egy ismeretlen függvény van, az $c(s)$. A (22) tulajdonképpen egy integro-differenciálegyenlet,

mert benne R az $R = \int_0^s \cos \alpha ds$ jelentéssel bír.

3.2. A probléma megoldása

(22) alapján a következőképpen történik:

Legyen a lemez sugara a , akkor $s_a = s(a)$ az ívhossz legnagyobb értéke, mely a lemez szélének felel meg. (A fenti példában $a = \int_0^{s_a} \cos \sin s \, ds$.) Vegyük fel az $\alpha(s)$ ismeretlen függvényt az

$$(33) \quad \alpha = \alpha(s) = s(s - s_a) (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots)$$

hatványsor alakjában. Akkor az $\alpha(0) = \alpha(s_a) = 0$ peremfeltételek ki vannak elégítve. Az r és a_0 az s ismert függvényei, melyeket képzeljünk analitikusoknak. A (23) és (18) alapján $\alpha(s)$ és $R(s)$ is hatványsor (analitikus) alakba írható. Mindezt beírva a (22)-be és s minden hatványának az együtthatóit 0-sal egyenlítve egy egyenletrendszer kapunk $a_0, a_1, a_2 \dots$ meghatározására, amivel a probléma a fentiek szerint megoldást nyert.

A megoldás effektív végrehajtását nehezé teszi az, hogy (22)-ben $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $R = \int_0^s \cos \alpha \, ds$ úgy állnak elő, hogy α helyébe a (23)-beli sort tesszük. A sorok átrendezése komplikált együtthatókra vezet. Ezért a (22) egyenletet leegyszerűsítjük.

Ti. az $R = r + \varrho(r)$ -ben vegyük $\varrho(r)$ -et r -hez képest elhanyagolhatónak (l. 2.1. elején). Ez még nagy kitérés esetén is igaznak vehető, ha azért a kitérések kicsik a lemez sugarához képest. Különösen akkor igaz ez, ha a lemez középső köralakú részét (ahol r kicsi) kirekesztjük pl. oly módon, hogy vastag (nem hajló) lemezzel helyettesítjük. Ekkor (22)-ben $R = r$ tehető és az egyenlet egyes tagjai elhagyhatók. A

$$\frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{r} \sin \alpha_0 = \frac{\cos \alpha - \cos \alpha_0}{\alpha - \alpha_0} \frac{\alpha - \alpha_0}{r} \sin \alpha_0$$

tag nyilván kicsi, ha r nem kicsi, ha pedig r kicsi, akkor a

$$- \sin \alpha_0 \frac{\frac{a' - a'_0}{dr}}{\frac{ds}{ds}} \sin \alpha_0 \Big|_{s=0}$$

határértékéhez már közel van, mely $= 0$, mert $\alpha_0(0) = 0$ és $\frac{dr}{ds} = \cos \alpha_0 \neq 0$,

ha $s = 0$ (mert $\alpha_0(0) = 0$). Viszont a $\frac{\sin \alpha - \sin \alpha_0}{r}$ tag nem hagyható el, mert kis r -re

$$\frac{\sin \alpha - \sin \alpha_0}{r} = -g_t + g_{t_0} \approx -g_n + g_{n_0} \neq 0 \quad (\text{általában}).$$

Egyenletünk leegyszerűsített formában

$$(24) \quad r(\alpha'' - \alpha_0'') + (\cos \alpha - \nu)(\alpha' - \alpha_0') + \nu(\alpha_0' \cos \alpha_0 - \alpha' \cos \alpha) + \frac{\sin \alpha - \sin \alpha_0}{r} + \varepsilon F_s = 0.$$

Remélhető, hogy az $R = r$ feltevés nem vezet a jelenség torz leírására nagy kitérés esetén sem, ti. itt a 2.1. elején szereplő durvább $\dot{R}^2 + \dot{Z}^2 \approx 1 + \dot{u}^2$ közelítést nem használjuk. Viszont az is igaz, hogy ez a közelítés sem alkalmas a radiális $\varrho(r)$ kitérés meghatározására. Ez csak (22) alapján lehetséges.

A (22) és a (24) megoldására a GALERKIN-módszer is alkalmasnak látszik, különösen a perturbációs eljárással kombinálva.

3.3. A (24) egyenlet megoldása

Ezt az

$$(25) \quad \alpha(s) = \alpha_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \alpha_n(s) = \alpha_0(s) + \delta(s)$$

alakban irányozzuk elő. Ekkor

$$(26) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \delta + \frac{1}{2!} \cos \alpha_0 \delta^2 + \frac{1}{3!} \sin \alpha_0 \delta^3 + \dots \\ \sin \alpha = \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 \delta - \frac{1}{2!} \sin \alpha_0 \delta^2 - \frac{1}{3!} \cos \alpha_0 \delta^3 + \dots \end{cases}$$

De

$$(27) \quad \begin{cases} \delta = \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \dots \\ \delta^2 = \alpha_1^2 \varepsilon^2 + 2 \alpha_1 \alpha_2 \varepsilon^3 + (2 \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2^2) \varepsilon^4 + \dots \\ \delta^3 = \alpha_1^3 \varepsilon^3 + 3 \alpha_1^2 \alpha_2 \varepsilon^4 + (3 \alpha_1 \alpha_2^2 + 3 \alpha_1^2 \alpha_3) \varepsilon^5 + \dots \\ \vdots \end{cases}$$

és így

$$(28) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \cos \alpha_0 - \alpha_1 \sin \alpha_0 \varepsilon - \left(\alpha_2 \sin \alpha_0 + \frac{\alpha_1^2}{2} \cos \alpha_0 \right) \varepsilon^2 + \\ \quad + \left(-\alpha_3 \sin \alpha_0 - \alpha_1 \alpha_2 \cos \alpha_0 + \frac{\alpha_1^3}{6} \sin \alpha_0 \right) \varepsilon^3 + \dots \\ \sin \alpha = \sin \alpha_0 + \alpha_1 \cos \alpha_0 \varepsilon + \left(\alpha_2 \cos \alpha_0 - \frac{\alpha_1^2}{2} \sin \alpha_0 \right) \varepsilon^2 + \\ \quad + \left(\alpha_3 \cos \alpha_0 - \alpha_1 \alpha_2 \sin \alpha_0 + \frac{\alpha_1^3}{6} \cos \alpha_0 \right) \varepsilon^3 + \dots \end{cases}$$

Tehát

$$(29) \quad \begin{cases} r \delta'' = \alpha_1'' r \varepsilon + \alpha_2'' r \varepsilon^2 + \alpha_3'' r \varepsilon^3 + \dots \\ \delta' = \alpha_1' \varepsilon + \alpha_2' \varepsilon^2 + \alpha_3' \varepsilon^3 + \dots \\ \alpha' = \alpha_0' + \alpha_1' \varepsilon + \alpha_2' \varepsilon^2 + \dots \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \alpha - \nu &= (\cos \alpha_0 - \nu) - \alpha_1 \sin \alpha_0 \varepsilon - \left(\alpha_2 \sin \alpha_0 + \frac{\alpha_1^2}{2} \cos \alpha_0 \right) \varepsilon^2 + \\ &+ \left(-\alpha_3 \sin \alpha_0 - \alpha_1 \alpha_2 \cos \alpha_0 + \frac{\alpha_1^3}{6} \sin \alpha_0 \right) \varepsilon^3 + \dots \\ (\cos \alpha - \nu) \delta' &= \alpha_1' (\cos \alpha_0 - \nu) \varepsilon + \\ &+ [-\alpha_1 \alpha_1' \sin \alpha_0 + \alpha_2' (\cos \alpha_0 - \nu)] \varepsilon^2 + \dots \\ \nu(\alpha_0' \cos \alpha_0 - \alpha' \cos \alpha) &= \nu(\alpha_0' \alpha_1 \sin \alpha_0 - \alpha_1' \cos \alpha_0) \varepsilon + \\ &+ \nu \left(\alpha_0' \alpha_2 \sin \alpha_0 + \frac{1}{2} \alpha_0' \alpha_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_1' \sin \alpha_0 - \alpha_2' \cos \alpha_0 \right) \varepsilon^2 + \dots \\ \frac{\sin \alpha - \sin \alpha_0}{r} &= \frac{\alpha_1 \cos \alpha_0}{r} \varepsilon + \frac{\alpha_2 \cos \alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha_1^2 \sin \alpha_0}{r} \varepsilon^2 + \dots \end{aligned} \right.$$

Mindezt betéve a (24)-be α_1 és α_2 -re a következő két *lineáris* egyenletet kapjuk (ε és ε^2 együtthatóját 0-sal egyenlítve)

$$(30) \quad r \alpha_1'' + [(1 - \nu) \cos \alpha_0 - \nu] \alpha_1' + \left(\nu \alpha_0' \sin \alpha_0 + \frac{\cos \alpha_0}{r} \right) \alpha_1 + F_s = 0$$

$$(31) \quad r \alpha_2'' + [(1 - \nu) \cos \alpha_0 - \nu] \alpha_2' + \left(\nu \alpha_0' \sin \alpha_0 + \frac{\cos \alpha_0}{r} \right) \alpha_2 + \\ \frac{\alpha_1^2}{2r} (r \alpha_0' \cos^2 \alpha_2 - \sin \alpha_0) = 0.$$

Ezek a peremfeltételekkel együtt meghatározzák α_1 , α_2 -t. Ezek után (28)-ból

$$Z = Z_0 + \int_0^s \sin a \, ds,$$

de

$$Z(s_a) = Z_0 + \int_0^{s_a} \sin a \, ds = 0,$$

vagyis

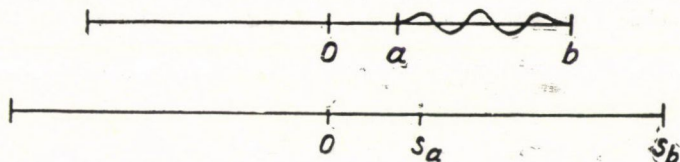
$$Z = - \int_s^{s_a} \sin a \, ds \quad \text{és} \quad \zeta(s) = Z(s) - u(s).$$

A (30)–(31) megoldására a RITZ–GALERKIN módszert alkalmazzuk. Legyen a lemez sugara (a helyett) b . A hullámosított rész $a \leq r \leq b$. A középső rész vastag lemez legyen, mely nem hajlik, de a súlyát elhanyagolhatónak vesszük. Az a és b úgy vannak meghatározva, hogy $s_a = 2\pi$, $s_b = 12\pi$ (mm) legyen.

A hullámalak legyen $c_0 = \sin s$. $\left(\text{Jobb volna } c_0 = \frac{\pi}{4} \sin s \text{-et venni, mert akkor a maximális meredekség } \pm \frac{\pi}{4} \text{ lenne, de így egyszerűbb a számítás.} \right)$

Az s_a, s_b ilyen megválasztása folytán 5 teljes hullám (10 félhullám) esik a lemezre. Ekkor

$$(32) \quad \begin{cases} \cos \alpha_0 = \frac{dr}{ds} = \cos \sin s = 1 - \frac{\sin^2 s}{2!} + \frac{\sin^4 s}{4!} - + \dots \\ \sin \alpha_0 = \frac{du}{ds} = \sin \sin s = \sin s - \frac{\sin^3 s}{3!} + \frac{\sin^5 s}{5!} - + \dots \end{cases}$$



5. ábrta.

Bár ezek valóban átrendezhetők s hatványai szerint, ezt végrehajtani mégsem célszerű, mert s az 1-nél jóval nagyobb értékeket vesz fel és így a sorokból igen sok tagot kellene venni, hogy megfelelő közelítést kapjunk. A (32)-t részben a jelen formájában, részben trigonometrikus (Fourier) sorba átrendezett alakjában használjuk. Ez az átrendezés a

$$\sin^2 s = \frac{1 - \cos 2s}{2}, \quad \sin^4 s = \left(\frac{1 - \cos 2s}{2} \right)^2 = \frac{3 - 4 \cos 2s + \cos 4s}{4}, \dots$$

képletek alapján hajtható végre. Az a és b értékét enélkül is, közvetlenül (32)-ből is, megkaphatjuk

$$a = \int_0^{2\pi} \cos \alpha_0 ds = 2\pi \left(1 - \frac{1}{2!} \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1}{6!} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots \right)$$

$$b = \int_0^{12\pi} \cos \alpha_0 ds = 6a.$$

Innen (3 tagot véve)

$$\begin{cases} a = 2\pi \frac{49}{64} \\ b = 12\pi \frac{49}{64} \end{cases} \quad \text{kb. } 0,05 \% \text{ hibával}$$

Most tekintsük az említett átrendezést

$$\begin{aligned} \cos \alpha_0 &= 1 - \frac{1}{2! 2} (1 - \cos 2s) + \frac{1}{4! 2^3} (3 - 4 \cos 2s + \cos 4s) - \\ &\quad - \frac{1}{6! 2^5} (10 - 11 \cos 2s + 2 \cos 4s - \cos 6s) + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2! 2} + \frac{3}{4! 2^3} - \frac{10}{6! 2^5} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2! 2} - \frac{4}{4! 2^3} + \frac{11}{6! 2^5} + \dots \right) \cos 2s + \\ &\quad + \left(\frac{1}{4! 2^3} - \frac{2}{6! 2^5} + \dots \right) \cos 4s + \left(\frac{1}{6! 2^5} + \dots \right) \cos 6s + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \alpha_0 &= \sin s - \frac{1}{3! \cdot 2} (1 - \cos 2s) \sin s + \frac{1}{5! \cdot 2^3} (3 - 4 \cos 2s + \\ &+ \cos 4s) \sin s - \dots = \left(1 - \frac{3}{3! \cdot 2^2} + \frac{10}{5! \cdot 2^4} + \dots\right) \sin s + \\ &+ \left(\frac{1}{3! \cdot 2^2} - \frac{5}{5! \cdot 2^4} + \dots\right) \sin 3s + \left(\frac{1}{5! \cdot 2^4} + \dots\right) \sin 5s + \dots\end{aligned}$$

Kielégítő a következő közelítést venni

$$\begin{aligned}\cos \alpha_0 &\approx \frac{49}{64} + \frac{11}{48} \cos 2s + \frac{1}{192} \cos 4s \\ \sin \alpha_0 &\approx \frac{169}{192} \sin s + \frac{5}{128} \sin 3s + \frac{1}{1920} \sin 5s.\end{aligned}$$

Az együtthatók hibája 10^{-3} -on alul van. Ekkor

$$r = \int_0^s \cos \alpha_0 ds = \frac{49}{64} s + \frac{11}{96} \sin 2s + \frac{1}{768} \sin 4s.$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned}F_s = 2\pi \int_0^s r ds &= 2\pi \left(\frac{49}{128} s^2 + \frac{11}{192} \cos 2s - \frac{1}{3072} \cos 4s \right) + \\ &+ 2\pi \left(\frac{1}{192} + \frac{1}{3072} \right).\end{aligned}$$

Írjuk a (30) egyenletet a következő formába

$$L[\alpha_1] \equiv r^2 \alpha_1'' + r[(1 - \nu) \cos \alpha_0 - \nu] \alpha_1' + (\nu r \alpha_0' \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0) \alpha_1 + r F_s = 0. \quad (30')$$

Ennek együtthatóit most már az előbbiek alapján felírhatjuk:

$$r^2 = \left(\frac{49}{64}\right)^2 s^2 + \left(\frac{11}{96}\right)^2 \sin^2 2s + 2 \frac{49}{65} \frac{11}{96} s \sin 2s + 2 \cdot \frac{49}{64} \frac{1}{768} s \cdot \sin 4s,$$

si.t. Az együtthatók, kellő átalakítás után, a következő alakú tagokból állnak

$$s^k \cos ls, \quad s^k \sin ls \quad (k = 0, 1, 2; \quad l = 1, 2, \dots, 9).$$

(30')-re alkalmazható GALERKIN módszere. — Az α_1 -et

$$\alpha_1(s) = a_1 \sin s + a_2 \sin 2s + a_3 \sin 3s$$

alakban irányozzuk elő és az a_1, a_2, a_3 -at az

$$\int_{2\pi}^{12\pi} L[a_1] \sin ks \, ds = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

lineáris egyenletrendszerből határozzuk meg. A (31) egyenletre hasonló eljárást alkalmazva nyerjük az $\alpha_2(s)$ -et.

(Beérkezett: 1963. május 23., átdolgozva: 1964. január 9.)

IRODALOM

- [1] BIHARI, I.: „Hullámos lemez deformációja adott terhelés mellett I.” *A MTA Matem. Kut. Int. Közleményei* 7 (1962) B. 537—575.
- [2] TIMOSHENKO, S.: *Theory of Plates and Shells*. New York, 1940.
- [3] NÁDAI, Á.: *Die elastischen Platten*. Berlin, 1925.

ДЕФОРМАЦИЯ ВОЛНИСТОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ЗАДАННОЙ НАГРУЗКЕ II

I. BIHARI

Резюме

В работе рассматриваются малые и большие отклонения произвольно гофрированной пластинки. Для определения «вертикальных и горизонтальных» амплитуд составлены соответствующие дифференциальные уравнения. В случае малых амплитуд применяется метод пертурбаций относительно малого параметра, входящего в уравнение. В случае больших амплитуд дифференциальные уравнения упрощаются тем, что берется внутреннее уравнение меридианной кривой. Длина дуги меридианной кривой не изменяется от деформации. И в этом случае для решения уравнений применяется метод пертурбаций, а для решения некоторых уравнений используется метод ГАЛЕРКИНА.

Численные результаты будут следовать в III части работы.

DEFORMATION OF CORRUGATED PLATES II

by

I. BIHARI

Summary

The paper is dealing with the small and large deformation of an arbitrarily corrugated plate. It will be determined the differential equations for the „vertical and horizontal” components of the deflection. Corresponding to a small parameter in the equation for small deflection the perturbation method will be applied. The equations for large bending will be simplified by taking the so called intern equation of the meridian curve. Viz. the measure of the arc does not vary with the deformation. In solving the equation it will be applied perturbation method here too and the successive approximate equations will be solved by the GALERKIN-method. The numerical results will be published in the part III.

KÖNYVISMERTETÉSEK

Közleményeink magyar nyelvű B sorozatában ezentúl könyvismertetéseket is fogunk közölni. Ennek keretében a matematika alkalmazóinak érdeklődésére számot tartó, magyar nyelven megjelent könyvek és néhány olyan idegen nyelvű könyv ismeretetését kívánjuk megvalósítani, amelynek Magyarországon való elterjedése, esetleg magyarul való megjelentetése kívánatosnak látszik.

PRÉKOPA ANDRÁS: *Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal.* Műszaki Kiadó, Budapest, 1962. 49 Ft.

A könyv címe első hallásra újszerűnek hangzik a valószínűségszámítás elnevezéshez szokott olvasó számára. Az előszóban a szerző rámutat, hogy valószínűségelméleten pontosan ugyanazt érti, amit valószínűségszámításnak is szoktak nevezni, s a megszokott elnevezés helyett nem elsősorban azért választotta ezt az újat, mert valamennyi világnyelven ma már így nevezik a valószínűség matematikai elméletével foglalkozó tudományágat, hanem mert a valószínűségelmélet kifejezés sokkal hívebben tükrözi azt a tényt, hogy itt egy önálló elméletről, önálló tudományágról van szó. Bár természetesen a terminológia nem döntő egy könyv értéke szempontjából, a magam részéről helyesnek, indokoltnak tartom a szerző címválasztását és meggyőződésem, hogy az új elnevezés rövid időn belül el fog terjedni szakemberek és felhasználók körében egyaránt.

Rátérve a lényegi ismertetésre, PRÉKOPA ANDRÁS könyve egy olyan úrt volt hivatva betölteni, amely már fékezőleg hatott a valószínűségszámítási módszerek gyakorlati alkalmazásainak szélesebbkörű elterjedésére. Nevezetesen azt, hogy e könyv megjelenése előtt nem volt olyan nem tankönyv jellegű magyar nyelvű könyv, amely az érdeklődők széles rétegei számára világos, könnyen érthető, de matematikai szempontból is kifogástalan áttekintést ad a valószínűség matematikai elméletéről.

A könyv elsősorban nem matematikusok, hanem mérnökök, műszaki szakemberek számára készült, ennek ellenére kitűnően alkalmas arra is, hogy nem valószínűségelmélettel foglalkozó matematikusok megismerjék a matematika e gyorsan fejlődő területének legfontosabb fogalmait, eredményeit. Az egyébként, hogy a könyv elsősorban műszakiak számára íródott, csak azt jelenti, hogy a gyakorlati példák többsége műszaki vonatkozású és néhány műszaki alkalmazást részletesebben tárgyal a szerző, de ez nem akadály a annak, hogy más szakterület művelői is haszonnal tanulmányozhassák a könyv anyagát.

A szerző elsősorban arra törekedett, hogy az olvasó világosan megértse a valószínűségelmélet legfontosabb fogalmait, helyesen lássa a fontosabb tételek jelentőségét. Ezért a tételek bizonyítására csak ott tér ki, ahol a bizonyítás egyszerű, nem kíván mélyebb segédeszközöket és egyben rávilágít a valószínűségelmélet alapvető gondolataira. Külön említést érdemel, hogy a szerző nagy gondot fordít egy kísérlettel kapcsolatos elemi és véletlen események világos magyarázatára, illetve ezeknek halmazelméleti interpretálására. Számos különböző jellegű példán keresztül mutatja be, mennyire fontos, hogy világosan lássuk a gyakorlati feladatoknál az egyes valószínűségelméleti fogalmak konkrét jelentését. Ez igen sokszor okoz nehézséget azok számára, akik először ismerkednek a valószínűségelmélettel, s így remélhető, hogy e könyv áttanulmányozása révén sokkal többen fognak megbarátkozni a valószínűségelmélettel s fogják tudni hasznosan alkalmazni gyakorlatban felmerülő problémák megoldására.

A könyv tíz fejezetet tartalmaz, az első kilenc szorosan a valószínűségelmélettel kapcsolatos témaköröket tárgyal, míg a 10. fejezet rövid áttekintést ad a matematikai statisztika elemeiről. A valószínűségelmélet alapfogalmainak és tételeit ismertető fejezeten kívül külön fejezetet szentel a szerző a Poisson-eloszlásnak illetve a Poisson-folyamatnak, a normális és az ebből származtatott eloszlásoknak, a generátor- és a karakterisztikus függvény tárgyalásának, a kilencedik fejezet pedig a fontosabb határértéktételeket foglalja össze. Nagyon helyesnek tartom, hogy a szerző a valószínűség matematikai elméletét tárgyaló könyvében egy fejezetet a matematikai statisztika rövid ismertetésére is szánt, hiszen a valószínűségelmélet legtöbbször éppen a matematikai statisztikán keresztül kerül alkalmazásra. A könyv jellegéből következően természetesen a matematikai statisztika elég vázlatosan kerül ismertetésre — bár az alapfogalmak és legfontosabb statisztikai módszerek szerepelnek.

A Függelékben a szerző röviden összefoglalja a halmazelmélet és kombinatorika elemeit, valamint a legfontosabb ismereteket a gamma függvényről. A könyvet számos elméleti és gyakorlati példa teszi színesebbé, továbbá egy kivételével minden fejezet végén szerepelnek feladatok, amelyek megoldását a könyv végén találhatja meg az olvasó.

Sajnálatos, hogy elég sok sajtóhiba, illetve elírás maradt a könyvben. Ezek legtöbbje azonban könnyen észrevehető, így nem okoznak nehézséget az olvasónak.

Biztos vagyok benne, hogy ez a kitűnő könyv nagy szolgálatot tesz a matematika megbecsülése és alkalmazása ügyének.

(Éltető Ödön¹)

A. JA. HINCIN: *A tömegkiszolgálás matematikai elméletéről* (Összegejtött munkái).

Работы по математической теории массового обслуживания. Физматгиз, Москва, 1963.

A nem rég elhunyt kiváló szovjet matematikus, A. JA. HINCIN (1894—1959) — nevét a hazai matematikusok nagyon jól ismerik — a valószínűségszámítás eredményeinek első alkalmazója és továbbfejlesztője volt. Az elsők között kapcsolódott be még a harmincas években a telefon elmélettel és a tömegkiszolgálással (az elnevezés is tőle származik) foglalkozó kutatómunkába, s az elért eredmények gyakorlati megvalósításába is.

Ez a kötet A. JA. HINCIN hét dolgozatát gyűjti egybe, a kötet szerkesztője HINCIN egyik legnevesebb tanítványa, B. V. GNYEGYENKO, aki előszót, valamint a tömegkiszolgálás néhány eredményéről és problémájáról tartalmas utószót is írt a könyvhöz.

A. JA. HINCIN életének két periódusában foglalkozott a tömegkiszolgálás matematikai elméletével, a 30-as, majd az 50-es években. Az első periódusból három, az utóbiból pedig négy dolgozata került ebbe a gyűjteménybe. A „Stacionárius sorok matematikai elmélete” című (*Математ. Сборник*, 1932) dolgozatában, amellet, hogy nagyon érdekes és gyakorlatilag fontos problémákat old meg egy rendkívül szép új módszert is használ, mely a későbbiekben markovizálhatóság néven elterjedt vált a tömegkiszolgálás elméletében. (Erről tanúskodnak pl. D. KENDALL és TAKÁCS L. jóval későbbi dolgozatai.) A gyűjtemény alapját HINCINnek „A tömegkiszolgálás elméletének matematikai módszerei” címmel a Szttyeklov Intézet kiadványaiban 1954-ben megjelent könyvecskéje képezi. A könyv pontos matematikai megalapozását adta az akkoriban nagyon elterjedt s sokszor nem kellő pontossággal (elsősorban a technikai irodalomban) bizonyított telefon- és távközlési eredményeknek.

HINCIN műveinek olvasása közben megkapja az embert a tárgyalásmód kristálytisztasága, világossága, a gyakorlati problémák szép megfogalmazása s emellett a rá oly jellemző egyszerűség. Műveit olvasni művészi élményt is jelent. Érdekes megjegyezni, hogy a gyűjteményben szerepel két olyan dolgozat is, melyet életében nem publikált, s a kötet szerkesztője talált meg HINCIN kéziratainak átnézősekor.

HINCIN munkái óta jelentős az ezen tárgykörben megírt tankönyvek és összefoglalók száma (RIORDAN, TAKÁCS, BHARUCHA-REID és mások), eredményei mégsem veszítették el aktualitásukat. Először az ő munkássága nyomán vált a tömegkiszolgálás elmélete elégszám matematikai diszciplínává. Igaz, hogy a sztochasztikus folyamatok elméletébe beágyazhatók ezek a problémák, azonban úgy, mint a valószínűségelmélet

¹ Központi Statisztikai Hivatal.

a valós függvénytanba. Egy ilyen belekényszerítésből a gyakorlat és elmélet is sokat veszítene, éppen erről győzi meg az olvasót a szerző.

A tömegkiszolgálás iránt érdeklődő matematikusok hasznos olvasmánya ez a gyűjtemény, de más szakembereknek is komoly segítőtársa lehet.

(Arató Máttyás)

I. S. SOKOLNIKOFF—R. M. REDHEFFER: *Mathematics of Physics and Modern Engineering*. McGraw—Hill, New York, 1958, 810 o.

A teoretikus felfedezések és gyakorlati alkalmazásba vételük között eltelt idő egyre rövidebbé válik és ezért a mérnököknek egyre nagyobb matematikai felkészültségre van szükségük. A technika haladása mellett figyelemmel kell a mérnököknek kísérniök a matematika fejlődését is. A könyv szerzőinek az a véleménye, hogy pl. a funkcionál-analízis és a Hilbert-tér elmélete a technikai tudományokban a következő 20 éven belül általánosan használttá válik.

Ezt a szempontot szem előtt tartva a szerzők olyan könyvet igyekeztek írni, amely lényegileg csak a differenciálás és integrálás ismeretét feltételezve a mérnökök számára továbbképzésre használható legyen. Célkitűzésüket jól valósították meg és könyvük a magyar mérnökök számára is kitűnően használható, akár abból a szempontból, hogy műegyetemi tanulmányaik feledésbe merült részeit felelevenítsék, akár pedig, hogy ezekhez csatlakozó, a műegyetemen tanultakon túlmenő ismeretanyagot szerezzenek meg. A könyvnek kb. egyharmad része a műegyetemi matematikai szigorlat anyaga, a többi pedig az elmélet további kiépítését tartalmazza. A mű egymástól függetlenül olvasható 9 fejezetre oszlik, amelyek ugyancsak nagyrészt egymástól függetlenül olvasható alfejezetekből állnak. Ez a felépítés megkönnyíti azon olvasók munkáját, akik egy speciális témakörrel óhajtanak felvilágosítást kapni.

Ez a könyv nem tartozik azoknak a matematikai zsebkönyveknek a csoportjába, amelyekből a magyar könyvpiacra már többfajta is található és amelyek jórészt képlet- és táblázatgyűjteményből állnak, több-kevesebb összekötő szöveggel ellátva. Másrészt nem sorolható azok közé a művek közé sem, amelyek túlságos matematikai szigorral, vagy a matematika nem egykönnyen felhasználható részeinek szélesre teregetésével riasztják el a matematikai érdeklődésű mérnököt attól, hogy továbbképezze magát.

A szerzők e két véglet között iparkodtak a középutat megtalálni. Könyvüket elsősorban azok használhatják, akik a matematikát, mint foglalkozási körükben a józan ész támogató és meggondolásaikat pontosabbá tehető segédeszközt igyekeznek elsajátítani. A könyv stílusa világos, egy jól megírt tankönyvének felel meg, mérnökök minden nehézség nélkül olvashatják. A fejezetek mindegyike számos mérnöki vonatkozású kidolgozott és kidolgozatlan példát tartalmaz. (Meg kell jegyezni, hogy ezek egyrészt műegyetemeinken a mechanika és elektromosságtan tantárgyak keretein belül tárgyalják.)

A könyv tartalmának áttekintése: közönséges differenciálegyenletek (100 o.), végtelen sorok (100 o.), többváltozós függvények (70 o.), vektoralgebra és mátrixok (70 o.), vektorterek (70 o.), parciális differenciálegyenletek (100 o.), komplex függvénytan (80 o.), valószínűségszámítás (70 o.), numerikus módszerek (70 o.). Ezenkívül a függelékben megtalálhatók a következő tárgykörök: determinánsok, Laplace-transzformáció, a Riemann- és Lebesgue-féle integrálok összehasonlítása. Végül az utolsó 20 oldal a kitűzött feladatok megoldását tartalmazza.

(Makai Endre)

VACLAV PLESKOT: *Nomografie*. Praha 1963 (Státní Nakladatelství Technické Literatury). 243 oldal, 178 ábra és 6 melléklet, 201 irodalmi utalás.

Ismeretes, hogy a műszaki matematika egyik legfontosabb ága a nomográfia és ezért minden műszakilag fejlett országban időről-időre megjelenik valamiféle nomográfiai munka hosszabb-rövidebb terjedelmel. Ezekhez az országokhoz tartozik Csehszlovákia is, és ezt tükrözi V. PLESKOT professzor könyvének megjelenítése. Ez a könyv azonban az átlagosnál jóval nagyobb igényű és terjedelmű. Részletes, modern nomográfiát írni, amely mind az elmélet, mind a gyakorlat igényeire tekintettel van, igen fáradtságos és hosszadalmas munka és csak akkor sikeres, ha a szerzőnek az elmélet ismeretén és a gyakorlati nomogramtervezésben való jártasságon kívül még olyan széleskörű pedagógiai tapasztalata is vannak, mint amilyeneket V. PLESKOT professzor a csehszlovák műszaki egyetemi hallgatók nomográfiában való kiképzése során szerzett.

A könyv beosztása vázlatosan a következő:

I. A nomográfia alapfogalmai. A számegetes, az egyenletes skála, egyenletes skála szerkesztése. Függvényskálák, skálakarakterisztika. Kettős skálák. Függvények görbéi különböző koordinátarendszerekben, görbék kiegyenesítése (9—44 o.).

II. A logarléc. A logarléc részei, skálái és állandói. Szorzás, osztás és hatványozás logarlécen. A trigonometrikus skálák használata. Egyéb speciális skálák (44—75 o.).

III. Rácsok. Milliméterpapír, logaritmikus és féllogaritmikus rács. Szinus és arkuszinus papír. Speciális papírok: féllogaritmikus papír a szabványos számsorozathoz. Egyéb speciális rácsok és papírok (75—94 o.).

IV. Vonalsereges nomogramok. Alapfogalmak, különböző nomogramtípusok ismertetése. Descartes-nomogramok. Nomogramok szerkesztése milliméterpapíron és logaritmuspapíron. A Cauchy-féle kanonikus alak, Massau-kritérium. Kórsereges nomogramok. Kapcsolt vonalsereges (egyenessereges) nomogramok (95—146 o.).

V. Pontsoros és pontmezős nomogramok. A pontsoros nomogramok elve, az anamorfózis problémája. Kanonikus alak, nomográfiai rendszám. A Cauchy-típusú kapcsolatok ábrázolása. Harmadrendű kapcsolatok ábrázolása. A nomogramok transzformációja. A Clark-típusú kapcsolat. Harmadrendű kapcsolatok ábrázolása Clark-típusú nomogrammal. A Pentkovszkij-féle vázak alkalmazása. Ötöd- és hatodrendű kapcsolatok. Négy- és többváltozós kapcsolatok. Kapcsolt pontsoros nomogramok. Pontmezős (binér mezős) nomogramok (146—216 o.).

VI. Mozgólapos nomogramok. Az illeszkedés általános fogalma és fajtái. Különböző típusú mozgólapos nomogramok. A nomogramok általános elmélete (216—237 o.).

Az elméleti ismertetést számos példa és gyakorló feladat egészíti ki. Igen nagy az ábraanyag is és ezeknek jó része nemcsak vázlat, hanem ténylegesen megtervezett és reprodukált nomogram.

A könyv kiállítása a csehszlovák műszaki kiadóvállalatot dicséri.

Hasonló nomográfiára magyar nyelven is szükség van, ezért célszerű lenne V. PLESKOT könyvét magyarra lefordítani; meggondolnád csupán az, hogy nem lehetne-e magyar szerzőt találni hasonlóan nagyigényű munka megírására.

(Békéssy András)

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET SZEMINÁRIUMAIBAN 1963-BAN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK

Intézeti szeminárium

1. ERDŐS PÁL: *Újabb gráfelméleti eredmények.* (Január 8.)
2. ERDŐS PÁL: *Maradékosztályok összeadásáról.* (Június 3.)
3. ERDŐS PÁL: *Végtelen gráfok színezéséről.* (Június 10.)
4. MAHALANOBIS, C. P.*: *On some new developments in the form of fractile graphical analysis.* (Július 16.)
5. HAJNAL ANDRÁS: *A kiválasztási axióma és a kontinuum-hipotézis függetlensége.* (November 11.)
6. BÉKÉSSY ANDRÁS: *Algoritmikus nyelvek.* (December 17.)
7. FUCHS LÁSZLÓ: *Homologikus algebra.* (December 20.)

Osztályszemináriumok

A valószínűségszámítási osztály szemináriuma

1. BÉKÉSSY ANDRÁS: *Betöltési problémákra vonatkozó határeloszlástételek.* (Január 17.)
Lásd az előadó „On classical occupancy problems I” című dolgozatát, e Közlemények **8** (1963) A, 59–72.
- 2–4. BOGNÁR JÁNOSNÉ: *Referáló előadássorozat.* (Január 17., 25., február 11.)
Az előadó WOLFOWITZ, J., „Coding theorems of information theory” (Springer, 1961) c. könyvét ismertette.
5. RÉNYI ALFRÉD: *Stabilis eseménysorozatokról.* (Január 24.)
Lásd az előadó „On stable sequences of events” c. cikkét (Sankhya, sajtó alatt).
- 6–8. BÁRTFAI PÁL: *Referáló előadássorozat.* (Április 24., május 2., 16.)
Az előadó CHOQUET, G., „Theory of capacities” (Annales de l’Institut Fourier **5** (1953–54) 131–295) c. cikkét ismertette.
9. RÉNYI ALFRÉD: *Két információelméleti problémáról.* (Május 23.)
Lásd az előadó ERDŐS PÁLLal közös „On two problems of information theory” c. cikkét, e Közlemények **8** (1963) A, 229–244.
10. PALÁSTI ILONA: *Kétszínű véletlen gráfok összefüggősége.* (Május 30.)

* Indian Statistical Institute (Calcutta).

Lásd az előadó „On the connectedness of bichromatic random graphs” c. cikkét, e Közlemények **8** (1963) A, 431—441.

11—14. CSISZÁR IMRE: *Referáló előadássorozat.* (Október 3., 17., november 19., december 5.)

Az előadó az ergodelméletben információelméleti módszerekkel elért új eredmények egy részét ismertette, ROHLIN, V. A., „Új fejlődés a mértéktartó leképezések elméletében” c. cikke (MTA III. Oszt. Közleményei **12** (1962) 339—360; eredeti: Успехи мат. наук **15** (1960) 3—26), az ott idézett irodalom, valamint JACOBS, K. előadásainak jegyzete („Lecture notes on Ergodic Theory”, Aarhus Universitet, 1962/63) alapján.

15. BÉKÉSSY ANDRÁS: *Klasszikus cellabetöltési problémákkal kapcsolatos határeloszlástételek.* (November 15.)

Az előadó azonos című kandidátusi disszertációjának főbb eredményeit ismertette.

Lásd még az előadó „On classical occupancy problems” c. dolgozatait, e Közlemények **8** (1963) A, 59—72 és **9** (1964) A, 1—2. füzet, sajtó alatt.

A matematikai statisztikai osztály szemináriuma

1. BALOGH ALBERT,¹ CSÁKI ENDRE és SARKADI KÁROLY: *Híradástechnikai alkatrészek élettartam-vizsgálatával kapcsolatos matematikai statisztikai kérdések.* (Január 24.)

2—4. ARATÓ MÁTYÁS: *Stacionárius Gauss—Markov-folyamatok néhány statisztikai problémájáról.* (Február 7., 14., 28.)

Az előadó kandidátusi disszertációját ismertette. Lásd az előadó következő dolgozatait: „Оценка параметров стационарного гауссовского-марковского процесса” (ДАН **145** (1962) 13—16; Колмогоров, А. Н., Синай, Я. Г. társszerzőkkel) „Об оценке параметров комплексного гауссовского-марковского процесса” (ДАН **146** (1962) 747—750).

5. RADÓ FERENC²: *Egy várakozási idő feladatáról.* (Március 28.)³

6—7. KÖRMENDY LÁSZLÓ⁴ és ZUKÁL ENDRE⁴: *A húsipari kutatás matematikai problémái.* (Május 23., 30.)

A közgazdasági alkalmazások csoport és a valószínűségszámítási osztály közös szemináriuma: sztochasztikus folyamatok

1—2. ARATÓ MÁTYÁS: *Gauss—Markov folyamatok statisztikai problémái.* (Január 8. és február 12.)

3—4. ARATÓ MÁTYÁS: *Sztochasztikus folyamatok négyzetes középben értelmezett tulajdonságai.* (Február 19. és 26.)

5—6. ARATÓ MÁTYÁS: *Véletlen mértékek.* (Március 5. és 12.)

7—8. ARATÓ MÁTYÁS: *Sztochasztikus integrálokról.* (Március 26. és április 9.)

¹ Híradástechnikai Ipari Kutató Intézet.

² Kolozsvár

³ A Közgazdasági csoporttal közös rendezésben.

⁴ Országos Húsipari Kutató Intézet.

9—11. ARATÓ MÁTYÁS: *Diffúziós egyenletek és sztochasztikus differenciálegyenletek Itó-féle értelmezése.* (Április 16., 23. és május 7.)

12. GULYÁS OTTÓ⁵: *J. Hájek „On linear statistical problems in stochastic processes” c. dolgozatának ismertetése.* (Június 4.)

13. ARATÓ MÁTYÁS: *Martingálokról.* (Június 11.)

14—16. CSIBI SÁNDOR:⁵ *U. Grenander „Stochastic processes and statistical inference” c. dolgozatának ismertetése.* (Október 22., 28. és november 4.)
(Lásd Archiv för Mat., 1950.)

17. CSISZÁR IMRE: *Gauss mértékek abszolút folytonosságról és szingularitásáról.* (November 13.)

ROZANOV cikkének ismertetése. (Теория вероятностей и её применения, 1962.)

18—19. ARATÓ MÁTYÁS: *Sztochasztikus folyamatok statisztikájának néhány megoldatlan problémája.* (November 20. és 27.)

A valós függvénytani osztály topológiai szemináriuma

1—4. CSÁSZÁR ÁKOS: *A szintopogén terek elméletéről.* (Március 1., 29., április 26., május 24.)

Lásd az előadó „Fondements de la topologie générale” (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1960) c. könyvét.

5—8. CSÁSZÁR ÁKOS: *Topologikus vektorterek.* (Október 18., november 15., 29., december 13.)

A differenciálegyenletek osztályának szemináriuma

1—3. BIHARI IMRE: *Hullámos lemez deformációja adott terhelés mellett.* (Január 15., 22., 28.)

Lásd az előadó hasonló c. dolgozatát, e Közlemények **7** (1962) B, 537—575.

4—5. ELBERT ÁRPÁD⁶: *Kvázikonform leképezésekről.* (Február 4., 11.)

Az előadó ismertette TÓKI-SHIBATA „On the pseudo-analytic functions” (Osaka Math. J. **6**(1954) 145—165) c. cikkét.

6—7. SIMON LÁSZLÓ:⁶ *A Vekua szerint kvázi-analitikus függvényekről.* (Február 18., 25.)

Az előadó ismertette ВЕКУА, И. Н., „Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек” (Мат. сборник **31** (73) (1952) 217—314) című cikkét

8—12. SZILÁRD KÁROLY: *Kevert típusú másodrendű kvázilineáris parciális differenciálegyenletek alkalmazása a gázdinamikában. (A Tricomi és Frankl-féle problémákról.)* (Március 4., 11., 19., 25.)

Ismertető előadás az alábbi művek alapján: MORAWETZ, C. S., „A uniqueness theorem for Frankl's Problem” (Communications on pure and appl. math. **7** (1954) 697—703); MORAWETZ, C. S., „On the non-existence of continuous

⁵ Távközlési Kutató Intézet.

⁶ Matematika szakos hallgató, ELTE TTK.

bransonic flows past profiles I" (Comm. on pure and appl. math. **9**(1956) 45—68); SCHIFFER, „Analytical theory of subsonic and supersonic flows" (Handbuch der Physik, Bd. IX. Strömungsmechanik III.; Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1960); ФРАНКЛЬ, Ф. И., „О задачах Чаплыгина для смешанных до-и сверхзвуковых течений" (Изв. АН СССР, сер. мат. **9** (1945)); Чаплыгин, С. А., „О газовых струях" (Чаплыгин: Избранные труды по механике и математике, Москва, 1954, 9—89).

13—17. FÉNYES TAMÁS: *Operátorszámítás*. (Április 8., 22., 29., május 6., 13.)

Az előadó ismertette MIKUSIŃSKI, J., „Operátorszámítás" (Műszaki Kiadó, Budapest, 1961) c. könyvét.

18. MÁLYUSZ KÁROLY: *A Laplace-transzformációról*. (Május 27.)

Referáló előadás a következő művek alapján: ДИТКИН, В. А., „К теории операторного исчисления" (ДАН СССР **116** (1957)); BERG, L. „Einführung in die Operatorrechnung" (Berlin, 1962).

19. MAKAI ENDRE: *Sonin-Pólya tételéről és az Hermite-féle polinomok viselkedéséről*. (Szeptember 20.)

Lásd: MAKAI, E., „On a minimum problem II" (Acta Math. Ac. Sci. Hung., sajtó alatt); MAKAI, E., „An estimation in the theory of diophantine approximations" (Acta Math. Ac. Sci. Hung. **9** (1958) 299—307).

20. ADLER GYÖRGY: *Rugalmas testben fellépő feszültségek becslése a felületi elmozdulások segítségével*. (Szeptember 27.)

Az előadó numerikus becsléseket adott egy elég reguláris felülettel bíró rugalmas testben fellépő feszültségekre, a peremérték segítségével. Ezen becslésekben csak a test egészen egyszerű geometriai adatai és a felületi elmozdulások alkalmasan definiált első és másodrendű érintő-irányú deriváltjai szerepelnek. A másodrendű deriváltak az elsőrendű deriváltak Lipschitz-kitevőivel és Lipschitz-együtthatóival, vagy pedig a másodrendű deriváltak bizonyos integrálközepével helyettesíthetők, ami lehetővé teszi a feszültségek becslését olyan esetekben is, amikor a másodrendű érintőleges deriváltak nem léteznek, vagy nem korlátosak.

21. SZILÁRD KÁROLY: *A racionális egész függvények és az elliptikus függvények analógonjairól az általánosított egyváltozós komplex függvények osztályai-ban*. (Október 4.)

Lásd: SZILÁRD, K., „Über die Analoga der ganzen rationalen Funktionen in verallgemeinerten Klassen von Funktionen einer komplexen Veränderlichen" c. cikkei, e Közlemények **6** (1961) 375—380. és **7** (1962) A, 125—135; valamint SZILÁRD, K., „Über die topologische Natur einiger allgemeiner Sätze der Theorie der elliptischen Funktionen" c. cikkét, e Közlemények **8** (1963) A, 417—423.

22—24. BALATONI FERENC: *Kvadratikus alakok egy majoráns-problémája*. (Október 18., november 1., 8.)

Az előadó egy MAKAI ENDRÉ-től származó problémával foglalkozott. A probléma a következő: tekintsük azon n -edrendű A kvadratikus alakokat, melyekre teljesülnek a

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

feltételek, és legyen $\sigma(n) = \min \max_{A} a_{ii}$. Igaz-e, hogy $\sigma(n) = O(\log n)$, vagy

a $\log n$ milyen jobb függvénnyel helyettesíthető. Az előadó konstruktív úton igazolta, hogy $\sigma(n) = O(\sqrt{n})$, majd ismertette az extremális kvadratikusan alakkokra vonatkozó sejtéseit.

25–27. BIHARI IMRE: *Közönséges nem-lineáris differenciálegyenletek megoldásának aszimptotikus viselkedéséről.* (November 15., 22., 29.)

Lásd az előadó „The asymptotic behaviour of a system of nonlinear differential equations” című cikkét, e Közlemények **8** (1963) A, 475–488.

28–30. MÁLYUSZ KÁROLY: *A funkcionálanalízis módszerei és a Mikusiński-féle operátorszámítás.* (December 5., 12., 19.)

Az előadó megoldotta MIKUSIŃSKI, J., „Operátorszámítás” c. könyvének (Műszaki Kiadó, Budapest, 1961.) 351. lapján felvetett problémákat. A bizonyítás alapja a következő **lemma:** *Ha E Fréchet-tér és T ennek korlátos, lineáris leképezése önmagába, akkor valahányszor TE sűrű E -ben, $\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n E$ is sűrű E -ben.*

A numerikus és grafikus módszerek osztályának szemináriuma

1–3. MAKKAI MIHÁLY: *Referáló előadás.* (Január 9., 23., február 6.)

Az előadó ismertette МАРКОВ, А. А., „Теория алгоритмов” c. dolgozatát (Труды математического института имени В. А. Стеклова **42** (1954)).

4. KIS OTTÓ: *A Runge–Kutta típusú módszerek hibabecsléséről.* (Február 20.)

Tegyük fel, hogy az y függvény eleget tesz az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenletnek, valamint az

$$y(x_0) = y_0$$

kezdőfeltételnek és közelítőleg meg kell határozni értékét az $x_0 + h$ pontban. A közelítő értéket sokszor a

$$k_1 = hf(x_0, y_0), \quad k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right), \quad k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3), \quad \bar{y}(x_0 + h) = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Kutta-féle képletekkel számítjuk. Ezzel kapcsolatban el van terjedve az a nézet, hogy a $\left| \frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_2} \right|$ szám jellemzi az $y(x_0 + h) - \bar{y}(x_0 + h)$ hibát: ha ez a szám nagyobb néhány százaléknál, akkor a hiba nem hanyagolható el (COLLATZ, L., „Numerische Behandlung von Differentialgleichungen” **2. Aufl.** Springer, Berlin, 1955). Az előadó megmutatta, hogy az $f(x, y)$ függvény, valamint az x_0 és h szám választhatók úgy, hogy a

$$\frac{k_3 - k_2}{k_2 - k_1}, \quad y(x_0 + h) - \bar{y}(x_0 + h), \quad \frac{y(x_0 + h) - \bar{y}(x_0 + h)}{y(x_0 + h)}$$

menyiségek egymástól függetlenül tetszőleges előre megadott értékeket vegyenek fel.

$y(x_0 + h)$ közelítő értékét a

$$k_1 = hf(x_0, y_0), \quad k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{k_1}{3}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{3}, y_0 + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{6}\right), \quad k_4 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{8} + \frac{3k_3}{8}\right),$$

$$k_5 = hf\left(x_0 + h, y_0 + \frac{k_1}{2} - \frac{3k_3}{2} + 2k_4\right), \quad \bar{y}(x_0 + h) = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_4 + k_5)$$

Mersen-féle képlettel is számíthatjuk. Ezzel kapcsolatban találkozunk azzal az állítással, hogy az $y(x_0 + h) - \bar{y}(x_0 + h)$ hibát megbecsülhetjük az

$$\varepsilon = \frac{1}{30}(2k_1 - 9k_3 + 8k_4 - k_5)$$

menyiséggel (lásd LANCE, C. N., „Numerical Methods for High Speed Computers” című könyvét, London, Hitte, 1960.) Az előadó megmutatta, hogy az ε szám általában egy egész nagyságrenddel nagyobb a hibánál, de kivételes esetekben annál lényegesen kisebb is lehet (az is lehetséges, hogy az egyik mennyiség eltűnik, a másik pedig nem).

5—8. BÉKÉSSY ANDRÁS: *A Krilov—Bogoljubov módszer egy alkalmazása.* (Március 6. és 20., április 17. és május 8.)

Az előadó röviden ismertette A. N. KRILOV és N. N. BOGOLJUBOV módszerét nem lineáris differenciálegyenletek közelítő megoldására, majd ennek a módszernek egy lassan változó térben forgó mágneses dipólus mozgásegyenleteire való alkalmazását mutatta be. Lásd az előadónak „Mágneses dipólus forgó mozgása időben lassan változó mágneses térben” (JÁNOSSY LAJossal közös) cikkét e Közleményeknek ebben a füzetében.

9. FANTA KATALIN⁷: *A részartományok módszerének konvergenciájáról.* (Május 22.)

Lásd az előadó „О сходимости интерполяционных методов решения граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений” című (KIS OTTÓval közös) cikkét, e Közlemények **9** (1964) A, 1—2. füzetében, sajtó alatt.

10—13. KIS OTTÓ: *Referáló előadássorozat.* (Október 9. és 23., november 6., december 4.)

Az előadó a következő cikkeket ismertette: КАНТОРОВИЧ, Л. В., „О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений” (Сибирский математический журнал **3** (1962) 701—709); ГОРЕБУНОВ, А. Д.—ШАХОВ, Ю. А., „О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков” (Журнал вычислительной математики и математической физики **3** (1963) 239—253); ДЕВЯТКО, В. И., „О двустороннем приближении при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений”

⁷ Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Karának matematikai tanszéke.

(Журнал вычислительной математики и математической физики **3** (1963) 254–266); Салихов, Н. П., „Об одном видоизменении метода Н. И. Лобачевского для вычисления модулей корней алгебраического уравнения” (Журнал вычислительной математики и математической физики **3** (1963) 54–70).

14. JONESCU, D.⁸: *Adams típusú képletek elsőrendű közönséges differenciálegyenletek közelítő megoldására.* (November 13.)

Az előadó módszert adott Adams-típusú képletek előállítására és ezek hibájának becslésére.

15. JONESCU, D.⁸: *Mechanikus kubatúra képletek.* (November 20.)

Az előadó módszert adott mechanikus kubatúra képletek levezetésére és ezek hibájának becslésére.

A komplex függvénytani osztály szeminárium

1. TURÁN PÁL: *Egy torzítási tételről.* (Szeptember 11.)

Az előadó ismertette W. H. J. FUCHS és A. EDREI publikáció alatt álló egyes eredményeit.

2. TURÁN PÁL: *A Picard–Landau tételről.* (Szeptember 19.)

Az előadó egy elgondolást ismertetett, amely elvezethet a Picard–Landau tétel egy klasszikus algebrai bizonyításához.

3–6. BALÁZS JÁNOS: *Extremális polinomok vizsgálata funkcionálanalízisbeli módszerrel.* (Szeptember 27., október 4., november 22. és 29.)

Az előadó főképp a következő műveket ismertette: ВОРОНОВСКАЯ, Е. В., „Приложение функционального анализа к полиномам наименьшего отклонения” (ДАН **99** (1954) № 1); ВОРОНОВСКАЯ, Е. В., „Экстремальные полиномы некоторых простейших функционалов” (ДАН **99** (1954) № 2); ШАПИРО, Н. С., „On a class of extremal problems for polynomials in the unit circle” (Portugaliae Math. **20** (1961) 67–93); ROGOSINSKI, W. W.—ШАПИРО, Н. С., „On certain extremum problems for analytic functions” (Acta Mathematica **90** (1953)).

7–10. ALPÁR LÁSZLÓ: *A Faber-féle sorok bizonyos transzformációiról.* (November 8., december 6., 13 és 27.)

Lásd az előadó „Sur certaines transformation des séries de Faber” c. dolgozatát, e Közleményekben, sajtó alatt.

A differenciálgeometriai csoport szeminárium

1. VARGA OTTÓ: *Felületek belső geometriája metrikus alapképletek alakja felületi v. síkbeli görbevonali koordinátákban. Derivációs képletek. Invariáns deriválás.* (Szeptember 26.)

2. VARGA OTTÓ: *Christoffel szimbólumok és azok jelentősége.* (Október 10.)

3. RINOW, W.⁹: *Zárt geodetikusok.* (Október 15.)

Lásd az előadó „Die innere Geometrie metrischer Räume (Springer, Berlin, 1961) c. könyvét.

4. VARGA OTTÓ: *A Levi–Civita-féle konstrukció ko- és kontravariáns vektorok.* (Október 24.)

⁸ Bukarest.

⁹ Greifswald.

5. VARGA OTTÓ: *Másodrendű tenzorok, geometriai objektumok, tenzoriális szorzat.* (November 21.)

6. VARGA OTTÓ: *Tenzoralgebra.* (December 19.)

Az előadások ismertető jellegűek. Felhasznált irodalom: DUSCHEK, A.—MEYER, L., „Lehrbuch der Differentialgeometrie” (Teubner, Wien, 1928); LEVI-CIVITA, T., „The absolute differential calculus” (Blackie and Son, London, 1927).

A funkcionálanalízis osztály szemináriuma

1. FOIAŞ, C.⁸: *A spektrális disztribúcióról.* (Február 14.)

Lásd az előadó „Une application des distributions vectorielles à la théorie spectrale” (Bulletin des Sci. Math. **84** (1960) 147—158) című cikkét.

2. FOIAŞ, C.⁸: *A Navier—Stokes egyenletről.* (Február 18.)

Lásd az előadó „Essais dans l'étude des solutions des équations de Navier—Stokes dans l'espace. L'unicité et la presque-périodicité des solutions „petites”” (Rendiconti del Sem. Math. della Univ. di Padova **37** (1962) 262—298) című cikkét.

3—4. BOGNÁR JÁNOS: *Referáló előadás.* (Március 5., 6.)

Lásd: HILGEVORD, J., „Dispersion relation and causal description” (North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1960).

5. HALPERIN, I.¹⁰: *Uniform convexity of Banach function spaces.* (Április 17.)

Az előadó a következő problémát vizsgálta:

Legyen X egy mérhető tér, $u(P)$ ($P \in X$) mérhető függvény, $\lambda(u)$ pedig egy olyan függvény, amely a mérhető függvényeken van értelmezve, és eleget tesz a következő feltételeknek:

$$1) \quad \lambda(u) = 0 \quad \text{ha} \quad u(P) = 0 \quad \text{m. m.}$$

$$2) \quad \lambda(u) \geq \lambda(v) \quad \text{ha} \quad u(P) \geq v(P) \quad \text{m. m.}$$

$$3) \quad \lambda(u + v) \leq \lambda(u) + \lambda(v)$$

$$4) \quad \text{ha } u_n \nearrow u, \text{ akkor } \lambda(u_n) \nearrow \lambda(u).$$

Jelöljük B_λ -val azoknak a mérhető f függvényeknek a halmazát, melyekre

$$\|f\|_\lambda = \lambda(|f(P)|) < \infty,$$

és ezek normáját a fenti módon értelmezzük. Kérdés, hogy milyen függvények esetén lesz B_λ egyenletesen konvex. Az előadás speciális feltételeket adott, melyek mellett B_λ egyenletesen konvex.

6. HALPERIN, I.: *Unitary dilations of families of contractions.* (Április 19.)

Lásd az előadó „Sz.-Nagy—Brehmer dilations” (Acta Sci. Math. **23** (1962) 279—289) című cikkét.

7—8. DURST ENDRE¹¹: *Operátorok négyzetgyökeiről.* (Május 9., 16.)

Lásd: HALMOS, P. R., LUMER, G. and SCHÄFFER, J. J., „Square roots of operators” (Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953) 142—149); HALMOS, P. R. and

¹⁰ Kingston, Kanada.

¹¹ József Attila Tudományegyetem, Szeged.

LUMER, G., „Square roots of operators II” (Proc Amer. Math. Soc. **5** (1954) 583—595); LUMER, G., „Remarks on n -th roots of operators” (sajtó alatt).

9—10. HORVÁTH JÁNOS¹¹: *A statisztikus mechanika termodinamikai módszerei.* (Május 23., június 4.)

Az előadó a termodinamikai rendszer sűrűségmátrixát a megfelelő ideális gáz sűrűségmátrixának és egy olyan operátornak szorzataként állítja elő, amely eleget tesz a Bloch-féle egyenletnek. A Bloch-féle egyenletet pedig a Feinman-féle diagramm-technika segítségével oldja meg.

11. KOVÁCS ISTVÁN: Π_1 típusú faktorok kommutatív részgyűrűi. (Szeptember 12.)

Az előadó szükséges és elégséges feltételt adott arra, hogy egy Π_1 típusú faktor két kommutatív részgyűrűje unitér-ekvivalens legyen.

12. TANDORI KÁROLY: *Ortogonalis sorok konvergenciájáról.* (Szeptember 23.)

Az előadó kimutatja, hogy az összes olyan $\{a_n\}$ sorozatok, amelyekre a $\sum a_n \varphi_n$ ortogonalis sor bármely $\{\varphi_n\}$ ortonormált rendszer esetén m. m. konvergál, egy alkalmas normával Banach-teret alkotnak.

13. GEHÉR LÁSZLÓ: *Teljesen folytonos operátorok invariáns altereiről.* (Október 5.)

Lásd: ARONSZAJN, N. and SMITH, R. J., „Invariant subspaces of completely continuous operators” (Annals of Math. **60** (1954) 316—320).

14—15. GEHÉR LÁSZLÓ: *Operátorok háromszög előállításáról.* (Október 12., 19.)

Lásd: Бродский, М. С., „О треугольном представлении операторов” (Успехи мат. наук **16** (1961) 133—141).

16. SZÜCS JÓZSEF¹¹: *Invariáns nyomoperációk Neumann-algebrákon.* (Október 26.)

Az előadó ismertette néhány saját eredményét, ami a klasszikus mértekelmélet néhány problémáját általánosítja operátorgyűrűkre. Fő eredménye a következő: egy véges Neumann-algebrán definiált, a Neumann-algebra egy kommutatív automorfizmusával szemben invariáns véges nyomoperáció előállítható ergodikus nyomoperációk „folytonos összegeként”.

17. PAPP ZOLTÁN¹²: *Referáló előadás.* (November 2.)

Lásd: LOMONT, S. J., „Equivalence and Antiequivalence of Irreducible Sets of Operations, I. Finite Dimensional Spaces” (Journ. of Mathematical Physics **4** (1963) 420—443).

18. PAPP ZOLTÁN¹²: *Referáló előadás.* (November 16.)

Lásd: НАЙМАРК, М. А., „Об изоморфная представления колец и групп” (Докл. Акад. Наук **137** (1961) 278—281).

19. FOIAŞ, C.⁹: *Az ergodelméletben előforduló spektrálméletéről.* (November 30.)

Az előadó egy G , lokálisan kompakt Abel-csoport olyan $a \rightarrow U_a (a \in G)$ unitér előállításához tartozó spektrális mértékek multiplikatív tulajdonságait vizsgálja, amelyek eleget tesznek a $U_a(f \cdot g) = U_a f \cdot U_a g$ összefüggésnek, a L^2 előállítási tér minden olyan f, g elemére, amelyek szorzata szintén L^2 -beli.

20. DURST ENDRE¹¹: *Normális operátorok numerikus értékkészletéről.* (December 14.)

¹² Pedagógiai Főiskola, Szeged.

Az előadás választ ad Halmosnak egy problémájára, nevezetesen kimutatja, hogy egy kontrakció numerikus értékkészlete összes unitér dilatációja numerikus értékkészletének közös része.

21–57. BOGNÁR JÁNOS—CSÁKI ENDRE—MÁLYUSZ KÁROLY: *I. M. Gelfand és G. E. Silov „Általánosított függvények” című műve I—III. köteteinek részleges ismertetése.* (A nyári hónapok kivételével hetenként.)

Lásd: Гельфанд, И. М.—Шилов, Г. Е., „Обобщенные функции, вып. 1—3” (Физматгиз, Москва, 1958).

A geometriai osztály szemináriuma

1–3. KRAMMER GERGELY¹³: *Körfelhőkről.* (Január 16., 23., 30.)

Az előadó tetszőleges kör egységsugarú körökből álló körfelhőiről szolt. Témájában kapcsolódik a körfelhőkkel kapcsolatos korábbi vizsgálatokhoz. (Összefoglalva lásd: HEPPEs ALADÁR és MOLNÁR JÓZSEF, „újabb eredmények a diszkrét geometriában, I” Matematikai Lapok **11** (1960) 330—355.)

4. FEJES TÓTH LÁSZLÓ: *Az affin szabályos sokszögek egy szélsőértéktulajdonsága* (Február 6.)

Lásd az előadó „Über eine Extremaleigenschaft der affin-regulären Vielecke” (MTA Mat. Kut. Int. Közl. **4** (1963) A, 299—302) című cikkét.

5–6. BÖRÖCZKY KÁROLY¹⁴: *Gömbkitöltés a konstans görbületű terekben.* (Február 13., 20.)

A konstans görbületű terek egyenlő, r sugarú gömbökkel való kitöltésének sűrűségére felső korlátot szolgáltat a négy, páronként érintkező r sugarú gömb középpontjai által meghatározott tetraéderben fellépő sűrűség.

7–8. FEJES TÓTH LÁSZLÓ: *A szabályos tetraéder izoperimetrikus szélsőértéktulajdonsága a hiperbolikus térben.* (Február 27., március 6.)

Az előadás a következő tétel bizonyítását tartalmazza: A hiperbolikus tér adott térfogatú tetraéderei közül a szabályosnak legkisebb a felszíne. Dolgozat formájában megjelent a MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményeiben: „On the isoperimetric property of the regular hyperbolic tetrahedra” **8** (1963) A, 53—57.

9–11. MOLNÁR JÓZSEF¹⁴: *Térigényes körelhelyezésekről.* (Március 13., 20., 27.)

Legyen $\{K_i\}$ egy konstans görbületű felületen egy legalább három, kongruens, egymásba nem nyúló körből álló körrendszer, mely rendelkezék még azzal a tulajdonsággal, hogy bármely K_i körhöz tartozik egy kívülről érintő adott sugarú K_i^* kör, melyre $K_i^* \cdot K_j = 0$ teljesül. Mekkora lehet a $\{K_i\}$ körrendszer sűrűsége?

Elemi geometriai megfontolások révén a sűrűségre felső becslés adható, amely sok esetben pontos.

A fenti probléma különböző variánsaihoz jutunk, ha pl. $\{K_i\}$ nem kongruens körökből áll, ill., ha egy K_i körhöz több K_i^* tartozik. A szélsőértékeket képviselő körrendszerek között megtaláljuk például a Niggli- ill. Sinogowitz-féle homogén körrendszereket.

¹³ Központi Fizikai Kutató Intézet.

¹⁴ Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézete.

12. SOMKUTI LAJOSNÉ IMRE MARGIT¹⁵: *Körelhelyezések állandó görbületű felületeken.* (Április 3.)

Tekintsünk egy gömb, euklideszi, vagy hiperbolikus síkbeli $\{p, 3\}$ mozaik n különböző lapjának egyesítéseként keletkező T tartományt, továbbá n kongruens kört. Az előadó bebizonyította, hogy a T tartománynak ezen körök által lefedett része nem lehet a körök semmilyen elhelyezése mellett sem nagyobb mint a kiszemelt mozaiklapok középpontjai köré írt körök esetében. (Az előadás anyaga megjelenés alatt: „Kreislagerungen auf Flächen konstanter Krümmung”, Acta Math. Acad. Sci. Hung.)

13–15. HEPPES ALADÁR: *Cellarendszerekre vonatkozó izoperimetrikus problémák.* (Április 17., 28., május 8.)

Az előadás első része FEJES TÓTH LÁSZLÓ és az előadó korábbi vizsgálatainak továbbfejlesztéseként egy „nagy” síkbeli tartományban átfedés nélkül elhelyezett, n darab, egyenként legfeljebb k kerületű síkidom területösszegének számos esetben elérhető felső becslését tartalmazza. (Nyomtatásban megjelent az MTA Matematikai Kutató Intézete Közleményeiben: „Filling of a domain by discs”, 8 (1963) A, 363–371.

A második rész adott tartományt adott területű részekre felosztó minimális összhosszúságú hálózat tulajdonságainak vizsgálatával ill. a probléma térbeli megfelelőjével foglalkozott. Ennek keretében sor került pl. a gömbfelület összes izogonális főkörívhalozatának felsorolására is.

16. DOMINYÁK IMRE¹⁵: *Stabilis körrendszerek sűrűségéről.* (Május 22.)

Az előadó becslést adott a gömböt és a hiperbolikus síkot kitöltő, valamint az euklideszi síkot, a gömböt és a hiperbolikus síkot fedő stabilis körrendszerek sűrűségére. A gömbi körrendszereknél felsorolta azokat a körrendszereket, amelyeknél az adott korlát pontos. A téma FEJES TÓTH LÁSZLÓ egyik dolgozatának általánosítása.

17. LÁSZLÓ ZOLTÁN¹⁵: *Megjegyzések az egységgömböt kitöltő körrendszerek kerület- és sugárösszegéről.* (Május 29.)

Az egységgömbön átfedés nélkül elhelyezett n darab kör kerületösszegére illetve sugárösszegére FEJES TÓTH adott meg egyenlőtlenségeket. Ennek általánosításaként az előadó bebizonyította, hogy inkongruens körök kerület- és sugárösszegére ugyanaz a becslés érvényes; a sugárösszegre vonatkozóan azonban csak az $n \geq 9$ eset nyert bizonyítást.

TOMOR BENEDEK¹⁵: *Háromszöglapú konvex poliéderek élhosszösszegének vizsgálata állandó görbületű terekben.*

FEJES TÓTH sejtése szerint az euklideszi térben az egységgömböt tartalmazó konvex háromszöglapú poliéderek közül a tetraéder és az oktaéder élhosszösszege a legkisebb. COXETER és FEJES TÓTH a nem-euklideszi terekben diszkrét sugárértékekre megoldotta ezt a szélsőértékfeladatot. Az előadó eredményeiket sugárintervallumokra általánosította.

18. VINCZE ISTVÁN: *Konvex, zárt síkgörbék lefedéséről.* (Június 5.)

Az előadás tárgya a görbéhez tartozó fedőkör, beírt kör és a görbét tartalmazó legszűkebb koncentrikus körgyűrű néhány tulajdonságának ismertetése, továbbá a görbét tartalmazó, sugárviszonyt minimalizáló körgyűrűre, valamint a görbét legjobban közelítő ellipszisre vonatkozó néhány eredmény felsorolása.

¹⁵ Vegyipari Egyetem, Veszprém.

19. HAJÓS GYÖRGY: *A tetraéder síkmetszeteiről.* (Szeptember 25.)

Annak bizonyítása, hogy a tetraéder minden síkmetszetének területe és kerülete kisebb valamelyik lap területénél ill. kerületénél.

20. FEJES TÓTH LÁSZLÓ: *Egy körelhelyezési problémáról.* (Október 2.)

Az előadás arról a problémáról szólt, hogy hogyan kell a síkban n kört elhelyezni, ha azt akarjuk, hogy valamelyik kör elvitele céljából megmozdítható többi kör számának maximuma maximális legyen.

21. HAJNAL ANDRÁS¹⁴: *Erdős és Gallai egy sejtésének bizonyítása.* (Október 19.)

A tétel $k + 1$ elemű teljes gráfot nem tartalmazó telített gráfok egy tulajdonságáról szól.

DIRAC, G. A.¹⁶: *Egy gráf pontjainak számából, valamint a minimális és maximális fokszámból a független élek maximális számára levonható következtetések.*

22. GALLAI TIBOR: *Új bizonyítás Tutte egy tételére.* (Október 16.)

Az előadás anyaga megjelent az MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményeiben: „Neuer Beweis eines Tutte'schen Satzes” **8** (1963) A, 135—139.

23. ANDRÁSFAL BÉLA¹⁷: *J. R. Edmonds tételének egy új bizonyítása* (Október 23.)

A tétel gömbre rajzolható irányított gráfokra vonatkozik.

24. POLÁK, V.¹⁸: *On some geometrical problems.* (Október 30.)

Az előadó több új eredményéről számolt be, többek között a Molnár-féle sokszögprobléma általánosításával és többdimenziós féltérhalmazok minimalizálásával kapcsolatban.

HAJNAL ANDRÁS¹⁴: *Gallai egy sejtésének bizonyítása.* (Október 30.)

A tétel $k + 1$ elemű teljes gráfot nem tartalmazó telített gráfok egy további tulajdonságáról szól.

25. HAJÓS GYÖRGY: *Menger gráfelméleti tételéről.* (November 13.)

Az előadás Menger tételének egy új bizonyítását adta egy a tétellel ekvivalens következmény bizonyítása segítségével.

26. GALLAI TIBOR: *Egy Diractól és Weinsteintől származó problémáról.* (November 20.)

Az előadás G. A. Dirac október 19-i előadásának témájával foglalkozik.

27. ANDRÁSFAL BÉLA¹⁷: *Gráfelméleti szélsőérték-problémák.* (November 27.)

Lásd az előadó „Graphentheoretische Extremalprobleme” (Acta Math. Acad. Sci. Hung. **15** (1964)) c. cikkét.

28. HERMANN, M.¹⁹: *Charakterisierung eines Nachbarpunktschemas durch Stellen.* (December 4.)

A matematikai logika és alkalmazásai osztály és az algebrai osztály közös szemináriuma

1. KALMÁR LÁSZLÓ: *Néhány megjegyzés az automataelmélet alkalmazásának lehetőségéről a gyorsműködésű számológépek elméletére.* (Október 8.)

¹⁶ Ilmenau.

¹⁷ Budapesti Műszaki Egyetem.

¹⁸ Brno.

¹⁹ Halle.

2—5. PEÁK ISTVÁN¹¹: *V. M. Gluskov : Automaták szintézise c. könyvének ismertetése.* (Október 15., 22., 29., november 19.)

Lásd: ГЛУШКОВ, В. М., „Синтез цифровых автоматов”, Москва, 1962.

6. ANDREJEV, N. D.²⁰: *A gépi fordítás, mint tudományos-műszaki probléma.* (November 22.)

Az előadó ismertetette a közvetítő nyelv használatának előnyeit a gépi fordításban, valamint a közvetítő nyelv megválasztására vonatkozó korábbi elképzeléseket. Ezután bevezette két nyelv nem-kongruenciái mértékének fogalmát. A közvetítő nyelv az algoritmusok számának minimalizálása szempontjából akkor lesz optimális, ha a mező nyelveitől való nem-kongruenciáinak közepes mértéke minimális.

7—8. PEÁK ISTVÁN¹¹: *V. M. Gluskov : Automaták szintézise c. könyvének ismertetése (folytatás).* (November 25., december 3.)

Az algebrai osztály budapesti szemináriuma

1. FUCHS LÁSZLÓ: *Homológikus alapfogalmak és operátormodulusok* (Január 8.)

2. NOVOTNY¹⁸: *Kardinalarithmetik für Halbgeordnete Mengen.* (Január 22.)

3. FUCHS LÁSZLÓ: *Abelian Groups.* (A homomorfizmuscsoport megbeszélése.) (Január 31.)

Lásd az előadó „Abelian Groups” (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1958) c. könyvét.

4. FUCHS LÁSZLÓ: *Homológikus algebra és operátormodulusok.* (Február 5.)

5. FUCHS LÁSZLÓ: *Abelian Groups.* (Az endomorfizmusgyűrűk megbeszélése.) (Február 7.)

6. DÉNES JÓZSEF: *Digitális számológépek alkalmazása diszkrét matematikai problémák megoldására, I.* (Február 12.)

7. GRÄTZER GYÖRGY: *Az Abelian Groups-ból a bővítéscsoportok megbeszélése.* (Február 14.)

8. DÉNES JÓZSEF: *Digitális számológépek alkalmazása diszkrét matematikai problémák megoldására, II.* (Február 19.)

9. GRÄTZER GYÖRGY: *Az Abelian Groups-ból a bővítések elmélete.* (Február 21.)

10. FUCHS LÁSZLÓ: *Abelian Groups-ból a tenzori szorzat megbeszélése.* (Február 26.)

11. DÉNES JÓZSEF: *Digitális számológépek alkalmazása diszkrét matematikai problémák megoldására, III.* (Március 5.)

12. FUCHS LÁSZLÓ: *Az Abelian Groups alapján a „Hom” és „Ext” funktorok elméletének átvizsgálása.* (Március 7.)

13. FUCHS LÁSZLÓ: *A differenciálalgebráról.* (Március 12.)

14. GRÄTZER GYÖRGY: *Az Abelian Groups-ból az Abel-féle p-csoportok Prüfer—Ulm—Zippin elméletének és alkalmazásának megtárgyalása.* (Március 14.)

15. FUCHS LÁSZLÓ: *Zarisky-féle topológia, nem Hausdorff-féle topológikus csoportok.* (Március 19.)

²⁰ Leningrádi Állami Egyetem.

16. SZÁSZ FERENC: *Az Abelian Groups-ból a torziómentes csoportok ismertetése.* (Március 21.)
17. GRÄTZER GYÖRGY: *Referátum a folytonos geometriákról, I.* (Március 26.)
18. GRÄTZER GYÖRGY: *Az Abelian Groups-ból a karcsú csoportok megbeszélése.* (Március 28.)
19. GRÄTZER GYÖRGY: *Referátum a folytonos geometriákról, II.* (Április 2.)
20. SZÁSZ FERENC: *Referátum az automaták absztrakt elméletéről, I.* (Április 16.)
21. FRIED ERVIN¹⁴ és STEINFELD OTTÓ: *Az Abelian Groups-ból a vegyes Abel-csoportok ismertetése.* (Április 18.)
22. SZÁSZ FERENC: *Referátum az automaták absztrakt elméletéről, II.* (Április 23.)
23. GÜNTER SCHAAR²¹: *Meta-Abelsche Gruppen und Liesche Ringe.* (Április 25.)
24. FRIED ERVIN, SZÁSZ FERENC: *Szorzások egy Abel-csoporton, nilcsoportok, kvázinil csoportok stb. ismertetése az Abelian Groups alapján.* (Április 30.)
25. SZÁSZ FERENC: *Referátum az automaták absztrakt elméletéről, III.* (Május 2.)
26. GRÄTZER GYÖRGY: *Referátum a modell-elméletéről.* (Május 7.)
27. FRIED ERVIN: *Egy probléma a teljesen invariáns alcsoportokra vonatkozólag,* és SZÁSZ FERENC: *Az Abelian Groups-ból Artin-gyűrűk és egyéb fontos gyűrűk additív csoportjának megbeszélése.* (Május 9.)
28. SZÁSZ FERENC: *Beszámoló a leningrádi és moszkvai tanulmányútról.* (Június 20.)
29. JURAJ BOSÁK²²: *On subsemigroups of semigroups.* (Október 8.)
30. STEINFELD OTTÓ: *Felbontási tételek radikálmentes és reguláris félhálófélcsoportokban.* (Október 29.)
31. FUCHS LÁSZLÓ: *Beszámoló az olaszországi utazásról.* (Október 30.)
32. SCHMIDT TAMÁS: *Fuchs László „Partially Ordered Algebraic Systems”* (Pergamon Press, 1963) c. könyve alapján ismertetés a részben rendezett halmazok alapfogalmairól. (November 13.)
33. SERES IVÁN: *I. Schur egy problémája általánosításának a megoldása.* (November 20.)
34. SCHMIDT TAMÁS: *Partially Ordered Algebraic Systems c. könyv II. fejezet 2.3 részének az ismertetése.* (November 26.)
35. FRIED ERVIN: *Részleges eredmények Fuchs László: Abelian Groups könyve 45. problémájának megoldására vonatkozólag.* (November 27.)
36. FRIED ERVIN: *Partially Ordered Algebraic Systems c. könyv II. fejez. 4. 5. 6. és 7. részek ismertetése.* (December 3.)

²¹ Freiberg (NDK), Bergakademie, Math. Institut.

²² Bratislava.

**AZ INTÉZET MUNKATÁRSAINAK A KORÁBBI
DOLGOZATJEGYZÉKEKBEN MÉG FEL NEM TÜNTETETT, MÁSUTT
MEGJELENT VAGY SAJTÓ ALATT LEVŐ MAGYAR NYELVŰ
TUDOMÁNYOS MUNKÁINAK JEGYZÉKE¹**

- [1] ANDRÁSFAL B.: „Gráfelméleti szélsőérték-problémák.” Kandidátusi disszertáció (1963), 1—71.
- [2] BALATONI F.—KIRÁLY P.: „Mérési helyek optimális számának a megállapítása több ismeretlen paramétert tartalmazó intenzitásfüggvény esetén.” *KFKI Közlemények* **12**(1964) 1, 85—94.
- [3] BÁNKÖVI GY.—SARKADI K.: „5/16-os frakcionális faktoriális kísérlet terve.” *A Matematika Közgazdasági Alkalmazásai Kollokvium, Budapest, 1963. június 18—22, Kivonatok.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1963, 47.
- [4] BÉKÉSSY A.: „Lebegő vesszős, 50 bit pontosságú aritmetika URAL-1 számológépen, I.” *K. S. H. Ügyvitelgépészeti Főosztálya Elektronikus Számológép Részlegének Közleményei* **5** (1963) 111—127.
- [5] CSISZÁR I.: „Információ az információelméletéről.” *A Tudományos Ismeretterjesztő Társulat matematikai előadásai* (sokszorosított füzet), Budapest, 1963.
- [6] CSISZÁR I.: „A matematika egy új ága — az információelmélet.” *Magyar Tudomány*.*
- [7] FEJES TÓTH L.: „Mi a diszkrét geometria?” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **13** (1963) 229—238.
- [8] FEJES TÓTH L.: „Újabb eredmények a diszkrét geometriában.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **13** (1963) 341—354.
- [9] FREUD G.: „M. H. Stone approximációs tételéről.” *Matematikai Lapok*.*
- [10] GALLAI T.: „G. Ringel: Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen c. könyv ismertetése.” *Matematikai Lapok* **15** (1964).*
- [11] HAJÓS GY.—SURÁNYI J.: *Matematikai versenytételek I—II.* Második átdolgozott és bővített kiadás, Tankönyvkiadó.*
- [12] HEPPES A.: „Egy egydimenziós elhelyezési probléma.” *Matematikai Lapok* **14** (1963) 124—127.
- [13] KALMÁR L.: „Hozzászólások a matematikai nyelvészet és a gépi fordítás kérdéseiről tartott munkaértekezlet 1962. március 8-i és 9-i előadásaihoz.” *A matematikai nyelvészet és gépi fordítás kérdései. Általános nyelvészeti tanulmányok, II. kötet.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1964.*
- [14] KOVÁCS L. B.: „Kvázik-konkáv programozási feladat megoldása gradiens vetítési módszerrel.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **13** (1963) 157—179.
- [15] MUSZKA D.: „Kibernetikai módszerek alkalmazása a fonóiparban.” *MTESz Évkönyv*, 1964.*
- [16] RÉNYI A.: „Információelmélet a nyelvészetben.” *A matematikai nyelvészet és gépi fordítás kérdései. Általános nyelvészeti tanulmányok, II. kötet.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1964.*
- [17] SARKADI K.: „Megbízhatósági vizsgálatokkal kapcsolatos egyes matematikai kérdések.” *Híradástechnika* **14** (1963) 60—64.

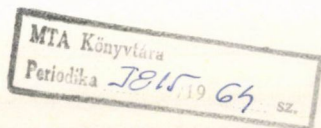
¹ A csillaggal jelölt dolgozatok sajtó alatt vannak.

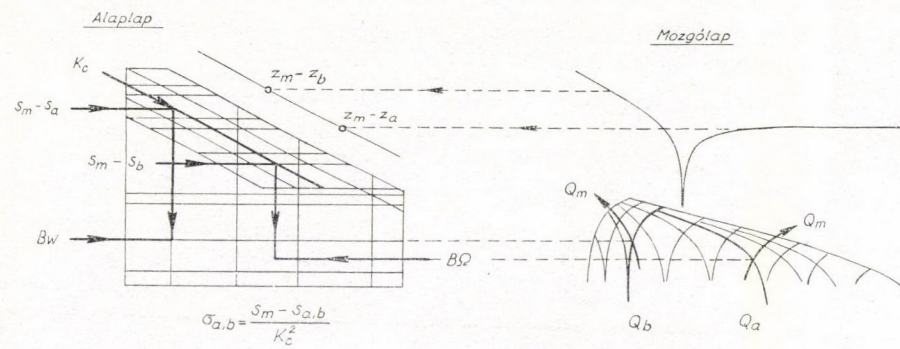
- [18] Soós Gy.: „A Finsler-féle fibrált terek elméletéhez.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **13** (1963) 17—64.
- [19] Szász F.: „A topológikus gyűrűkről és algebrákról, II.” *Matematikai Lapok* **14** (1963) 74—87.
- [20] Szűsz P.: „A láncörtek metrikus elméletéről.” *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei*.*
- [21] TARNAY Gy.—BRAUN P.: „Együttműködő energiarendszerek tranzienstabilitásának vizsgálata és számítása ELLIOT 803 B digitális számológéppel.” *NIM Számológépközpont Közleményei*.*
- [22] TURÁN P.: „Diofantikus approximáció és alkalmazott matematika.” *Matematikai Lapok* **14**(1963) 264—276.
- [23] TURÁN P.: „Erdős Pál 50 éves.” *Matematikai Lapok* **14** (1963) 1—28.
- [24] VINCZE I.: „Megjegyzések a népesség számszerű alakulásának vizsgálatához.” *Demográfia* **6** (1963) 217—230.

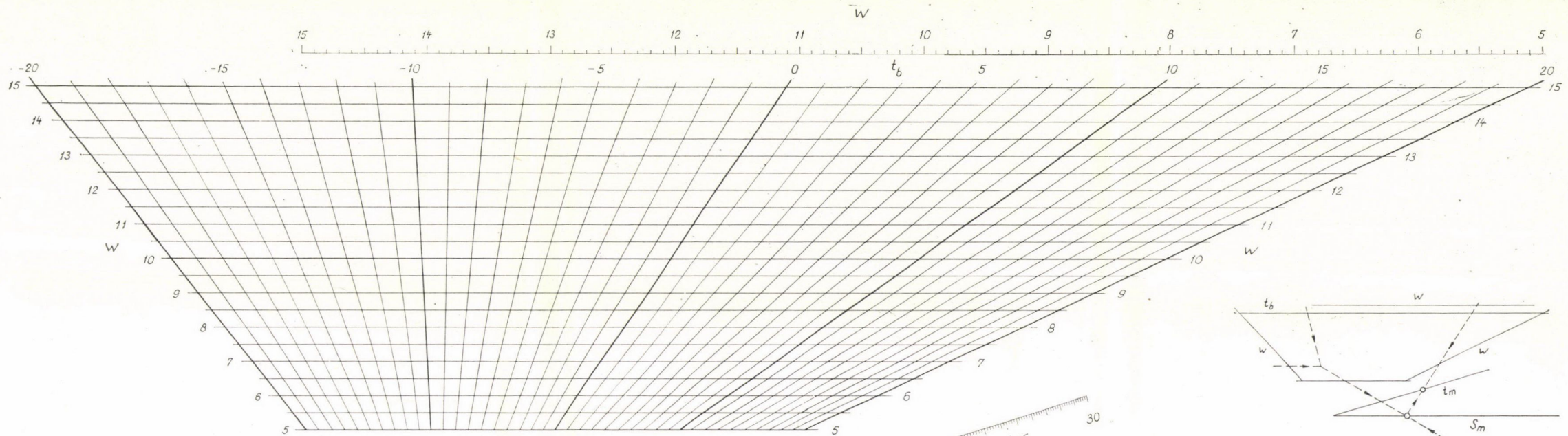
A KORÁBBI DOLGOZATJEGYZÉKEKBEN HIÁNYOS BIBLIOGRÁFIAI ADATOKKAL SZEREPLŐ MAGYAR NYELVŰ DOLGOZATOK PONTOS ADATAI²

- V.: [4] BALÁZS J.: „Hermite-féle polinomokra vonatkozó egy egyenlőtlenség.” *Matematikai Lapok* **12** (1961) 72—74.
- V.: [10] DOBÓ A.: „Egy üldözési problémáról.” *Matematikai Lapok* **12** (1961) 246—252.
- VI.: [13] FISCHER J.—SZIGETI J.: „Ivar szerinti különbségek hízekonyságra vizsgált sertéseken”. *Állattenyésztés* **11** (1962) 153—164.
- VII.: [6] BÉKÉSSY A.—FÁY Gy.—ZSELEV B.: „Felületi reakciók kinetikus tömeghatás törvényéről.” *Magyar Kémiai Folyóirat* **69** (1963) 28—33.
- VII.: [7] BÉKÉSSY A.—FÁY Gy.: „A tüzeléstechnikai reprezentációelméletéről.” *Magyar Kémiai Folyóirat* **69** (1963) 355—363.
- VII.: [12] CSUKÁS A.—NÉ—BÁRCZY G.—SEBESTYÉN G.: „A bikák hústermelés-örökítésének utódellenőrzés elbírálása gazdasági üzemekben.” *Állattenyésztés* **12** (1963) 1—17.
- VII.: [13] CSUKÁS A.—NÉ—ORBÁN I.: „Az utódellenőrzött bikák utódainak elkallódása születéstől a laktálás kezdetéig, illetőleg a laktálás kezdetétől annak befejezéséig.” *Állattenyésztés* **12** (1963) 117—127.
- VII.: [22] JUVANCZ L.: „Gyógyeljárások tervszerű kipróbálása”. *Orvosi Hetilap* **104** (1963) 706—708.

² A sorszám előtt a megfelelő dolgozatjegyzéket tartalmazó évfolyamra utalunk.





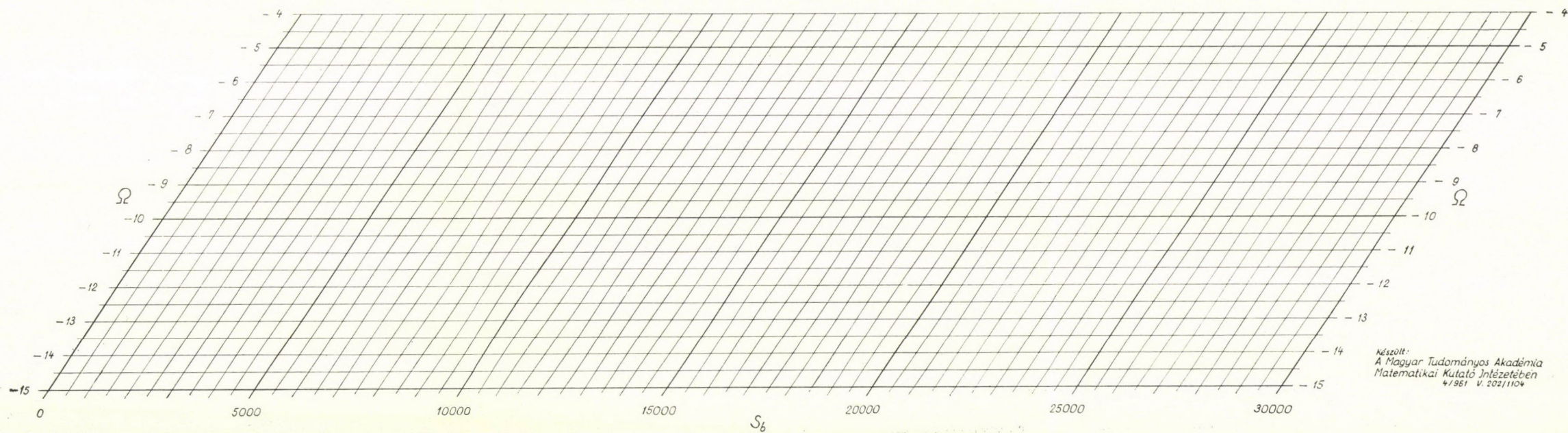
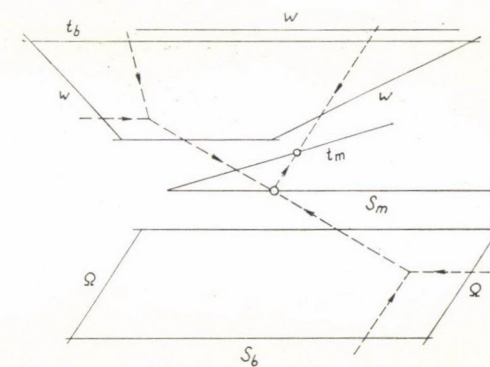
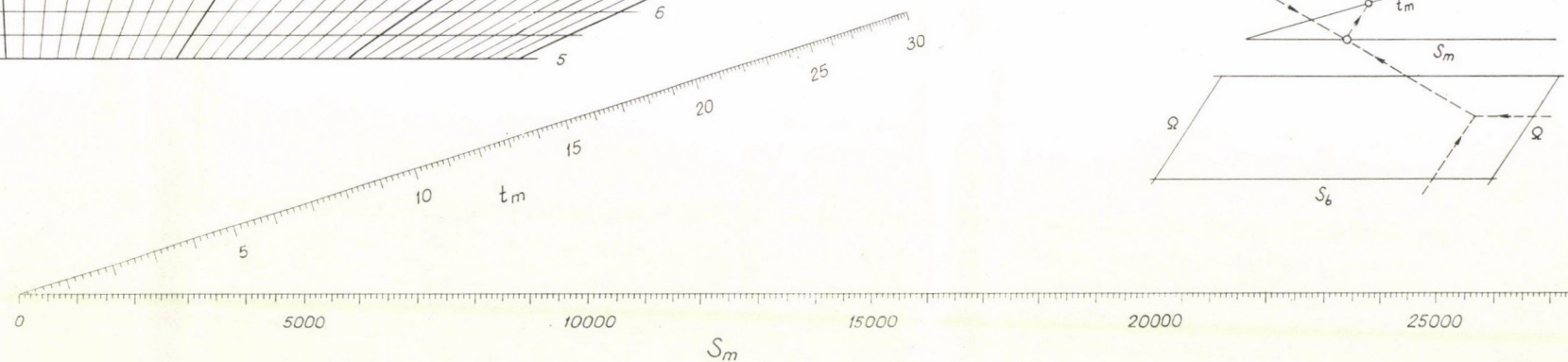


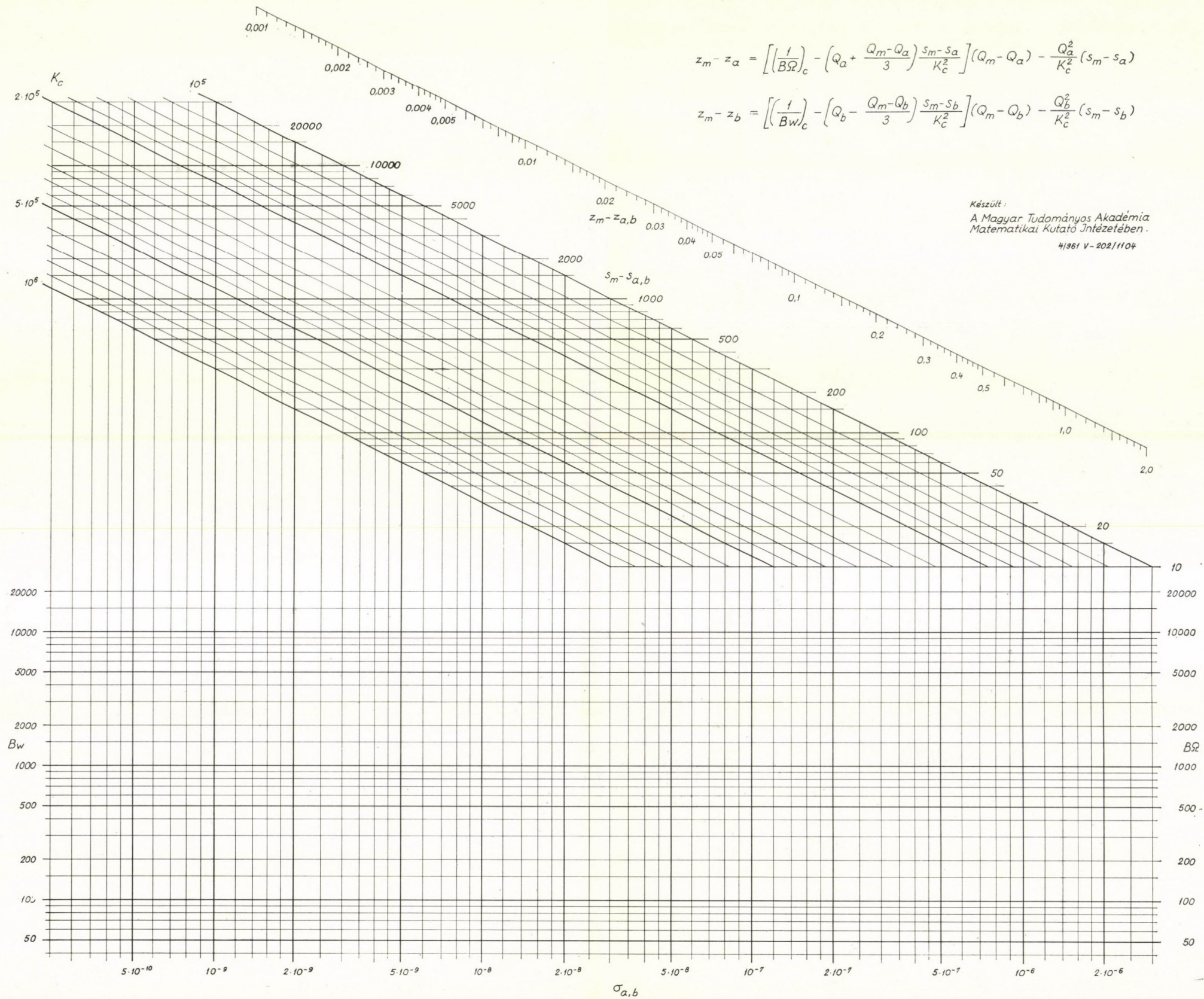
$$S_m - S_a = w_c(t_m - t_a)$$

$$S_m - S_b = \Omega_c(t_m - t_b)$$

Feltétel: $S_a = 0, t_a = 0$

S_m, S_a, S_b [m]
 t_m, t_a, t_b [min]
 w, Ω [m/sec]





$$z_m - z_a = \left[\left(\frac{f}{B\Omega} \right)_c - \left(Q_a + \frac{Q_m - Q_a}{3} \right) \frac{s_m - s_a}{K_c^2} \right] (Q_m - Q_a) - \frac{Q_a^2}{K_c^2} (s_m - s_a)$$

$$z_m - z_b = \left[\left(\frac{f}{B_w} \right)_c - \left(Q_b + \frac{Q_m - Q_b}{3} \right) \frac{s_m - s_b}{K_c^2} \right] (Q_m - Q_b) - \frac{Q_b^2}{K_c^2} (s_m - s_b)$$

Készült:
A Magyar Tudományos Akadémia
Matematikai Kutató Intézetében.
4/961 V-202/1104

СОДЕРЖАНИЕ

JÁNOS CZIPSZER 1930—1963 (Á. Császár)	495
BÉKÉSSY, A.—JÁNOSY, L.: Вращательное движение свободного магнитного диполя в магнитном поле, медленно изменяющемся по времени	504
ZIERMANN, M.: Применение теоремы Н. В. Смирнова к задаче о складах	516
FRIVALDSZKY, S.: Оптимализация общего времени продолжительности фракционной дистилляции	528
FÉNYES, T.—KÖRMENDY, L.—ZUKÁL, E.: Математическое исследование процесса обесцвечивания маринованного мяса под влиянием светового излучения I ...	539
BOD, P.: Линейное программирование в случае нескольких одновременно заданных целевых функций	554
ADLER, GY.: Исследование процессов охлаждения шаровидных отливок	596
FÉNYES, T.—MEITZEN, N.—TÓTH, K.: Исследование резонанса колебательной системы с одной степенью свободы в случае периодических возбуждающих сил, имеющих пилообразный вид	615
BÉKÉSSY, A.—BINARI, I.—MEGYERI, J.: Определение кривых подвесной дороги из геометрических элементов дуг	629
TARNAY, GY.—TÓTH, K.: Номограммы характеристических уравнений движения воды с непостоянной свободной поверхностью	639
NÉMETH, G.: Приближение функций $F_{\alpha}(x) = \int_0^x e^{-y^{\alpha}} dy$ многочленами	643
BINARI, I.: Деформация волнистой пластинки при заданной нагрузке II.	659
Обзор книг	661
Доклады, произнесенные в семинарах Института в 1963 г.	665
Список работ сотрудников Института на венгерском языке, опубликованных в других изданиях или находящихся в печати и еще не отмеченных в предыдущих списках литературы	679

INDEX

JÁNOS CZIPSZER (1930—1963) (Á. CSÁSZÁR)	496
BÉKÉSSY, A.—JÁNOSSY, L.: Rotational motion of a free magnetic dipole in a magnetic field slowly varying in time	506
ZIERMANN, M.: Anwendung des Smirnow'schen Satzes auf einen Lagerhaltungsproblem	517
FRIVALDSZKY, S.: Über die Optimierung der Durchlaufzeit der stufenweisen Destillation	528
FÉNYES, T.—KÖRMENDY, L.—ZUKÁL, E.: Die Untersuchung des durch Licht verursachten Verblassungsvorganges bei Pökelfleisch I.	539
BOD, P.: Über lineare Optimierung gemäss simultan gegebenen Zielfunktionen	555
ADLER, GY.: Étude du processus de refroidissement d'un moulage de forme sphérique	597
FÉNYES, T.—MEITZEN, N.—TÓTH, K.: Über die Resonanzuntersuchung eines linearen Schwingers bei einer periodischen sägezahnförmigen Erregungsfunktion	615
BÉKÉSSY, A.—BIHARI, I.—MEGYERI, J.: Some methods for finding the parameters of a given catenary by measuring ordinates	630
TARNAY, GY.—TÓTH, K.: Nomographische Lösung der charakteristischen Gleichungen von nichtpermanenter Wasserbewegung mit freier Oberfläche	639
NÉMETH, G.: Polynomapproximation der Funktion $F_{\alpha}(x) = \int_0^x e^{-y^{\alpha}} dy$	643
BIHARI, I.: Deformation of corrugated plates II	659
Book reviews	661
Lectures delivered in the seminars of the Institute	665
List of papers in Hungarian of the members of the Institute published or in print elsewhere and not yet marked in the previous lists of papers	679